МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.178

Бабенко Максим Александрович

# СЛОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ДЛЯ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ

специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Н. К. Верещагин |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор В. В. Вьюгин<br>кандидат физико-математических наук<br>Д. В. Карпов |
| Ведущая организация: | Вычислительный центр имени<br>А. А. Дородницына<br>Российской академии наук |

Защита диссертации состоится 6 апреля 2007 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу:

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 6 марта 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Данная работа относится к теории комбинаторной оптимизации. В качестве основного объекта рассмотрения выступают графы: стандартные (направленные и ненаправленные), а также нестандартные (кососимметрические и двунаправленные).

Приведем вначале основные определения, касающиеся двух стандартных типов графов: направленных и ненаправленных. *Направленный граф* $G$ представляет собой четверку $(V, A, \mathrm{tail}, \mathrm{head})$, где $V$ — конечное множество *вершин*, $A$ — конечное множество *дуг*, а отображения $\mathrm{tail}\colon A \to V$, $\mathrm{head}\colon A \to V$ сопоставляют каждой дуге $a \in A$ пару различных вершин: *начало* $\mathrm{tail}(a)$ и *конец* $\mathrm{head}(a)$. Если $\mathrm{head}(a_1) = \mathrm{head}(a_2)$ и $\mathrm{tail}(a_1) = \mathrm{tail}(a_2)$, то дуги $a_1$ и $a_2$ называют *параллельными*. В случае когда не возникает неоднозначностей в понимании, дугу, идущую из вершины $u$ в вершину $v$, мы будем обозначать через $(u, v)$. Более того, при записи функций от дуг графа будем опускать двойные скобки и писать $f(u, v)$ вместо полного варианта $f((u, v))$.

*Маршрутом* $P$ из $s$ в $t$ (или, для краткости, $s$–$t$ *маршрутом*) в направленном графе $G$ называют последовательность вершин и дуг вида

$$P = (s = v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, a_k, v_k = t),$$

где $v_i$ — вершины $(0 \le i \le k)$, $a_i$ — дуги, $\mathrm{tail}(a_i) = v_{i-1}$, $\mathrm{head}(a_i) = v_i$ $(1 \le i \le k)$.

В случае если все дуги $a_i$ в последовательности $P$ различны, то маршрут $P$ будем называть *простым по дугам* (или *путем*); в случае если $v_i \ne v_j$ для всех $0 < i < j < k$ и $v_0 \ne v_i$, $v_k \ne v_i$ для всех $0 < i < k$, то *простым по вершинам* (или *простым* путем). Отметим, что концы простого пути могут совпадать. Маршрут $P$ будем называть *циклическим*, если $s = t$; циклический маршрут, являющийся (простым) путем, будем называть (*простым*) *циклом*.

Переходим теперь к понятию *ненаправленного графа*. Каждый такой граф задается тройкой $(V, E, \mathrm{ends})$, где $V$ — конечное множество вершин, $E$ — конечное множество *ребер*, а отображение ends задает для каждого ребра $e \in E$ множество $\mathrm{ends}(e) = \{u, v\}$, состоящее из двух различных вершин $u$, $v$ (*концов* $e$). В случае если $\mathrm{ends}(e_1) = \mathrm{ends}(e_2)$, то ребра $e_1$ и $e_2$ называют *параллельными*. Ребро, соединяющее вершины $u$ и $v$, мы обозначаем через $\{u, v\}$.

Понятие маршрута переносится на случай ненаправленного графа следующим образом. *Маршрутом* $P$ из $s$ в $t$ (*$s$–$t$ маршрутом*) в ненаправленном графе $G$ называют последовательность вершин и ребер вида

$$P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k),$$

где $v_i$ — вершины ($0 \le i \le k$), $e_i$ — ребра, $\mathrm{ends}(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ ($1 \le i \le k$).

Если все ребра $e_i$ в последовательности $P$ различны, то маршрут $P$ будем называть *простым по ребрам* (или *путем*). Определения понятий *простого по вершинам* маршрута (или, иначе говоря, *простого* пути), *циклического* маршрута, а также *цикла* и *простого* цикла полностью повторяют соответствующие определения для случая направленного графа.

