Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.9

Космодемьянский Дмитрий Александрович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АКУСТИКИ ПОРИСТЫХ СРЕД

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2007

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Задачам, связанным с построением так называемых "эффективных" или "усредненных" характеристик сильнонеоднородных сред, посвящено очень большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов. Среди множества рассматриваемых моделей неоднородных сред можно выделить модели так называемых "комбинированных сред" , представляющих собой смесь из двух фаз с различными механическими свойствами, так, например, каркас из упругого материала и сжимаемая (или несжимаемая) вязкая жидкость. Для построения "эффективных" или "усредненных" моделей часто используется предположение о периодичности структуры включений материала одной фазы в другую. Под усредненными моделями понимаются такие краевые задачи для уравнений или систем с постоянными (или относительно медленно меняющимися) "эффективными" характеристиками, что решения краевых задач для исходных двухфазных моделей сходятся (в некотором смысле) к решению соответствующих уравнений для "усредненной" модели, когда период ε рассматриваемой периодической структуры стремится к нулю. При этом в ряде случаев сходимости в классическом смысле (например, в пространстве L_2) может и не быть. Для упомянутой выше задачи о среде "упругий каркас - сжимаемая жидкость" сходимость решений будет сильной только на "упругой" фазе; на "жидкой" фазе сходимости в классическом смысле не будет[1]. Чтобы определить более точно характер поведения допредельных сред на "жидкой фазе" и установить связь допредельных решений с решением соответствующей задачи для усредненной модели, Г. Нгуэтсенгом[2] было введено понятие "двухмасштабной сходимости" . Это понятие является развитием понятия слабой сходимости. Его отличительной особенностью является то, что двухмасштабный предел

[1] R. P. Gilbert, A. Mikelić,"Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I", // Nonlinear Analysis, 40, pp. 185-212, 2000

[2] G. Nguetseng,"Asymtotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics",//SIAM J. Math. Anal. Vol. 21, No. 6, pp. 1396-1414, 1990

последовательности функций есть функция от двух групп переменных: от переменных, меняющихся внутри области, и переменных, меняющихся внутри ячейки периодичности. Такая функция содержит существенно больше информации о поведении допредельной последовательности решений, чем слабый предел; а именно - она говорит о том, как именно "осциллирует" последовательность, а не только каково среднее значение, вокруг которого она "осциллирует".

Другой важной особенностью "усредненной" модели для упомянутой выше среды "упругий каркас - сжимаемая жидкость" является то обстоятельство, что она не описывается системой дифференциальных уравнений. Искомой "усредненной" модели соответствует интегро-дифференциальная система уравнений, содержащая слагаемые вида свертки неизвестной функции с экспоненциально затухающим ядром свертки, зависящим только от временной переменной. Другой способ описания "усредненной" модели[3] состоит в выводе системы уравнений для двухмасштабного предела исходной последовательности решений, то есть некоторой системы уравнений на функции от "удвоенного" количества независимых переменных.

Этот способ получил широкое распространение в последнее время. Однако в ряде случаев представляется более целесообразным в прикладных целях выразить усредненную модель через интегро-дифференциальную систему уравнений для функций от исходного (а не "удвоенного") числа независимых переменных. Кроме того, также представляется целесообразным сформулировать теорему о сходимости решений без использования понятия двухмасштабной сходимости, пользуясь только классическими терминами. При этом, в случае отсутствия сильной сходимости утверждение о сходимости должно быть сформулировано не в терминах слабой сходимости и не в терминах двухмасштабной сходимости, а как утверждение о стремлении к нулю нормы $\|u_\varepsilon(x,t) - u(x, x/\varepsilon, t)\|_{L_2(\Omega)}$, где $u_\varepsilon(x,t)$ - последовательность решений допредельных задач для исходной двухфазной среды, ε -

[3] В. В. Жиков, "Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости"//Математический сборник, Т. 191, №7, с. 31-72, 2000

величина периода, $u(x,y,t)$ - функция, которую можно представить явно из решения некоторых вспомагательных краевых задач на ячейке периодичности и через решение интегро-дифференциальной системы для "усредненной" модели, Ω – область, занятая двухфазной средой.

