Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.813.4, 514.75

Рыбников Леонид Григорьевич

# О квантовании некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор Эрнест Борисович Винберг.

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор Алексей Викторович Болсинов;

доктор физико-математических наук Борис Львович Фейгин.

**Ведущая организация:** Институт Проблем Передачи Информации РАН.

Защита диссертации состоится 13 октября 2006 г. в 16 часов 15 минут на заседании Диссертационного Совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан 13 сентября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Н. Чубариков

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы.

Если $B$ - такая фильтрованная ассоциативная алгебра, что ассоциированная градуированная алгебра $A = \operatorname{gr} B$ коммутативна, то операция коммутирования в $B$ индуцирует лиевскую операцию в $A$, называемую скобкой Пуассона и связанную с умножением тождеством Лейбница. Фильтрованные ассоциативные алгебры, обладающие указанным свойством (или, более общо, деформации коммутативных алгебр) часто возникают как алгебры наблюдаемых квантовой гамильтоновой системы, а соответствующие алгебры Пуассона оказываются алгебрами функций на фазовом пространстве соответствующей классической гамильтоновой системы. Если классическая гамильтонова система допускает некоторый набор первых интегралов (т.е. если имеется набор коммутирующих относительно скобки элементов алгебры Пуассона), то возникает естественный вопрос о возможности квантования этих первых интегралов (т.е. поднятия коммутирующих элементов алгебры Пуассона до коммутирующих элементов ассоциативной алгебры). Эту проблему можно сформулировать чисто алгебраически: для данной коммутативной относительно скобки Пуассона подалгебры $F \subset A$ найти такую коммутативную подалгебру $\tilde{F} \subset B$, что $\operatorname{gr} \tilde{F} = F$.

Решения проблемы квантования коммутативных подалгебр в общей ситуации не известно, имеются разные конструкции, работающие в разных частных случаях – например, конструкция Концевича [1] дает универсальный способ поднятия *центральных* элементов алгебры функций на гладком пуассоновом многообразии до центральных элементов соответствующей некоммутативной алгебры, и даже изоморфизм алгебр между этими двумя центрами. Однако, для коммутирующих не центральных элементов такого универсального способа, видимо, не существует. Кро-

[1] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, [arXiv:q-alg/9709040].

ме того, конструкция Концевича существенно использует гладкость и конечномерность пуассонова многообразия, и поэтому не охватывает многих интересных примеров. Например, вопрос о квантовании центральных элементов весьма интересен также и в случае пуассоновых орбифолдов (некоторые результаты в этом направлении получены Долгушевым[2]), и в случае бесконечномерных алгебр Ли.

Следующий интересный вопрос состоит в нахождении совместного спектра коммутирующих элементов алгебры наблюдаемых в пространстве состояний. Пространство состояний является представлением алгебры наблюдаемых, в частности, если алгебра наблюдаемых есть универсальная обертывающая алгебра (или некоторый ее подфактор), мы получаем теоретико-представленческую задачу о спектре некоторых операторов в представлении алгебры Ли. Известные примеры, в которых некоторое описание удается получить, весьма нетривиальны – из рассматриваемых в данной диссертации к ним относятся системы Гельфанда–Цетлина с известной теоретико-представленческой конструкцией собственного базиса [3], а также системы Годена, в которых спектр находится при помощи подстановки (анзаца) Бете [4]. Если набор коммутирующих элементов полон (т.е. порождаемая ими коммутативная подалгебра имеет максимально возможную степень трансцендентности), то естественно ожидать, что соответствующий спектр будет прост – и таким образом мы получаем

[2] V. Dolgushev, *Covariant and equivariant formality theorems*, Adv. Math. 191, 1: 147–177 (2005), QA/0307212.

[3] см., например, A.I. Molev, *Weight bases of Gelfand-Tsetlin type for representations of classical Lie algebras.* J. Phys. A 33 (2000), no. 22, 4143–4158.

[4] см., например, H.M. Babujian and R. Flume, *Off-shell Bethe Ansatz equation for Gaudin magnets and solutions of Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Mod. Phys. Lett. **A 9** (1994) 2029–2039; E.Frenkel, *Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz*, XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994), 606–642, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995., q-alg/9506003; E.Frenkel, *Lectures on Wakimoto modules, opers and the center at the critical level*, preprint math.QA/0210029; E.Frenkel, *Gaudin model and opers*, preprint math.QA/0407524; B.Feigin, E.Frenkel, N.Reshetikhin, *Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level.* Comm. Math. Phys., 166 (1994), pp. 27-62, hep-th/9402022; E. Mukhin, A. Varchenko, *Norm of a Bethe vector and the Hessian of the master function*, Compos. Math. 141 (2005), no. 4, 1012–1028, math.QA/0402349.

