Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 517.938.5+514.762

**Морозов Павел Валерьевич**

# Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | академик РАН, профессор<br>А. Т. Фоменко |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор А. С. Мищенко<br>кандидат физико-математических наук,<br>Д. Б. Зотьев |
| Ведущая организация: | Математический Институт<br>им. В. А. Стеклова РАН (МИАН) |

Защита диссертации состоится 6 апреля 2007 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 6 марта 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Диссертация посвящена вычислению глобальных топологических инвариантов слоений Лиувилля для известных случаев интегрируемости механики твердого тела. В работе находят активное практическое применение ранее предложенные методы вычисления инвариантов (метод круговых молекул [1,2] и формула Топалова [3]), а также демонстрируются новые подходы и технические приемы.

Механика твердого тела ведет свою историю с 1765 года, когда Л. Эйлером [4] была поставлена и решена задача о движении тела, закрепленного в центре масс в поле тяжести. Выдающиеся математики разных эпох, в их числе Лагранж, Кирхгоф, С. В. Ковалевская, Н. Е. Жуковский, А. М. Ляпунов, С. А. Чаплыгин, Л. Н. Сретенский и другие, внесли в ее развитие свой вклад. По сегодняшний день механика твердого тела остается одной из динамически развивающихся классических областей физико-математической науки.

В наши дни в механике твердого тела можно выделить четыре основных направления исследований:

1. Поиск новых случаев интегрируемости, в том числе с привлечением компьютерных методов, получение полного списка интегрируемых систем (Х. М. Яхья [5,6], Соколов [7,8], Т. Вольф, О. В. Ефимовская [9], А. В. Борисов, И. С. Мамаев [10] и др.)

2. Изучение интегрируемых систем с привлечением алгебраических методов, исследование свойств представлений в форме Лак-

[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. — Изд-во УдГУ, 1999

[2] Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. — Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42

[3] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. — Матем. сборник, 1996, т. 187, N 3, с. 143-160

[4] Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. — Memoires de l'academie des sciences de Berlin, 1765, v. 14, pp. 154-193

[5] Yehia H.M. New integrable cases in dynamics of rigid bodies. — Mech. Res. Com., 1986, Vol. 13(3), pp. 169-172

[6] Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата. — Вестник МГУ, сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88-90

[7] Соколов В.В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа. — Теоретическая и математическая физика, 2001, т. 129, N 1, с. 31-37

[8] Соколов В.В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ Доклады РАН, сер. матем., 2004, Том 394, N 5

[9] Wolf T., Efimovskaya O.V. Classification of Integrable Quadratic Hamiltonians on $e(3)$. — Regular and Chaotic Dynamics, 2003, v. 8, N 2, pp. 1-7

[10] Борисов А.В., Мамаев И.С. Обобщение случая Горячева-Чаплыгина. — Regular and Chaotic Dynamics, 2002, v. 7, N 1, pp. 1-10

са и спектральных кривых М. Оден [11], Ю. А. Браилов [12], А. В. Борисов, И. С. Мамаев [10], В. В. Соколов, А. В. Цыганов [13] и др.)

3. Исследование топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификация особенностей, построение бифуркационных диаграмм и определение типов бифуркаций, вычисление локальных и глобальных инвариантов слоений Лиувилля, траекторных инвариантов (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [14], А. В. Болсинов [15], А. А. Ошемков [16,17], В. С. Матвеев [18], М. П. Харламов [19], П. Топалов [3], О. Е. Орел [20], П. Е. Рябов [21,22,23,24] и др.)

4. Изучение и компьютерное моделирование систем близких к интегрируемым, КАМ–теория (В. В. Козлов [25,26], А. В. Борисов, К. В. Емельянов [27], А. И. Кирьянов [28] и др.)

