МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.518.126

Жеребьёв Юрий Александрович

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕРЫ В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА

Специальность 01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2006

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В.А. Скворцов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.К. Захаров
	кандидат физико-математических наук, доцент К.М. Нараленков
Ведущая организация:	Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита диссертации состоится 16 марта 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 февраля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Т.П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа является исследованием в области теории меры и интеграла. В настоящей диссертации изучаются различные свойства вариационных мер (σ-конечность, абсолютная непрерывность, теоремы Радона–Никодима и др.), а также обобщенно абсолютно непрерывные функции множества — так называемые $\mathcal{B}ACG_\delta$-функции. При помощи полученных результатов выводятся как известные, так и новые дескриптивные характеристики некоторых кратных интегралов хенстоковского типа.

Основоположником дескриптивного подхода к введению интеграла является А. Лебег. Хорошо известна теорема Лебега о том, что функция точки является неопределенным интегралом Лебега на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна на этом отрезке. Эта теорема допускает также обобщение на многомерный случай[1]. Вообще определение, полностью описывающее класс функций, являющихся неопределенными интегралами в каком-либо смысле, называется *дескриптивным.* Довольно быстро после появления интеграла Лебега выяснилось, что несмотря на свою общность этот интеграл не восстанавливает неизвестную первообразную по известной конечной производной, не охватывая тем самым интеграл Ньютона (неопределенный интеграл). Это обстоятельство послужило толчком для дальнейшего развития теории функций действительного переменного в направлении поиска концепций интегрирования, более общих по сравнению с суммированием по Лебегу, которые бы восстанавливали первообразную по точной конечной производной. Первый интеграл, восстанавливающий первообразную, был построен А. Данжуа в 1912 г.[2,3] и стал называться *узким интегралом Данжуа.* В том же году Н.Н. Лузин охарактеризовал все неопределенные узкие интегралы Данжуа[4].

Определение A. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *AC^*-функцией на множестве* $E \subset [a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, такое, что для любого конечного набора неперекрывающихся отрезков

[1] *Сакс С.* Теория интеграла. М.: 2004.

[2] *Denjoy A.* Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue // C. R. Acad. Sci. Paris. 1912, **154**, P. 859-862.

[3] *Denjoy A.* Calcul de la primitive de la fonction dériveé la plus générale // C. R. Acad. Sci. Paris. 1912, **154**, P. 1075-1078.

[4] *Lusin N.* Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy // C. R. Acad. Sci. Paris. 1912, **155**, P. 1475-1477.

$\{[u_i,v_i]\}_{i=1}^{p}$ с концами $u_i, v_i \in E$ суммарной длины $\sum\limits_{i=1}^{p}(v_i - u_i) < \eta$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{p} \omega\bigl(f, [u_i, v_i]\bigr) < \varepsilon,$$

где $\omega\bigl(f,[u_i,v_i]\bigr)$ обозначает колебание функции f на отрезке $[u_i, v_i]$. Если множество E пусто либо одноточечно, то по определению считается, что f является AC^*-функцией на E. Непрерывная функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *ACG^*-функцией на отрезке* $[a,b]$, если справедливо представление $[a,b] = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$, где f является AC^*-функцией на каждом множестве E_n.

Теорема А (Лузин). *Функция $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ является неопределенным узким интегралом Данжуа тогда и только тогда, когда она является ACG^*-функцией на отрезке $[a,b]$.*

Теорема А позволяет сформулировать следующее *дескриптивное определение узкого интеграла Данжуа.*

Определение В. Функция $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, принимающая значения из расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, *интегрируема по Данжуа в узком смысле (D^*-интегрируема)*, если существует ACG^*-функция $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду на отрезке $[a,b]$. Функция F называется *неопределенным D^*-интегралом функции* f, а ее приращение $F(b) - F(a)$ — *D^*-интегралом функции f по отрезку* $[a,b]$.

Из определения В вытекает, что всякая D^*-интегрируемая функция необходимо конечна почти всюду. Чуть позже в работах О. Перрона[5] и О. Бауэра[6] был предложен еще один интеграл, восстанавливающий первообразную, который стал называться *интегралом Перрона.* Однако впоследствии выяснилось, что узкий интеграл Данжуа и интеграл

[5] *Perron O.* Über den Integralbegriff // Sitzber. Heidelberger Akad. Wiss. Abt. 1914, **A16**, P. 1-16.

[6] *Bauer H.* Der Perronsche Integralbegriff und seine Beziehung zum Lebesgueschen // Monatshefte Math. Phys. 1915, **26**, P. 153-198.

Перрона эквивалентны[7, 8, 9, 10]. Эквивалентные определения интеграла Перрона были предложены также С. Саксом[11] и А. Вардом[12].

Таким образом, к середине 20 в. в теории обобщенных интегралов было построено несколько эквивалентных концепций интегрирования, приводящих к восстановлению первообразной по известной точной конечной производной. Определения интегралов, а также большинство утверждений построенной теории, использовали специфику действительной прямой, что сильно ограничивало возможности приложения данных интегралов в анализе по сравнению с интегралами Римана и Лебега. Это обстоятельство обусловило развитие теории интеграла во второй половине 20 в. в направлении обобщения уже построенной одномерной теории на многомерный случай.