некоторый выделенный базис в пространстве состояний.

В данной диссертации исследуется проблема квантования коммутативных подалгебр в следующих двух основных примерах:

1) $B = D(X)$ - алгебра дифференциальных операторов на однородном пространстве $X = G/H$; в этом случае $A = P(X)$ - алгебра функций на кокасательном расслоении $T^*X$ многообразия $X$, полиномиальных на слоях, со стандартной скобкой Пуассона. В качестве коммутативной подалгебры в алгебре Пуассона $A = P(X)$ берется пуассонов центр подалгебры $G$-инвариантов $A^G \subset A$.

2) $B = U(\mathfrak{g})$ - обертывающая алгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$; в этом случае $A = S(\mathfrak{g})$ - симметрическая алгебра пространства $\mathfrak{g}$, скобка Пуассона в которой определяется тем условием, что на $\mathfrak{g}$ она совпадает с коммутатором. Рассматривается семейство *максимальных* коммутативных подалгебр в алгебре Пуассона $A = S(\mathfrak{g})$, получаемых методом сдвига инвариантов.

В первом примере особенно интересен случай так называемых *слабо коммутативных* однородных пространств, т.е. таких однородных пространств $X$, для которых алгебра инвариантов $P(X)^G$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Естественно ожидать, что квантованием коммутативной подалгебры $P(X)^G \subset P(X)$ в этом случае является подалгебра $D(X)^G \subset D(X)$ инвариантных дифференциальных операторов на пространстве $X$, т.е., в частности, алгебра $D(X)^G$ коммутативна (однородные пространства, обладающие таким свойством, называются *коммутативными*). Этот вопрос исследовался ранее в частных случаях в работах Гийемина и Стернберга[5], Микитюка[6], Винберга[7]. В случае произвольных однородных пространств

[5] V. Guillemin, S. Sternberg, *Multiplicity-free spaces.* J. Diff. Geom. 19 (1984), 31–56.

[6] И.В. Микитюк, *Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами.* Мат. сб. 129 (1986), 514–534.

[7] Э.Б. Винберг, *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия.* УМН 56 (2001), вып.1, 3–62.

ответ на вопрос о квантовании дает гипотеза Дюфло о центре алгебры инвариантных дифференциальных операторов на однородном пространстве. В случае редуктивной группы $G$ эта гипотеза следует из результатов Кнопа. Также некоторые результаты, подтверждающие эту гипотезу, были получены Торосяном[8]. В общей ситуации вопрос об истинности гипотезы Дюфло открыт. Результаты Концевича в этой ситуации оказываются неприменимыми, поскольку многообразие $\mathrm{Spec}(P(X)^G)$, как правило, не гладко (и, вообще говоря, никакими хорошими свойствами не обладает). Однако, для довольно большого класса однородных пространств оказывается, что вопрос все-таки можно свести к достаточно хорошим многообразиям, и, тем самым, доказать гипотезу (и это один из результатов диссертации).

Семейство максимальных коммутативных подалгебр в симметрической алгебре $S(\mathfrak{g})$ во втором примере было построено Мищенко и Фоменко[9]. Это семейство параметризуются регулярными элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Вопрос о поднятии коммутативных подалгебр этого семейства в универсальную обертывающую алгебру исследовался разными методами в работах Винберга[10], Ольшанского, Назарова[11], Тарасова[12]. Полученные в этих работах результаты позволяют построить поднятие коммутативных подалгебр этого семейства в универсальную обертывающую алгебру для всех классических алгебр Ли, однако, общего способа поднятия для всех полупростых алгебр Ли до сих пор известно не было.

С семейством коммутативных подалгебр Мищенко–Фоменко

[8] C. Torossian, *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symmétriques I, II.* Journal of Functional Analysis, 117, No. 1, pp. 118-173, 173-214, (1993).

[9] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, *Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 19, 3–94 (1979).

[10] Э.Б. Винберг, *О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры*, Изв. АН СССР, сер. матем., 54 No 1, 3-25 (1990).