---

[11]М. Оден Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. — Ижевск, Изд-во УдГУ, 1999

[12]Браилов Ю.А. Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли — Матем. сборник, 2003, т. 194, N 11, с. 3-16

[13]Соколов В.В., Цыганов А.В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева-Чаплыгина. — Теоретическая и математическая физика, 2002, т. 131, N 1, с. 118-125

[14]Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1990, т. 54, с. 546-575

[15]Болсинов А.В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. — Матем. сборник, 1995, т. 186, N 1, с. 3-28

[16]Ошемков А.А. Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. — Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1988, вып. 23, с. 122-132

[17]Ошемков А.А. Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. — Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1993, вып. 25, часть 2, с. 23-110

[18]Матвеев В.С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа седло-седло и фокус-фокус — Матем. сборник, 1996, т. 187, N 4, с. 29-58

[19]Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988

[20]Орел О.Е. Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина. — Матем. сборник, 1995, т. 186, N 2, с. 105-128

[21]Харламов М.П., Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи. — Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т.2, №2

[22]Orel O.E., Ryabov P.E. Bifurcation Sets in a Problem on Motion of a Rigid Body in Fluid and in the Generalization of This Problem — Regular and Chaotic Dynamics, 1998, v. 3, N 1, pp. 82-91

[23]Ryabov P.E. Bifurcation Sets in an Integrable Problem on Motion of a Rigid Body in Fluid — Regular and Chaotic Dynamics, 1999, v. 4, N 4, pp. 59-76

[24]Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова. — Теоретическая и математическая физика, 2003, т. 134, N 2, с. 207-226

[25]Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М. Наука, 1978

[26]Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск, изд-во УдГУ, 1995

[27]Борисов А.В., Емельянов К.В. Неинтегрируемость и стохастичность в динамике твердого тела. — Ижевск, Изд-во УдГУ, 1995

[28]Борисов А.В., Кирьянов А.И. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа. — Математиче-

Данная диссертационная работа принадлежит к третьему направлению: она посвящена развитию техники вычисления глобальных инвариантов лиувиллевых слоений — инвариантов Фоменко-Цишанга [1,14] — и ее практическому применению для нахождения полного списка инвариантов ряда известных случаев интегрируемости. Инвариант Фоменко-Цишанга также называют меченой молекулой или тонким лиувиллевым инвариантом.

Вычисление инвариантов слоений в простейших случаях Эйлера и Лагранжа проводится прямыми методами [1], однако для более сложных систем потребовалось создание специальной техники. В работе [2] А. Т. Фоменко, А. В. Болсинов, П. Рихтер предложили метод круговых молекул и успешно применили его для вычисления инвариантов волчка Ковалевской. Ранее П. Топалов [3] нашел формулу, устанавливающую связь между топологией несущего трехмерного многообразия и инвариантом Фоменко-Цишанга, что позволило ему полностью вычислить меченые молекулы для случая Жуковского.

В настоящей диссертации показано, как комбинация этих двух подходов, с привлечением некоторых дополнительных соображений и технических приемов, позволяет вычислить полный список инвариантов Фоменко-Цишанга в случаях интегрируемости Клебша [29], Стеклова [30], Соколова [7], а также Ковалевской-Яхьи [5,6] при нулевом интеграле площадей.

**Цель работы.** Вычисление полного списка инвариантов Фоменко-Цишанга и круговых молекул особенностей, классификация невырожденных положений равновесия для интегрируемых систем Клебша, Стеклова, Соколова и Ковалевской-Яхьи (при нулевом интеграле площадей). Практическое применение и обогащение техники вычисления глобальных лиувиллевых инвариантов.

**Методика исследования.** В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. При проверке невырожденности положений равновесия используются методы линейной алгебры и классической дифференциальной геометрии с привлечением компьютерных пакетов символьных вычислений.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

ские методы в механике. М., МГУ, 1990, с.13-18

[29] Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — Math. Ann., Leipzig, 1871, N3, S. 238-262

[30] Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893

1. Вычислены все инварианты Фоменко-Цишанга случаев интегрируемости Клебша, Стеклова, Соколова, а также Ковалевской-Яхьи при нулевом интеграле площадей.

2. Вычислены все круговые молекулы вышеперечисленных интегрируемых систем.

3. Получено доказательство невырожденности и дана классификация точек положения равновесия систем.