Понятие двунаправленного графа возникло в работах Эдмондса и Джонсона при решении специального класса задач целочисленного программирования[1].

*Двунаправленный граф* $G$ — это четверка $(V, E, \mathrm{ends}, \omega)$. Здесь $V$ — конечное множество *вершин*, $E$ — конечное множество *двунаправленных ребер*. Отображение ends определено на множестве $E$ и сопоставляет каждому ребру $e \in E$ двухэлементное мультимножество $\mathrm{ends}(e) = \{u, v\}$, где $u$, $v$ — вершины (не обязательно различные), называемые *концами* $e$. Наконец, для каждого ребра $e \in E$ и вершины $v \in \mathrm{ends}(e)$ определено значение $\omega(e, v) \in \{+1, -1\}$, называемое *направлением* ребра $e$ в вершине $v$. В случае если $\omega(e, v) = +1$, то говорят, что ребро *$e$ входит в $v$*, иначе говорят, что ребро *$e$ выходит из $v$*. Отметим, что возможен случай $\mathrm{ends}(e) = \{v, v\}$; такие ребра $e$ называют *двунаправленными петлями*. В случае $\omega(e, v) = +1$, петля *$e$ дважды входит* в $v$; иначе $e$ *дважды выходит* из $v$.

Итак, каждое ребро $e \in E$ соединяет две вершины $u, v \in \mathrm{ends}(e)$ и принадлежит к одному из следующих трех типов:

1) направленное ребро (или *дуга*), которое выходит из одного конца и заходит в другой (при этом $u \neq v$);

2) ребро, входящее в оба конца;

[1] *Edmonds J., Johnson E. L.* Matching, a Well-Solved Class of Integer Linear Programs // Combinatorial Structures and Their Applications, Calgary International Conference. New York: Gordon and Breach, 1970. P. 89–92.

*Lawler E. L.* Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. New York: Holt, Reinhart, and Winston, 1976.

*Schrijver A.* Combinatorial Optimization. Berlin: Springer, 2003.

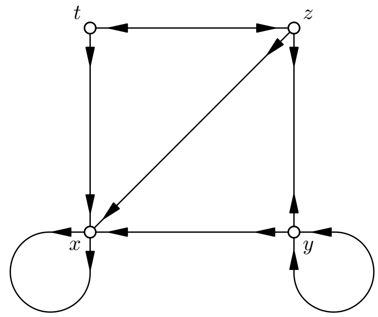



Рис. 1. Пример двунаправленного графа

3) ребро, выходящее из обоих концов.

Пример двунаправленного графа представлен на рис. 1.

*Маршрут* из $s$ в $t$ (*$s$–$t$ маршрут*) в двунаправленном графе $G$ представляет собой чередующуюся последовательность вершин и ребер

$$P = (s = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = t), \tag{1}$$

где $v_i$ — вершины ($0 \leq i \leq k$), $e_i$ — двунаправленные ребра, $\mathrm{ends}(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ ($1 \leq i \leq k$), и для всех $0 < i < k$ ребра $e_i$, $e_{i+1}$ образуют *транзитную пару* в вершине $v_i$, то есть одно из ребер $e_i$, $e_{i+1}$ входит в $v_i$, а другое выходит из $v_i$.

Как и в случае обычных графов, маршрут без повторяющихся ребер называют *путем*. Понятие *простого* пути вводится для двунаправленных графов точно так же, как и для направленных и ненаправленных. Маршрут (1), в котором $s = t$, и ребра $e_1, e_k$ образуют транзитную пару в вершине $s$, называют *циклическим*. Циклический маршрут, являющийся (простым) путем, называют (простым) *циклом*.

Направленный граф можно считать двунаправленным, превратив каждую дугу $a = (u, v)$ исходного графа в ребро $e_a$ с множеством концов $\{u, v\}$ и положив $\omega(e_a, u) := -1$, $\omega(e_a, v) := +1$. При этом семейство маршрутов исходного направленного графа и семейство маршрутов полученного двунаправленного графа находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.