[11] M. Nazarov, G. Olshanski *Bethe Subalgebras in Twisted Yangians*, Comm. Math. Phys. 178 (1996), no. 2, 483–506, q-alg/9507003.

[12] А.А. Тарасов, *О некоторых максимальных коммутативных подалгебрах в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $gl_n$*, Мат. Сб. 191, No 9, с.115–122 (2000).

связано еще несколько интересных вопросов. С помощью предельного перехода из подалгебр Мищенко-Фоменко можно получать другие коммутативные подалгебры в алгебре Пуассона $S(\mathfrak{g})$. Интересный (и до конца не изученный) вопрос состоит в явном описании подалгебр, возникающих таким образом. Этот вопрос исследовался в работах Винберга и Шувалова[13]: в этих работах установлено, что некоторые коммутативные подалгебры, получаемые методом цепочек (в частности, подалгебра Гельфанда–Цетлина в $S(\mathfrak{gl}_r)$) получаются как пределы подалгебр Мищенко–Фоменко. Гипотетически, поднятия таких подалгебр в универсальную обертывающую алгебру должны привести к обобщению конструкции базисов Гельфанда-Цетлина в представлениях алгебры Ли $\mathfrak{gl}_r$ на случай произвольной полупростой алгебры Ли.

Кроме того, результаты диссертации устанавливают связь подалгебр Мищенко–Фоменко с другим замечательным семейством коммутативных подалгебр в универсальной обертывающей алгебре, а именно, с подалгебрами, порожденными высшими гамильтонианами модели Годена, получающимися при помощи известной конструкции Фейгина–Френкеля–Решетихина. Гамильтонианы модели Годена изучались также при помощи разных методов Энрикесом, Рубцовым[14], Мухиным, Варченко[15], Талалаевым, Червовым[16] и др. Установленная связь позволяет применять известные методы исследования модели Годена для подалгебр Мищенко–Фоменко, и наоборот.

---

[13] В.В. Шувалов, *О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли*, Функ. Анал. и Прил., 36 (2002), вып.4, с.55–64.

[14] B. Enriquez, V. Rubtsov, *Hitchin systems, higher Gaudin hamiltonians and $r$-matrices.* Math. Res. Lett. 3 (1996), no. 3, 343–357, math.alg-geom/9503010.

[15] E. Mukhin, A. Varchenko, *Norm of a Bethe vector and the Hessian of the master function*, Compos. Math. 141 (2005), no. 4, 1012–1028, math.QA/0402349; E. Mukhin, A. Varchenko, *Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to Gaudin Bethe ansatz conjecture*, Preprint math.QA/0501144.

[16] A. Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, preprint hep-th/0604128.

### Цель работы.

Целью работы является исследование возможности квантования коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона, установление связей между различными известными конструкциями коммутативных подалгебр в ассоциативных алгебрах и алгебрах Пуассона, исследование вопросов о единственности квантования и простоте спектра "квантовых" коммутативных подалгебр в пространстве состояний для указанных основных примеров.

### Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 65 страницах и состоит из введения и двух глав. Библиография включает 60 наименований.

### Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Доказано, что алгебра инвариантных дифференциальных операторов на римановом однородном пространстве коммутативна тогда только тогда, когда ассоциированная алгебра Пуассона коммутативна, причем в случае, когда обе алгебры коммутативны, имеет место изоморфизм некоторых локализаций этих алгебр.

2) Доказано, что подалгебры Мищенко-Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли могут быть подняты до коммутативных подалгебр в универсальной обертывающей алгебре, причем это поднятие единственно для общих значений параметра подалгебры Мищенко-Фоменко.

3) Построено семейство максимальных коммутативных подалгебр в тензорном произведении $n$ экземпляров универсальной обертывающей алгебры произвольной полупростой ал-

гебры Ли, включающее квантовые подалгебры Мищенко–Фоменко и подалгебры Годена в качестве предельных случаев.

4) В случае алгебры Ли $\mathfrak{sl}_r$ доказано, что построенные коммутативные подалгебры в тензорном произведении $n$ экземпляров универсальной обертывающей алгебры при общих значениях параметров имеют простой спектр в тензорных произведениях $n$ неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_r$.

**Основные методы исследования.**

Для исследования дифференциальных операторов на однородных пространствах используются методы эквивариантной симплектической геометрии, теории инвариантов, теории представлений комплексных групп Ли, в частности метод орбит в теории представлений унипотентных групп Ли. Для квантования подалгебр Мищенко–Фоменко и исследования их связи с моделью Годена привлекается теория представлений конечномерных полупростых алгебр Ли и аффинных алгебр Каца-Муди на критическом уровне, структурная теория полупростых алгебр Ли.