Упомянутые особенности задач для "комбинированных сред" характерны не только для сред, составленных из фаз с существенно различными механическими свойствами, с различной "реологией". Они также имеют место и для сред, составленных из однотипных по "реологическим" свойствам материалов, но с механическими параметрами, существенно различными по величине. Так, ранее рядом авторов была детально исследована так называемая задача о двойной пористости – о распространении (диффузии) жидкости в материале, составленном из двух фаз: хорошо проводящей жидкость и плохо проводящей жидкость. При этом предполагается, что коэффициенты проводимости соотносятся как 1 и ε^2, где ε – размер периода структуры. В этой задаче также налицо упомянутые выше особенности усредненных моделей и утверждений о сходимости последовательности решений исходных задач к решению усредненной задачи. Интересный пример представляет задача о распространении звуковых волн в суспензии (микстуре) из двух сжимаемых слабовязких жидкостей, когда при стремлении ε (периода структуры) к нулю, вязкость обеих жидкостей "вырождается" как ε^2. В этом случае усредненная модель описывается так называемым "динамическим законом Дарси[4]". Это – система уравнений, которую можно свести к волновому уравнению на усредненное давление с интегро-дифференциальным слагаемым типа свертки по временной переменной вторых производных функции давления с некоторым ядром, представляющим собой сумму экспонент. Там же изучена сходимость решений исходной системы к решению усредненной системы и даны соответствующие теоремы о сходимости в терминах слабой сходимости. (Сильной сходимости смещений жидкостей и их скоростей тут не будет ни в одной из фаз; давление же будет сходиться сильно на обеих фазах, то есть в совокупной области).

[4] Э. Санчес-Паленсия, "Неоднородные среды и теория колебаний", //Москва, "Мир", 1984, 472с

В. В. Жиковым[5] показано, что спектр предельной задачи для проблемы двойной пористости, о которой упомянуто выше, представляет собой счетное число "серий", сходящихся к концам интервалов на вещественной оси, в которых точек спектра точно не может быть; они называются "лакунами". При этом, как границы лакун, так и точки спектра из различных серий являются нулями или полюсами некоторых мероморфных функций, которые могут быть представлены явно. Естественно, в таком случае возникает вопрос – сохранится ли подобная картина для "динамического закона Дарси" и "закона Био" (то есть закона, описывающего распространение звуковых волн в среде "упругий каркас - вязкая жидкость").

Цель работы.

Целью работы является строгий вывод предельных уравнений в случае системы Био, доказательство сильной двухмасштабной сходимости допредельных функций к решению усредненной задачи, а также исследование спектров предельных ("усредненных") моделей для упомянутых выше случаев.

Основные методы исследования.

В работе используются методы теории усреднения и ряд новейших результатов этой теории. В первую очередь, это теория двухмасштабной сходимости. В частности, большое значение имеют теоремы о связи сильной и слабой двухмасштабных сходимостей и сильной двухмасштабной сходимости и классической сходимости по норме L_2. При исследовании спектральных вопросов, делается существенное упрощение в рассматриваемых задачах, а именно - изучается спектр только одномерных движений, то есть спектр "стоячих волн" в "усредненной" среде, бегущих от одного края "стенки" к другому в перпендикулярном "стенке" направлении со скоростями и смещениями тоже только в перпендикулярном "стенке" направлении. Подобное упрощение дает качественную картину прохождения звуковых волн в подобных средах. В работе также использованы методы комплексного анализа при ана-

[5] В. В. Жиков, "Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости"//Математический сборник, Т. 191, №7, с. 31-72, 2000

лизе свойств нулей и полюсов мероморфных функций, зависящих от малого параметра. Широко применяется теория пространств Соболева в переменных пространствах, используются новейшие достижения в области спектральной теории усреднения. Для выявления структуры спектров рассматриваемых задач первоначально применялись численные методы. Далее полученную качественную структуру спектров удалось строго обосновать. При моделировании задач для ЭВМ использовались научные результаты, основанные на физических опытах, проводившихся в ведущих НИИ как в нашей стране, так и зарубежом.

Научная новизна.

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Строго выведена усредненная система (в интегро-дифференциальной форме) для материала "упругое вещество – вязкая сжимаемая жидкость".

2. Получено доказательство в терминах L_2–сходимости о близости решений допредельных задач к решению усредненной.