4. Получено топологическое доказательство изоморфности слоений Лиувилля систем Эйлера, Клебша и Стеклова для ряда значений параметров.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем, при изучении возмущений исследованных систем, в том числе неинтегрируемых. Полное описание круговых молекул может быть полезно при составлении списка наиболее типичных особенностей слоений в интегрируемых задачах механики и физики. Подробно описанная и продемонстрированная на конкретных примерах техника вычислений глобальных топологических инвариантов может быть применена при классификации слоений других случаев интегрируемости.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации докладывались на международных конференциях: "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Киев, 2003), Международный семинар имени Лобачевского "Современная геометрия и теория физических полей" (Казань, 2002). Результаты также докладывались на конференции "Александровские чтения" (Москва, 2006), на заседаниях Воронежской зимней математической школы им С. В. Крейна (Воронеж, 2002), на геометрическом семинаре проф. Книппера (Бохумский университет, Германия, 2003), на семинаре "Динамические системы" под руководством проф. А. М. Степина (мех-мат МГУ, 2001), на семинаре "Некоммутативная геометрия и топология" под руководством проф. А. С. Мищенко (мех-мат МГУ, 2006), а также многократно на семинаре "Современные геометрические методы" под руководством академика РАН, проф. А. Т. Фоменко и проф. А. С. Мищенко (мех-мат МГУ).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах [1-4], список которых приведен в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 146 страницах и дополняется 10 таблицами и 19 рисунками. Список литературы содержит 46 наименований.

## Краткое содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной механике твердого тела.

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые утверждения теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем [1,14]. Также описаны фазовое пространство и дифференциальные уравнения на алгебре Ли $e(3)^*$, которые возникают в задаче о движении твердого тела; перечислены основные известные на сегодняшний день случаи интегрируемости и достижения в области их топологической классификации.

**Определение.** *Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение фазового многообразия $M^{2n}$ системы на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \ldots, f_n$.*

**Определение.** *Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M, v)$ и $(M', v')$ называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\Phi : M \to M'$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.*

Будем рассматривать гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть такие, у которых фазовое симплектическое многообразие $M$ имеет размерность 4, а интегрируемость гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом $H$ дополнительного интеграла $F$. Всякий случай интегрируемости в механике твердого тела задает однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем $(M^4_g \subset e(3)^*, v_g)$ с двумя степенями свободы. В качестве параметра здесь выступает значение интеграла площадей $g$.

Изоэнергетической поверхностью называется поверхность уровня гамильтониана $Q^3_h = \{H(x) = h\}$. Полным инвариантом слоения Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности является инвариант Фоменко-Цишанга, также называемый меченой молекулой или тонким лиувиллевым инвариантом. Он представляет из себя граф, ребра которого соответствуют однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — критическим слоям, в которых происходят бифуркации.

**Определение.** *Класс лиувиллевой эквивалентности замыкания инвариантной окрестности особого слоя называется 3-атомом.*

Оказывается, в подавляющем большинстве систем разнообразие бифуркаций ограничивается четырьмя наиболее распространенными 3-атомами, которые обозначают $A$, $A^*$, $B$ и $C_2$.

Обозначения 3-атомов помещают в вершины графа. Способ склейки глобального изоэнергетического многообразия $Q^3_h$ из этих "универсальных кирпичей" задается числовыми метками трех типов: $r$, $\varepsilon$ и $n$. Вместе с описанным графом они и составляют инвариант Фоменко-Цишанга.

Последующие главы посвящены вычислению тонких инвариантов слоений для различных случаев интегрируемости и изложены в порядке возрастания сложности задачи лиувиллевой классификации конкретной системы.

Во **второй главе** получена лиувиллева классификация интегрируемого случая Стеклова [7]. Отталкиваясь от общего утверждения Н. Т. Зунга [31], доказано важное с практической точки зрения

**Предложение.** *На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, метки $r$ равны $\infty$. На ребрах, соединяющих атом $A$ с седловым, метки $r$ конечны. В обоих случаях метки $\varepsilon$ равны $+1$.*

Вырожденные одномерные орбиты вместе с точками положения равновесия представляют из себя два главных класса особенностей интегрируемых систем на $M^4$. С применением приведенного утверждения метод круговых молекул позволяет провести глобальный анализ системы Стеклова до конца. В этом случае интегрируемости основную техническую сложность составляет проверка невырожденности положений равновесия системы, что связано с большим количеством параметров и сложными явными формулами интегралов. Крайне полезным здесь оказалось привлечения компьютера для проведения промежуточных выкладок.