Для произвольного графа $G$ мы будем писать $V_G$ (соответственно $A_G$, $E_G$) для обозначения его множества вершин (соответственно дуг, ребер). Аналогично через $V_P$, $A_P$, $E_P$ будут обозначаться мультимножества вершин, дуг и ребер произвольного маршрута $P$.

Для двунаправленных графов существует также альтернативный и отчасти более удобный язык их описания — так называемые *кососимметрические графы*. Определение кососимметрического графа было сформулировано в работах Гольдберга и Карзанова[2], а также Татта[3] (где они получили название *антисимметрических орграфов*).

Рассмотрим направленный граф $G$. Пусть задана пара биекций $\sigma_V\colon V_G \to V_G$ и $\sigma_A\colon A_G \to A_G$, обладающих следующими свойствами:

1) $\sigma_V(\sigma_V(v)) = v$ для всех $v \in V_G$ и $\sigma_A(\sigma_A(a)) = a$ для всех $a \in A_G$;

2) $\sigma_V(v) \neq v$ для всех $v \in V_G$ и $\sigma_A(a) \neq a$ для всех $a \in A_G$;

3) $\mathrm{head}(\sigma_A(a)) = \sigma_V(\mathrm{tail}(a))$ и $\mathrm{tail}(\sigma_A(a)) = \sigma_V(\mathrm{head}(a))$ для всех $a \in A_G$.

Тогда тройку $(G, \sigma_V, \sigma_A)$ будем называть *кососимметрическим графом.* Если это не вызывает разночтений, мы будем называть *кососимметрическим* и сам направленный граф $G$. В дальнейшем нам потребуется работать как с кососимметрическими, так и с обычными направленными графами. Для того, чтобы подчеркнуть отсутствие кососимметрической структуры у последних, будем называть их *стандартными.*

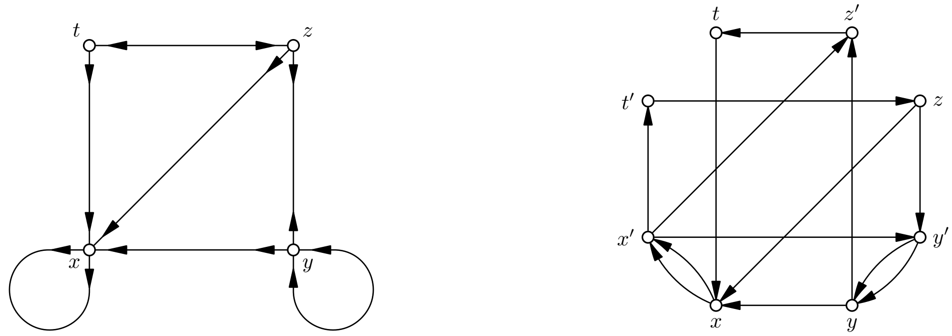
Пару отображений $(\sigma_V, \sigma_A)$ мы скомбинируем в одно отображение $\sigma\colon V_G \cup A_G \to V_G \cup A_G$. Отображения $\sigma$, $\sigma_V$, $\sigma_A$ будем называть *отображениями симметрии* графа. Для удобства записи мы будем использовать обозначение $x'$ для образа $\sigma(x)$ (как по отношению к вершинам, так и к дугам). Элемент $x'$ (вершину или дугу) будем называть *симметричным* к элементу $x$. Множество вершин $V_G$ тогда разбивается на непересекающиеся пары симметричных вершин; также дело обстоит и с множеством дуг. Симметрия естественным образом переносится на подмножества вершин и дуг графа. Из определения следует, что если в кососимметрическом графе $G$ присутствуют дуги, соединяющие пару симметричных вершин $v$, $v'$, то таких дуг непременно четное число, и они разбиваются на пары симметричных.