3. Проведен анализ спектральных вопросов для нескольких предельных (усредненных) задач в пористых средах. Получены точные формулы для собственных частот и декрементов одномерных собственных колебаний в упругих средах.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический и практический характер. Полученные результаты могут быть использованы в различных задачах акустики пористых сред. Возможно, качественная картина спектров будет аналогична рассмотренным в этой работе случаям спектров одномерных движений. Вероятно также, что может быть построена адекватная данным задачам абстрактная операторная схема. Полученные результаты могут быть использованы в разрешении вопросов о сходимости как множеств спектров для допредельных моделей к спектрам, отвечающим "эффективным" или "усредненным" моделям. Настоящая работа дает основания утвержать о возможности сравнения теории эффективных сред типа Био с экспериментальными данными о колебании ограниченных объемов.

Апробация диссертации.

Изложенные в диссертации результаты неоднократно докладывались на заседаниях кафедры дифференциальных уравнений в 2005 и 2006 годах, на международных конференциях "Nonlinear Partial Differential Equations", (Алушта, 17 – 23.09.2005) и "Differential and Functional Differential Equations", (Москва, 14 – 21.08.2005), на семинаре "Динамика управляемых систем"ИПМ РАН (2005 год, руководитель – академик РАН Ф. Л. Черноусько), на семинаре "Избранные задачи механики сплошной среды"ИМП РАН (2006 год, руководители: д.ф.-м. н. Л. Д. Акуленко , д.ф.-м. н. С. В. Нестеров), на семинаре "Асимптотические методы в математической физике"(2005, 2006 год, руководители: проф. В. В. Жиков, проф. А. С. Шамаев, проф. Т. А. Шапошникова), на Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика А. Н. Тихонова (Москва, 19 – 25.06 2006), а также на Международной конференции по динамическим системам (Суздаль, июль 2006).

Публикации.

Основные результаты опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата, см. [1-5].

Структура и объем работы.

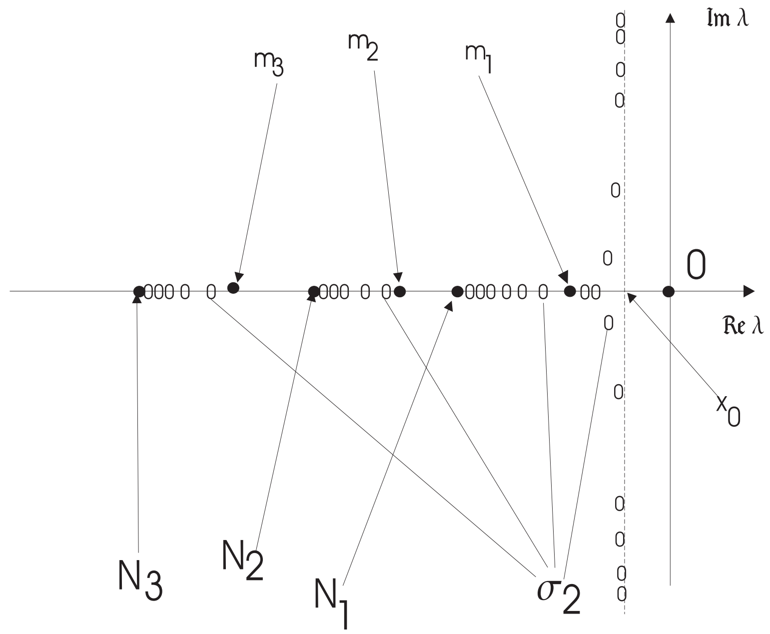
Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на параграфы, заключения, иллюстраций и списка литературы. Полный объем диссертации – 88 страниц, библиография включает 55 наименований, иллюстрации находятся на 10 листах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В главе 1 приводится задача "двойной пористости", сообщаются результаты усреднения в этой задаче, а также проведен анализ спектров предельной задачи для случая "одномерных" движений.

В главе 2 приводится задача о фильтрации жидкости в пористой среде. Более полный анализ этой задачи и доказательство теоремы 3 можно найти в монографии А. Л. Пятницкого, Г. А. Чечкина, А. С. Шамаева[6].