**Третья глава** посвящена лиувиллевой классификации системы Клебша [29]. В этом случае наблюдается обратная ситуация: аналитическая часть задачи проста, однако топологический анализ требует

[31] Nguyen Tien Zung. A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems. — Commentarii Mathematici Helvetici, 2000, N 75 pp. 271-283

крайней скрупулезности. Метод круговых молекул не дает окончательного ответа, и только неоднократное применение в определенной последовательности формулы Топалова позволяет разрешить ключевые неопределенности. После этого остается вычислить ряд $\varepsilon$-меток, что достигается рассмотрением случая Клебша как возмущения случая Эйлера в классе интегрируемых систем.

Следствием второй и третьей глав является топологическое доказательство двух естественных изоморфизмов.

**Теорема**

1. *При достаточно больших значениях энергии системы Стеклова и Клебша лиувиллево эквивалентны случаю Эйлера.*
2. *При достаточно больших абсолютных значениях интеграла площадей системы Стеклова и Клебша лиувиллево эквивалентны случаю Эйлера как системы на четырехмерном симплектическом многообразии.*

В **четвертой главе** получена классификация слоений для случая Соколова [7], который был открыт в 2001 году с применением компьютерных методов. При этом вновь применяется комбинация метода круговых молекул и формулы Топалова. Основную техническую сложность составляет проверка невырожденности точек положения равновесия системы, что связано с четвертой степенью и сложной явной формулой для интеграла $F$.

Наконец, в **пятой главе** дана лиувиллева классификация случая Ковалевской-Яхьи [5,6]. Данный случай отличается тем, что представляет из себя не одно-, а двухпараметрическое семейство $(M_g^4 \subset e(3)^*, v_{g,\lambda})$ интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Здесь гамильтониан $H$ имеет в качестве параметра гиростатический момент $\lambda$, также существенно влияющий на геометрию слоения. Классический случай Ковалевской является однопараметрическим подсемейством, соответствующим случаю $\lambda = 0$, и полностью исследован в работе [2]. Мы же в пятой главе изучили другое естественное однопараметрическое подсемейство, соответствующее нулевому значению интеграла площадей $g = 0$. Результаты этих двух исследований должны сильно облегчить задачу лиувиллевой классификации "смешанных" случаев.

С точки зрения лиувиллевой классификации наибольший интерес в пятой главе представляет метод построения допустимых систем координат бифуркаций в окрестности вырожденных одномерных орбит с применением формулы Топалова, а также предложенный способ вычисления топологического типа трехмерных круговых многообразий.

**Благодарность.** Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — академику РАН, профессору А. Т. Фоменко — за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также профессору А. В. Болсинову и доценту А. А. Ошемкову за множество ценных замечаний и консультаций.

Автор также благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу и доброжелательное отношение.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Морозов П.В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. — Матем. сборник, 2002, т. 193, N 10, с. 113-138

2. Морозов П. В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа — Матем. сборник, 2004, т. 195, N 3, с. 69-114

3. Морозов П. В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. — Воронеж, 2002, Воронежская зимняя математическая школа – 2002, с. 55-57

4. Морозов П. В., Фоменко А. Т. Новые результаты топологической классификации интегрируемых систем в механике твердого тела. — Казань, 2003, Труды геометрического семинара, вып. 24, с. 107-120

   В работе [4] А. Т. Фоменко принадлежат теоремы 2 и 3 (об инварианте слоения Ливилля на трехмерной изоэнергетической поверхности), П. В. Морозову принадлежат теоремы 4, 5 и 6 (результаты и следствия лиувиллевой классификации случаев Клебша и Соколова).