Покажем теперь, как введенное понятие кососимметрического графа связано с понятием двунаправленного. Пусть задан кососимметрический граф $G$. Выберем произвольное упорядоченное разбиение $\pi = (V_1, V_2)$ множества $V_G$ (то есть $V_G = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), такое что $V_1' = V_2$. Тогда по $G$ и $\pi$ можно построить двунаправленный граф $\widetilde{G}$ с множеством вершин $V_1$ следующим способом: ребра $\widetilde{G}$ будут соответствовать парам

[2] *Goldberg A. V., Karzanov A. V.* Path Problems in Skew-Symmetric Graphs // Combinatorica. 1996. V. 16, № 3. P. 353–382.

*Goldberg A. V., Karzanov A. V.* Maximum Skew-Symmetric Flows and Matchings // Mathematical Programming. 2004. V. 100, № 3. P. 537–568.

[3] *Tutte W. T.* Antisymmetrical Digraphs // Canadian J. Math. 1967. V. 19. P. 1101–1117.




($a$) Двунаправленный граф $\widetilde{G}$

($б$) Соответствующий кососимметрический граф $G$

Рис. 2. Соответствие между двунаправленными и кососимметрическими графами

симметричных дуг в $G$. Точнее, каждая пара симметричных дуг $a$, $a'$ в $G$ порождает одно ребро $e$ в $\widetilde{G}$, соединяющее вершины $u, v \in V_1$, так что:

1) ребро $e$ идет из $u$ в $v$, если одна из дуг $a, a'$ идет из $u$ в $v$ (а другая из $v'$ в $u'$);

2) ребро $e$ выходит из обоих концов $u, v$, если одна из дуг $a, a'$ идет из $u$ в $v'$ (а другая из $v$ в $u'$);

3) ребро $e$ входит в оба конца $u, v$, если одна из дуг $a, a'$ идет из $u'$ в $v$ (а другая из $v'$ в $u$).

В частности, ребро $e$ будет петлей, если дуги $a$, $a'$ соединяют пару симметричных вершин.

Обратно, двунаправленный граф $\widetilde{G}$ порождает кососимметрический граф $G$ с отображением симметрии $\sigma$ следующим образом. Для каждой вершины $v \in V_{\widetilde{G}}$ возьмем ее копию $\sigma(v)$ и образуем множество $V'_{\widetilde{G}} := \big\{\sigma(v) \mid v \in V_{\widetilde{G}}\big\}$. Положим $V_G := V_{\widetilde{G}} \cup V'_{\widetilde{G}}$. Для каждого ребра $e \in E_{\widetilde{G}}$, соединяющего вершины $u$ и $v$, построим две симметричные дуги $a, a' \in A_G$, чтобы выполнялись указанные выше условия 1–3. Пример соответствия между двунаправленными и кососимметрическими графами представлен на рис. 2.

Существует также соответствие между маршрутами в $\widetilde{G}$ и маршрутами в $G$. А именно, пусть $\tau$ обозначает отображение $V_G \cup A_G$ на $V_{\widetilde{G}} \cup E_{\widetilde{G}}$, склеивающее пары симметричных вершин и дуг. Каждый маршрут $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k)$ в $G$ индуцирует последовательность $\tau(P) := (\tau(v_0), \tau(a_1), \tau(v_1), \ldots, \tau(a_k), \tau(v_k))$ вершин и ребер из $\widetilde{G}$. Легко видеть, что $\tau(P)$ будет маршрутом в $\widetilde{G}$.

В приложениях особенно важную роль играют не произвольные маршруты в графах, а пути. Если в направленном графе вершина $t$ достижима из вершины $s$ по некоторому маршруту, то $t$ также достижима по некоторому пути (даже простому). В противоположность этому, в двунаправленном графе наличие $s$–$t$ маршрута не влечет за собой наличие $s$–$t$ пути. Проверка наличия $s$–$t$ пути в двунаправленном графе, вообще говоря, представляет собой достаточно сложную задачу.