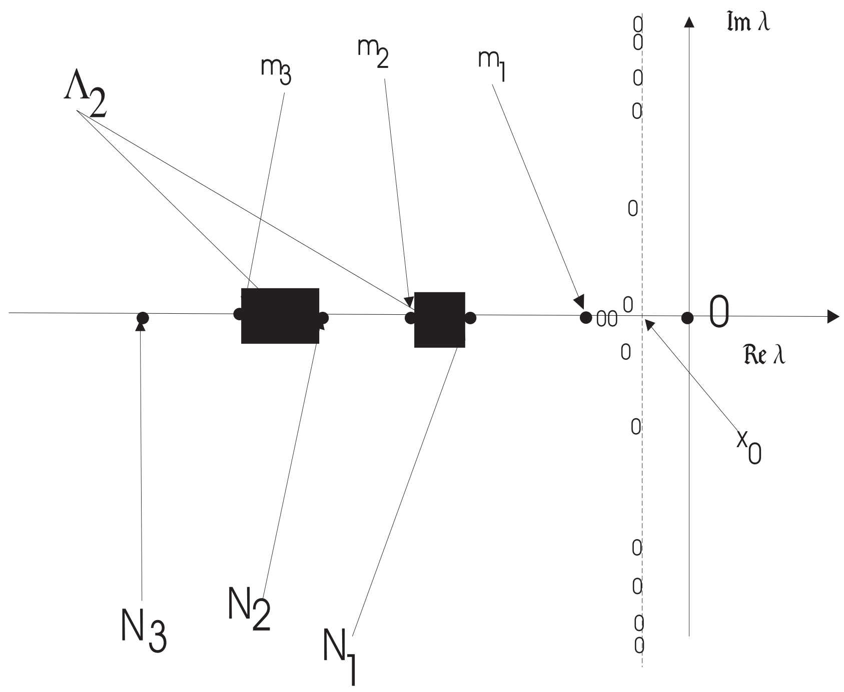
В главе 3 рассматривается задача о колебаниях "микстуры" (суспензии) двух вязких сжимаемых жидкостей в замкнутом сосуде. Здесь при анализе спектра упрощенной предельной задачи выявляется основная особенность поведения предельного спектра. В отличие от задачи "двойной пористости", спектр предельного оператора не будет вещественным, а, напротив, будет содержать две серии комплексно сопряженных точек, действительные части которых накапливаются к некоторой точке, а мнимые – стремятся к бесконечности (см. фиг. 1).



Фиг. 1.

Кроме того, возникают так называемые спектральные лакуны (spectral gaps), характерные для некоторых задач квантовой механики. Вышеуказанные результаты отражены в Теоремах 4–5 (см. фиг. 2).

[6]А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, Усреднение. Методы и некоторые приложения. – Новосибирск, 2006 (в печати)



Фиг. 2.

На фиг. 1 и фиг. 2: N_i – нули некоторой мероморфной функции, m_i – ее полюса, σ_2 – спектр предельной задачи, x_0 – точка "накопления" действительных частей комплексных серий спектра, Λ_2 – "спектральные лакуны".

В главе 4 рассмотрен так называемый "Закон Био" , то есть закон, описывающий распространение звуковых волн в среде "упругий каркас - вязкая жидкость". Приводится историческая справка, постановка задачи по Г. Нгуетсенгу[7], приведены предельные теоремы, необходимые для доказательства двухмасштабной сходимости. Указано, что структура предельной задачи установлена в работах Я. Френкеля[8] и М. Био[9]), которые, однако, не содержат строгих доказательств. Строгое доказательство двухмасштабной сходимости решений допредель-

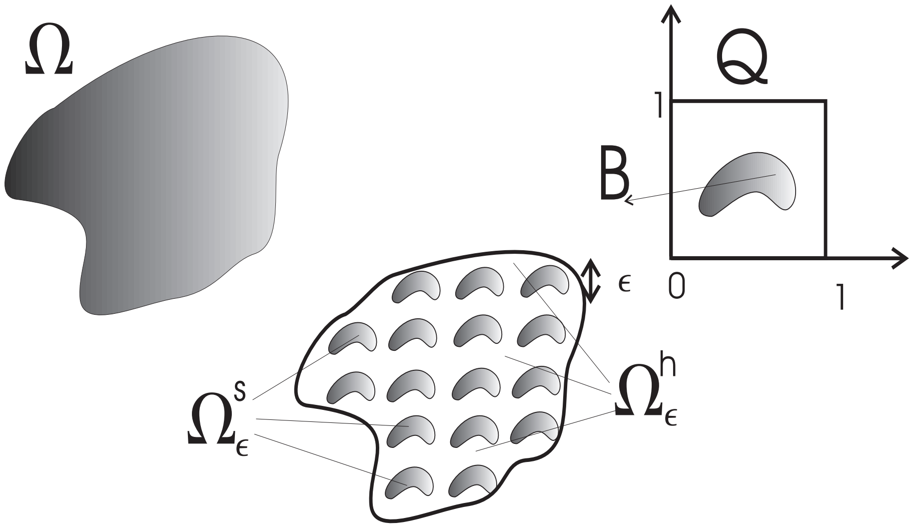
[7]G. Nguetseng,"Asymtotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics",//SIAM J. Math. Anal. Vol. 21, No. 6, pp. 1396-1414, 1990