**Теоретическая и практическая ценность работы.**

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для геометрии однородных пространств, гармонического аназиза, гамильтоновой и квантовой механики и теории представлений. Результаты диссертации могут быть полезны специалистам из Московского государственного университета, Ярославского государственного университета, ИППИ РАН, ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН, МИ РАН, ПОМИ РАН, ИТЭФ.

**Апробация работы.**

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях.

1) Семинар "Группы Ли и теория инвариантов" под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика, мех-мат МГУ. Доклады: "О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств", 2002 г.; "Метод сдвига инвариантов и критический уровень", 2004 г.; "Квадратичные элементы алгебр Пуассона полупростых алгебр Ли и метод сдвига инвариантов", 2005 г.

2) Семинар "Современные геометрические методы" под руководством А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко, мех-мат МГУ. Доклад: "Коммутативные подалгебры в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли и в универсальных обертывающих алгебрах", 2006 г.

3) Конференция "Invariant theory in all characteristics", at Queen's University, Ontario, Canada, 2002 г. Доклад: "Commutativity of weakly commutative Riemannian homogeneous spaces".

4) Конференция "Journeés des jeunes en cotutelle" в Лаборатории Ж.-В. Понселе (НМУ и CNRS), Москва, 2006 г. Доклад: "Shift of invariants method".

**Публикации автора по теме диссертации.**

Основное содержание диссертации опубликовано в шести работах, список которых приведен в конце автореферата [1–6].

## Краткое содержание работы

Диссертация состоит из ведения и двух глав.

Во введении обсуждается проблема квантования коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона, дается обзор известных ранее результатов, формулируются результаты диссертации и вкратце описываются методы их получения.

**В главе 1** диссертации рассматривается ситуация, когда $B = D(X)$ - алгебра дифференциальных операторов на однородном пространстве $X = G/H$ (алгебраической) группы Ли $G$, а $A = P(X)$ - алгебра функций на $T^*X$, полиномиальных на слоях. При некоторых ограничениях, например, если группа $G$ или $H$ редуктивна, имеем $A^G = \operatorname{gr} B^G$, где $A^G$ - алгебра инвариантных функций на $T^*X$, а $B^G$ - алгебра инвариантных дифференциальных операторов на $X$. Ясно, что если алгебра $B^G$ коммутативна, то и алгебра $A^G$ коммутативна (относительно скобки Пуассона). Известно, что если группы $G$ и $H$ редуктивны, то верно и обратное, причем оба эти условия равносильны сферичности пространства $X$ (то есть простоте спектра представления группы $G$ в пространстве $\mathbb{C}[X]$ полиномиальных функций на $X$). В диссертации доказывается, что из коммутативности алгебры $Q$ следует коммутативность алгебры $B$, в следующих случаях:

1) когда группа $H$ компактна (теорема 1);

2) когда группа $H$ редуктивна, а унипотентный радикал $N$ группы $G$ есть группа Гейзенберга, на центре которой группа $H$ действует тривиально (теорема 3).

Ключевой леммой в доказательстве этих теорем является следующее общее утверждение[17]. Если $B$ – фильтрованная ассоциативная алгебра, $A = \operatorname{gr} B$, и $Q \subset B$ – некоторая коммутативная подалгебра, $P = \operatorname{gr} Q$, такая, что $A$ – целостная коммутативная алгебра и $A \supseteq P$ – алгебраическое расширение, то алгебра $B$ коммутативна.

Далее, во втором случае при дополнительном условии, что $H$ компактна и является максимальной редуктивной подгруппой

[17]см. Л.Г. Макар-Лиманов *Коммутативность некоторых централизаторов в кольцах $R_{n,k}$* Функ. Ан. Прил. 4 (1970), No. 4, 78.

группы $G$, доказывается более общее утверждение, а именно, гипотеза Дюфло об изоморфизме центров алгебр $A^G$ и $B^G$ (теорема 5). Для более широкого класса однородных пространств доказывается ослабленный вариант этой гипотезы (теорема 4). Доказательства опираются, в основном, на теорему Кнопа о гомоморфизме Хариш-Чандры для действий редуктивных групп на гладких аффинных многообразиях[18].