Будем называть маршрут *нетривиальным*, если он содержит хотя бы одно ребро (или дугу). Путь в кососимметрическом графе будем называть *регулярным*, если в нем не встречается пары симметричных дуг (при этом симметричные вершины встречаться могут). По каждому нетривиальному маршруту $\widetilde{P} = (w_0, e_1, w_1, \ldots, e_k, w_k)$ в графе $\widetilde{G}$ можно построить последовательность $\widehat{\tau}(\widetilde{P}) := (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k)$ из вершин и дуг графа $G$ по следующему правилу:

1) если ребро $e_1$ выходит из $w_0$ (соответственно входит в $w_0$), то положим $v_0 := w_0$ (соответственно $v_0 := w_0'$);

2) для всех $1 \le i \le k$ если ребро $e_i$ выходит из $w_{i-1}$, то в качестве $a_i$ возьмем дугу из множества $\tau^{-1}(e_i)$, которая выходит из $w_{i-1}$; кроме того положим $v_i := \mathrm{head}(a_i)$;

3) для всех $1 \le i \le k$ если ребро $e_i$ входит в $w_{i-1}$, то в качестве $a_i$ возьмем дугу из множества $\tau^{-1}(e_i)$, которая выходит из $w_{i-1}'$; кроме того положим $v_i := \mathrm{head}(a_i)$.

В случае когда ребро $e_i$ представляет собой петлю, то дуги из $\tau^{-1}(e_i)$ оказываются параллельными, поэтому дуга $a_i$ выбирается из двух возможных произвольным образом. Несложно показать, что для любого нетривиального маршрута $\widetilde{P}$ в $\widetilde{G}$ справедливы свойства:

1) $\widehat{\tau}(\widetilde{P})$ представляет собой маршрут в $G$, причем $\tau(\widehat{\tau}(\widetilde{P})) = \widetilde{P}$;

2) $\widetilde{P}$ представляет собой путь (то есть простой по ребрам маршрут), если и только если $\widehat{\tau}(Q)$ представляет собой регулярный путь.

Тем самым, отображения $\tau$, $\widehat{\tau}$ задают взаимно однозначное (с точностью до выбора представителя из пары параллельных дуг вида $(v, v')$, как указано выше) соответствие между семействами нетривиальных маршрутов (соответственно нетривиальных путей) в $\widetilde{G}$ и нетривиальных маршрутов (соответственно нетривиальных регулярных путей) в $G$.

Как показано в главе 2 диссертации, в терминах кососимметрических графов оказывается возможным описать широкий спектр задач комбинаторной оптимизации (паросочетания в графах общего вида, $T$-соединения, $b$-паросочетания, $f$-факторы, упаковки $T$-путей и другие). Тем самым, теория кососимметрических графов служит удобным обобщающим инструментом, а алгоритмы для задач на кососимметрических графах находят множество применений.

## Цель работы

В данной диссертации решается проблема построения эффективных алгоритмов для ряда задач на кососимметрических и двунаправленных графах, а также изучаются структурные свойства этих графов. Рассматриваемые в диссертации задачи могут быть разделены на следующие три класса.

**Первый класс** составляют задачи, связанные с разысканием в кососимметрическом графе $G$ кратчайшего регулярного пути между выбранной парой вершин. Длины дуг могут быть произвольными (в том числе отрицательными) числами, а *длиной* пути называется сумма длин составляющих его дуг. При этом предполагается, что длины симметричных дуг равны, и в графе отсутствуют регулярные циклы отрицательной длины. В работе Гольдберга и Карзанова[4] представлен алгоритм с оценкой $O(mn^2 \log n)$. (Здесь и далее через $n$ обозначается число вершин графа, а через $m$ — число ребер или дуг. При этом предполагается, что $2n \le m \le n^2$). Мы улучшаем данную оценку до $O(\min(mn \log n, n^3))$.

**Второй класс** образуют задачи, связанные с циклической структурой кососимметрических и двунаправленных графов. Мы обобщаем понятие ацикличности на случай кососимметрических графов. При этом оно распадается на два: обычная *ацикличность* (отсутствие циклов) и *регулярная ацикличность* (отсутствие регулярных циклов). Для каждого из этих типов мы устанавливаем структурные результаты, а также предъявляем алгоритмы, позволяющие выполнить проверку на принадлежность данного графа к указанному типу за линейное время. Структурные результаты для случая регулярной ацикличности позволяют дать короткое доказательство известной в теории паросочетаний *теоремы Коцига*[5] (утверждающей, что если в ненаправленном графе $G$ су-

[4] *Goldberg A. V., Karzanov A. V.* Path Problems in Skew-Symmetric Graphs // Combinatorica. 1996. V. 16, № 3. P. 353–382.