[8]J. Frenkel, On the Theory of Seismic and Seismoelectric Phenomena in Moist Soils // J. Phys. U.S.S.R. – V. 8, – 230 – 1944

[9]M.A. Biot, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media", // J. Appl. Phys., 33, pp. 1482-1498, 1962

ной системы уравнений к решениям усредненной задачи проведено в параграфах 4–7 главы 4.

Пусть (см. фиг. 3) B – периодическое с периодом 1 открытое множество в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ,Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ так же с гладкой границей, $\Omega^s_\varepsilon = \Omega \bigcap \varepsilon B$, $\Omega^h_\varepsilon = \Omega \backslash \varepsilon \bar{B}$. Вводится также обозначение $Q =]0,1[\times]0,1[\times]0,1[$ – единичный куб в $\mathbb{R}^3$:



Фиг. 3.

Усредненная задача формулируется следующим образом:

Найти пару функций $(\vec{u}(x,t),\, p(x,t))$,
$\vec{u}(x,t) = \big(u^1(x,t), u^2(x,t), u^3(x,t)\big)$, *что*

$$\tilde{\rho}\ddot{u}^k + \rho^s \dot{\mathcal{D}}_{ik}(t) * (f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)) +$$
$$+ \rho^s \mathcal{D}_{ik}(0)(f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkl}\frac{\partial u^i}{\partial x_l} - \alpha_{jk} p(x,t)) + f^k(x,t) \text{ в } \Omega,$$

$$(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta) p(x,t) + div_x((\int\limits_0^t \mathcal{D}_{ik}(\tau) d\tau) * (f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) -$$
$$- \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t))) + \alpha_{ij} E_{ij}(\vec{u}(x,t)) = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{u}(x,0) = \dot{\vec{u}}(x,0) = 0 \text{ в } \Omega.$$

Здесь $(f * g)(t) \equiv \int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ – обозначение для свертки функций f и g, а $D(t)$ – матричная (3×3) функция, коэффициенты которой - гладкие функции переменной t:

$$(\mathcal{D}(t))_{ij} = \int\limits_Q (\vec{d}_i)_j(y,t)dy,$$

а $\vec{d}_i$ определяются из задачи на ячейке периодичности $(i = 1,2,3)$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\psi^i(y) + \rho^s \dfrac{\partial \vec{d}_i}{\partial t}(y) - \mu\Delta_{yy}\vec{d}_i(y) = 0, & y \in Q \cap B, \\ div_y\, \vec{d}_i = 0, & y \in Q \cap B \\ \vec{d}_i|_{\partial Q \cap B} = 0, \quad \vec{d}_i|_{t=0} = \vec{e}_i, \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\vec{e}_i$, $(i = 1,2,3)$ – единичные орты.

Решение (1) существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной для давления, α_{ij}, β, β_{ij}, Π, q_{ijkl}, а также $\tilde{\rho}$ и ρ^s суть константы, определяемые физическими характеристиками среды.

В параграфах 8–9 приведено спектральное исследование упрощенной предельной задачи. Обнаружена аналогия в качественном поведении спектров рассматриваемой задачи с поведением спектров задачи о колебании суспензии двух вязких сжимаемых жидкостей в замкнутом сосуде (глава 3).

В действительности, при моделировании задачи на компьютере (пакет Mathematica 4.2) при помощи численных методов была получена качественная картина спектров предельной задачи. Спектр состоял не только из серий действительных значений, накапливающихся к некоторым точкам. Также спектр предельной задачи содержал серию комплексно-сопряженных собственных чисел, действительные части которых накапливались у фиксированной точки, а мнимые части по модулю стремились к бесконечности. Здесь картина полностью соответствует фиг. 1 для "микстуры"(суспензии двух жидкостей).

Это утверждение удалось строго доказать, используя методы теории функций комплексного переменного, в том числе анализ нулей и полюсов мероморфных функций, разложение по малому параметру в окрестностях особых точек.