**В главе 2** диссертации рассматривается ситуация, когда $B = U(\mathfrak{g})$ - универсальная обертываюшая алгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $A_\mu$ - коммутативная подалгебра алгебры $S(\mathfrak{g})$, полученная сдвигами инвариантов на регулярный полупростой элемент $\mu \in \mathfrak{g}^*$ (подалгебра Мищенко–Фоменко). Доказывается, что подалгебра $A_\mu$ может быть поднята до коммутативной подалгебры алгебры $U(\mathfrak{g})$ (теорема 6). Для классических алгебр Ли это было доказано ранее (другими методами) в работах Назарова, Ольшанского и Тарасова. В диссертации все семейство подалгебр $A_\mu$ интерпретируется как одна коммутативная подалгебра в тензорном произведении алгебры $S(\mathfrak{g})$ на симметрическую алгебру $S(\mathfrak{g})$ пространства $\mathfrak{g}$, и эта подалгебра поднимается до коммутативной подалгебры в тензорном произведении алгебры $U(\mathfrak{g})$ на $S(\mathfrak{g})$. Доказательство является общим и использует конструкцию высших гамильтонианов Годена, предложенную Фейгиным, Френкелем и Решетихиным[19]. Небольшое обобщение этой конструкции дает семейство максимальных коммутативных подалгебр $\mathcal{A}_\mu(z_1, \ldots, z_n)$ в тензорном произведении $n$ экземпляров алгебры $U(\mathfrak{g})$, параметризованное наборами $\mu; z_1, \ldots, z_n$, где $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $z_i \in \mathbb{C}$. При $n = 1$ подалгебра $\mathcal{A}_\mu(z_1)$ не зависит от $z_1$ и является поднятием подалгебры Мищенко–Фоменко в универсальную обертывающую алгебру.

Кроме того, в главе 2 показано, что поднятие подалгебр

[18] F. Knop, *Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions.* Ann. Math., II, Ser. 140, No.2, 253-288 (1994).

[19] B.Feigin, E.Frenkel, N.Reshetikhin, *Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level.* Comm. Math. Phys., 166 (1994), pp. 27-62, hep-th/9402022.

Мищенко–Фоменко в универсальную обертывающую алгебру единственно (теорема 11). Попутно доказано, что при общих $\mu$ подалгебра $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$ совпадает с централизатором множества своих элементов степеней 1 и 2 (теорема 12).

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r)$ доказано, что подалгебры $\mathcal{A}_\mu(z_1, \ldots, z_n)$ при общих значениях параметров имеют простой спектр в тензорном произведении любых $n$ неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$ (теорема 10). Ключевым в доказательстве является тот факт, что замыкание семейства подалгебр $\mathcal{A}_\mu(z) \subset U(\mathfrak{g})$ содержит алгебру Гельфанда–Цетлина (на уровне пуассоновых алгебр этот факт был доказан ранее Винбергом).

**Благодарности.**

Я благодарю моего научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Эрнеста Борисовича Винберга за постановку задач и постоянное внимание к моей работе. Я весьма признателен доктору физико-математических наук, профессору Александру Александровичу Кириллову, кандидату физико-математических наук Дмитрию Валерьевичу Талалаеву, кандидату физико-математических наук Александру Викторовичу Червову, а также всем участникам семинара "Группы Ли и теория инвариантов" под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика за полезные обсуждения.

# Литература

[1] Л.Г. Рыбников, *О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств* Функ. Ан. и Прил. 37 (2003) вып.2, 41–51

[2] Л.Г. Рыбников, *Слабо коммутативные однородные пространства с редуктивным стабилизатором,* УМН 59 (2004), вып. 4, 199–200.

[3] Л.Г. Рыбников, *Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона–Ли и метод сдвига инвариантов,* УМН 60 (2005), вып. 2, 173–174.

[4] Л.Г. Рыбников, *Метод сдвига инвариантов и модель Годена,* Функ. Ан. и Прил. 40 (2006), вып. 3, 30–43.

[5] L.G. Rybnikov, *Commutativity of weakly commutative Riemannian homogeneous spaces.* Invariant theory in all characteristics, 203–207, CRM Proc. Lecture Notes, 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[6] L.G. Rybnikov, *Structure of the center of the algebra of invariant differential operators on certain Riemannian homogeneous spaces.* Transform. Groups 9 (2004), no. 4, 381–397.