ществует и единственно совершенное паросочетание $M$, то в $G$ есть мост, причем $M$ содержит хотя бы один из мостов $G$).

Среди проблем второго класса следует также упомянуть задачу о разыскании в кососимметрическом графе $G$ регулярного цикла минимального среднего веса. (Предполагается, что дугам графа приписаны вещественные веса, при этом веса симметричных дуг равны. Под *средним весом* цикла понимается отношение суммы весов его дуг к их количеству.) Для стандартных направленных графов эта задача изучалась Карпом[6] (алгоритм с оценкой $O(mn)$), а для ненаправленных — Барахоной[7] (алгоритм с оценкой $O(\min(m^2 n \log n, mn^3))$). Задача на кососимметрическом графе обобщает обе упомянутые проблемы и, как мы показываем, может быть решена за время $O(\min(mn^2 \log n, n^4))$. В частности, мы улучшаем оценку Барахоны.

**Третий класс** складывается из потоковых и мультипотоковых задач. Нами рассматривается проблема нахождения в кососимметрических сетях целочисленных кососимметрических потоков минимальной стоимости; для ее решения предлагается два алгоритма. Оценка сложности первого составляет $O(k \min(m \log n, n^2))$, где $k$ — величина потока. Второй алгоритм имеет оценку сложности $O(\phi(n, m) + \min(mn \log n, n^3))$, где $\phi(n', m')$ обозначает сложность задачи о целочисленной циркуляции минимальной стоимости в стандартной направленной сети с $n'$ вершинами и $m'$ дугами.

Мы также изучаем случай *простых* кососимметрических сетей, то есть кососимметрических графов, в которых каждой дуге приписана единичная пропускная способность, и параллельные дуги отсутствуют. Для стандартного направленного случая потоковая задача в простых сетях изучалась Карзановым, а также Эвеном и Таржаном[8]. Был получен алгоритм со временем работы $O(\min(mn^{2/3}, m^{3/2}))$. Для двунаправленных сетей оценка сложности $O(m^{3/2})$ была получена Габовым[9].

---

[5] *Kotzig A.* On the Theory of Finite Graphs with a Linear Factor I // Mat.-Fyz. Casopis Slovensk. Akad. Vied. 1959. V. 9. P. 73–91.

[6] *Karp R. M.* A Characterization of the Minimum Cycle Mean in a Digraph // Discrete Mathematics. 1978. V. 23. P. 309–311.

[7] *Barahona F.* Reducing Matching to Polynomial Size Linear Programming // SIAM Journal on Optimization. 1993. V. 3. P. 688–695.

[8] *Карзанов А. В.* О нахождении максимального потока в сетях специального вида и некоторых приложениях // Сб.: Математические вопросы управления производством. Вып. 5. М.: МГУ. 1973. С. 81–94.

*Even S., Tarjan R. E.* Network Flow and Testing Graph Connectivity // SIAM Journal on Computing. 1975. V. 4, № 4. P. 507–518.

[9] *Gabow H. N.* An Efficient Reduction Technique for Degree-Constrained Subgraph and Bidirected Network Flow Problems // Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Theory of

В наших построениях мы опираемся на разработанный ранее Гольдбергом и Карзановым[10] метод блокирующих потоков в кососимметрических сетях. Мы устанавливаем для данного метода оценку сложности $O(mn^{2/3})$, тем самым полностью ликвидируя зазор между стандартным и кососимметрическим вариантами задачи. Ключевую роль играет доказываемое нами утверждение о том, что всякий ациклический целочисленный кососимметрический поток в кососимметрической сети без параллельных дуг имеет носитель размера $O(n\sqrt{v})$, где $v$ — величина потока (аналог этого утверждения для стандартных направленных сетей был получен Каргером и Левиным[11]).