Кроме того, возникают, как и в задаче о колебании суспензии двух вязких несжимаемых жидкостей, так называемые спектральные лакуны (spectral gaps) – интервалы числовой оси, в которые не попадает ни одно собственное значение, характерные для некоторых задач квантовой механики. Здесь картина так же соответствует фиг. 2 для "микстуры"(суспензии двух жидкостей).

Указанные выше результаты сведены в Теоремы 11–12.

В главе 5 доказана основная
Теорема 14.

Имеют место следующие сходимости (определение областей см. на фиг. 3):

$$\chi\left(\Omega_\varepsilon^s\right)\hat{p}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \Pi\hat{p}(x),$$
$$\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \vec{\hat{u}}(x) + \vec{\hat{w}}(x,y),$$
$$\varepsilon\,\nabla_x\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla_y\vec{\hat{w}}(x,y),$$
$$\chi\left(\Omega_\varepsilon^h\right)\left(\nabla_x\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x)\right) \xrightarrow{2} \chi\left(\Omega\cap Q\backslash B\right)\left(\nabla_x\vec{\hat{u}}(x) + \nabla_y\vec{\hat{u}}_1(x,y)\right),$$

где знак $\xrightarrow{2}$ обозначает сильную двухмасштабную сходимость, $\chi(A)$ – характеристическая функция множества A, $p(x,t)$ – предельное давление, $\vec{u}(x,t)$ – предельное смещение каркаса, $\vec{u}_1(x,y)$, $\vec{w}(x,y)$ – функции, выражения для которых приводятся в явном виде, Π – физический коэффициент пористости среды, $\hat{v}(x)$ – преобразование Лапласа по t от функции $v(x,t)$ (параметр Лапласа λ для простоты опускается).

Замечание.
В силу результатов, приведенных и доказанных в работе В. В. Жикова[10], Теорема 14 может быть сформулирована в терминах классиче-

[10] В. В. Жиков, "Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости"//Математический сборник, Т. 191, №7, с. 31-72, 2000

ской L_2-сходимости следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|p_\varepsilon(x,t)-p(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s\times(0;+\infty))}=0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{u}_\varepsilon(x,t)-\vec{u}(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h\times(0;+\infty))}=0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla_x\vec{u}_\varepsilon(x,t)-\nabla_x\vec{u}(x,t)-\nabla_y\vec{u}_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h\times(0;+\infty))}=0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{u}_\varepsilon(x,t)-\vec{u}(x,t)-\vec{w}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s\times(0;+\infty))}=0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\nabla_x\vec{u}_\varepsilon(x,t)-\nabla_x\vec{u}(x,t)-\nabla_x\vec{w}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s\times(0;+\infty))}=0,
\end{aligned}
$$

В заключении кратко сформулированы результаты, а также приведен список возможных направлений применения результатов работы.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук А. С. Шамаеву за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения и доценту, кандидату физико-математических наук А. А. Космодемьянскому за поддержку в трудные минуты.

Автор также выражает искреннюю благодарность всему коллективу Механико-математического факультета МГУ за бесценные знания, преподанные на факультете.

Список работ автора по теме диссертации

1. Космодемьянский Д. А. "Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред"// Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2007, №2 , с.17–21.

2. Космодемьянский Д. А., Шамаев А. С. "О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью"// "Современная математика. Фундаментальные направления" – Т. 17 – Москва – с.88–109 – 2006

В работе спектральные вопросы исследованы Д. А. Космодемьянским, задача о сходимости была поставлена и разработана А. С. Шамаевым, нахождение эффективной модели и доказательство сильной двухмасштабной сходимости проведено Д. А. Космодемьянским.

3. Космодемьянский Д. А."Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред"// "Nonlinear boundary-value problems" – Т. 16 – Донецк – с. 132-155 – 2006

4. Kosmodemiyanskiy D. "Acoustics in porous media"// "Intl conf NPDE, Book of abstracts" – с. 117-118 – Донецк, 2005

5. Космодемьянский Д. А.,Шамаев А. С. "О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью", // "Abstracts of DFDE-2005" – Москва – с.10-11 – 2005

В работе спектральные вопросы исследованы Д. А. Космодемьянским, задача о сходимости была поставлена и разработана А. С. Шамаевым, нахождение эффективной модели и доказательство сильной двухмасштабной сходимости проведено Д. А. Космодемьянским.