В работе также изучается вопрос построения в стандартной направленной сети разложения многополюсного потока на слагаемые, отвечающие всевозможным парам источников и стоков. Предлагаемый алгоритм имеет оценку сложности $O(m\log(n^2/m))$ (в предположении, что число источников и стоков ограничено константой). Также рассматривается обобщение на случай кососимметрических сетей.

Кроме того, мы рассматриваем целочисленные мультипотоковые задачи в кососимметрических сетях. В общей постановке эти проблемы являются NP-трудными, поэтому мы ограничиваемся классом *внутренне эйлеровых* сетей (то есть таких, в которых для любой внутренней вершины $v$ суммы пропускных способностей дуг, входящих в $v$ и выходящих из $v$, равны). Ранее задача о максимальном мультипотоке изучалась для случая ненаправленных и стандартных направленных сетей в работах Ломоносова[12], а также Ибараки, Карзанова, Нагамочи[13]. Кососимметрический случай является одновременным обобщением как направленного, так и ненаправленного. Мы излагаем алгоритм для нахождения искомого целочисленного кососимметрического мультипотока за время $O(mn\log(n^2/m)\log t)$ (где $t$ обозначает количество терминалов). Эта оценка совпадает со временем работы известного алгоритма для направленного случая и улучшает другую известную оценку $O(mn^2)$ для ненаправленного случая.

Computing. V. 15. 1983. P. 448–456.

[10] *Goldberg A. V., Karzanov A. V.* Maximum Skew-Symmetric Flows and Matchings // Mathematical Programming. 2004. V. 100, № 3. P. 537–568.

[11] *Karger D. R., Levine M. S.* Finding Maximum Flows in Undirected Graphs Seems Easier Than Bipartite Matching // Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: ACM Press, 1998. P. 69–78.

[12] *Lomonosov M. V.* Combinatorial Approaches to Multiflow Problems // Discrete Applied Math. V. 11, № 1. P. 1–94.

[13] *Ibaraki T., Karzanov A. V., Nagamochi H.* A Fast Algorithm for Finding a Maximum Free Multiflow in an Inner Eulerian Network and Some Generalizations // Combinatorica. 1998. V. 18, № 1. P. 61–83.

### Основные методы исследования

В диссертации используются методы теории графов, линейного и целочисленного программирования, методы теории комбинаторной оптимизации и теории сложности.

### Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Основными среди них являются следующие:

1) Предложен алгоритм с оценкой времени $O(\min(mn \log n, n^3))$, находящий в заданном кососимметрическом графе кратчайший регулярный путь между заданной парой вершин.

2) Предложены алгоритмы, находящие целочисленный кососимметрический поток минимальной стоимости за время $O(k \min(m \log n, n^2))$ и $O(\phi(n, m) + \min(mn \log n, n^3))$ (где $k$ обозначает величину искомого потока, а $\phi(n', m')$ — сложность задачи о целочисленной циркуляции минимальной стоимости в стандартной направленной сети с $n'$ вершинами и $m'$ дугами).

3) Предложен алгоритм с линейной оценкой времени, проверяющий заданный кососимметрический граф на регулярную ацикличность.

4) Построен алгоритм с оценкой времени $O(\min(mn^2 \log n, n^4))$, находящий в заданном кососимметрическом графе регулярный цикл минимального среднего веса.

5) Доказано, что в простой кососимметрической сети произвольный ациклический целочисленный кососимметрический поток величины $v$ имеет носитель размера $O(n\sqrt{v})$.

6) Доказано, что в простой кососимметрической сети метод блокирующего потока находит максимальный целочисленный кососимметрический поток за время $O(mn^{2/3})$.

7) Предложен алгоритм, находящий максимальный целочисленный кососимметрический мультипоток в кососимметрической внутренне эйлеровой сети за время $O(mn \log(n^2/m) \log t)$ (где $t$ обозначает количество терминалов).

### Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами в области комбинаторной оптимизации, теории графов и теории сложности.

### Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на Первой Международной конференции «Computer Science in Russia» в Санкт-Петербурге (июнь 2006 г.), а также на Колмогоровском семинаре по сложности вычислений и сложности определений в МГУ им. М. В. Ломоносова (февраль 2005 г., октябрь 2005 г., май 2006 г., октябрь 2006 г.; руководители семинара: Н. К. Верещагин, А. Л. Семёнов, А. Е. Ромащенко и А. Х. Шень).

### Публикации

Основные результаты опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата [1–5].

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 9 глав, списка литературы и предметного указателя. Полный объем диссертации — 114 страниц, список литературы содержит 49 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** дается краткий исторический обзор проблемы, приводятся известные результаты, перечисляются основные результаты диссертации.

**В главе 1** вводятся основные определения, а также формулируется ряд стандартных теорем теории кососимметрических графов.

**В главе 2** приводятся основные приложения теории кососимметрических и двунаправленных графов к теории комбинаторной оптимизации.

**В главе 3** изучаются задачи о разыскании кратчайших регулярных путей в кососимметрических графах, приводится алгоритм с оценкой сложности $O(\min(mn \log n, n^3))$.

**Глава 4** посвящена теории стоимостных целочисленных кососимметрических потоков. Для задачи нахождения целочисленного кососимметрического потока минимальной стоимости приводятся алгоритмы с оценками сложности $O(k\min(m\log n, n^2))$ и $O(\phi(n,m)+\min(mn\log n, n^3))$.

**В главе 5** изучается строение ациклических и регулярно ациклических кососимметрических графов, а также приводится алгоритм с линейной оценкой сложности, предназначенный для проверки регулярной ацикличности.

**В главе 6** рассматривается задача о нахождении в кососимметрической сети регулярного цикла минимального среднего веса. Для ее решения предлагается алгоритм с оценкой сложности $O(\min(mn^2\log n, n^4))$.

**В главе 7** рассматривается задача о нахождении максимального целочисленного кососимметрического потока в простой кососимметрической сети. Доказывается, что метод блокирующего потока решает данную задачу за время $O(mn^{2/3})$. Кроме того, показывается, что носитель целочисленного кососимметрического потока величины $v$ в кососимметрической сети без параллельных дуг имеет размер $O(n\sqrt{v})$.

**В главе 8** рассматривается задача о разложении многополюсного потока на слагаемые, отвечающие всевозможным парам источников и стоков. Для случая стандартных направленных и кососимметрических сетей приводятся алгоритмы, строящие искомое разложение за время $O(m\log(n^2/m))$.

**Глава 9** посвящена мультипотоковым задачам. Для случая внутренне эйлеровой кососимметрической сети приводится алгоритм, решающий задачу о максимальном целочисленном кососимметрическом мультипотоке за время $O(mn\log(n^2/m)\log t)$.

## Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 03-01-00475, 05-01-02803, 06-01-00122 и НШ 358.2003.1.

Автор выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, главному научному сотруднику Александру Викторовичу Карзанову за постановку задач, подробные обсуждения и множество полезных идей. Автор благодарен научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Николаю Константиновичу Верещагину за постоянное внимание к работе.

Автор признателен профессору Владимиру Андреевичу Успенскому, профессору Мати Рейновичу Пентусу, а также кандидату физико-математических наук Александру Шеню за конструктивные предложения, высказанные ими во время докладов автора на семинарах кафедры математической логики и теории алгоритмов.

## Публикации автора по теме диссертации

[1] *Бабенко М. А.* Быстрый алгоритм построения декомпозиции многополюсных потоков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2006. № 2. С. 53–55.

[2] *Бабенко М. А.* О потоках в простых двунаправленных и кососимметрических сетях // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42. № 4. С. 104–120.

[3] *Бабенко М. А.* О потоковых задачах в кососимметрических и двунаправленных сетях // М.: МГУ. 2007. Деп. в ВИНИТИ 26.01.2007 № 71-В2007. 96 с.

[4] *Бабенко М. А.* Об одном приложении теории ациклических кососимметрических графов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2007. № 2. С. 65–66.

[5] *Babenko M. A.* Acyclic Bidirected and Skew-Symmetric Graphs: Algorithms and Structure // Lecture Notes in Computer Science. 2006. V. 3967. P. 23–34.