В 1952 г. Я. Маржиком было предложено определение *кратного интеграла Перрона*, с помощью которого ему удалось доказать теорему Фубини для указанного многомерного интеграла[13]. Однако дальнейшие шаги в этом направлении сопровождались слишком большими трудностями, чтобы можно было говорить о применении этих многомерных конструкций где-то еще. В 1957 г. Я. Курцвейлем было предложено определение интеграла римановского типа[14]. Чуть позже Р. Хенсток независимо от Курцвейля также определил указанный интеграл и в одномерном случае доказал его эквивалентность интегралу Перрона[15, 16]. Собственно говоря, это обстоятельство определило то, что в настоящее время за этим интегралом закрепилось название *интеграл Курцвейля–Хенстока*. На многомерный случай результат Хенсто-

[7] *Hake H.* Über de la Vallée-Poussins Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron // Math. Ann. 1921, **83**, P. 119-142.

[8] *Aleksandroff P.* Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes // Math. Zeitschr. 1924, **20**, P. 213-222.

[9] *Aleksandroff P.* L'intégration au sens de M. Denjoy considérée comme recherche des fonctions primitives // Матем. Сборник. 1924, **31**, С. 465-476.

[10] *Looman H.* Ueber die Perronsche Integraldefinition // Math. Ann. 1925, **93**, P. 153-156.

[11] *Сакс С.* Теория интеграла. М.: 2004.

[12] *Ward A.J.* The Perron-Stieltjes integral // Math. Zeitschr. 1936, **41**, P. 578-604.

[13] *Mařík J.* Základy theorie integrálu v euklidových prostoreh // Časopis Pešt. Mat. 1952, **77**, №1, P. 1-51, 125-145, 267-300.

[14] *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Чехословацкий математический журнал. 1957, **7(82)**, №3, С. 418-446.

[15] *Henstock R.* A new descriptive definition of the Ward integral // J. London Math. Soc. 1960, **35**, P. 43-48.

[16] *Henstock R.* Definitions of Riemann type of the variational integrals // Proc. London Math. Soc. ser. 3. 1961, **11**, №43, P. 402-418.

ка был перенесен К. Осташевским в 1985 г.[17] Именно римановский подход к введению указанных интегралов, предложенный Курцвейлем и Хенстоком, стал тем самым решающим шагом, позволившим в конечном итоге при помощи определения интеграла Курцвейля–Хенстока перенести большинство известных одномерных результатов на многомерный случай, а также существенно упростить доказательство многих результатов теории кратного интеграла Перрона. Разумеется, возник вопрос о возможности перенесения дескриптивного определения обсуждаемых интегралов на многомерный случай. Видно, что определение класса ACG^*-функций существенно зависит от специфики прямой, поэтому основной проблемой в этом направлении являлась проблема поиска такого определения обобщенной абсолютной непрерывности функции множества, которое бы не зависело от размерности пространства, в одномерном случае было бы эквивалентно определению ACG^*-функции и вместе с тем полностью описывало бы класс всех кратных интегралов Курцвейля–Хенстока (или, что то же самое, кратных интегралов Перрона). Таким определением, как недавно выяснилось, является понятие ACG_δ-функции, введенное Р. Хенстоком[18]. В 1990 г. независимо Чу Туан Сенгом[19] и Р. Гордоном[20] была доказана следующая теорема.

Теорема B (Chew Tuan Seng, Gordon). *Функция* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *является неопределенным интегралом Курцвейля–Хенстока тогда и только тогда, когда она является* ACG_δ*-функцией на отрезке* $[a,b]$.

Теорема B позволяет сформулировать еще одно дескриптивное определение узкого интеграла Данжуа, эквивалентное определению B.

Определение C. Функция $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ называется D^*-*интегрируемой на отрезке* $[a,b]$, если существует ACG_δ-функция $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Функция F называется *неопределенным* D^*-*интегралом функции* f, а ее приращение $F(b) - F(a)$ — D^*-*интегралом функции* f *по отрезку* $[a,b]$.

---

[17] *Ostaszewski K.M.* Henstock integration in the plane // Mem. Amer. Math. Soc. 1986, **63**, №353, P. 1-106.

[18] *Henstock R.* Theory of Integration. London: 1963.

[19] *Chew Tuan Seng.* On the equivalence of Henstock–Kurzweil and restricted Denjoy integrals in $\mathbb{R}^n$ // Real Analysis Exchange. 1989/90, **15**, №1, P. 259-268.

[20] *Gordon R.A.* A descriptive characterization of the generalized Riemann integral // Real Analysis Exchange. 1989/90, **15**, №1, P. 397-400.

Из определения С также вытекает, что всякая D^*-интегрируемая функция в смысле этого определения необходимо конечна почти всюду.

Наконец, только в начале 21 в. Ли Туо–Йеонгу удалось распространить теорему В на многомерный случай[21, 22]. Это оказалось возможным в связи с бурным развитием теории вариационных мер (см. определение 2.3 ниже).

Теорема C (Lee Tuo-Yeong). *Пусть на множестве всех m-мерных интервалов, содержащихся в некотором m-мерном интервале I, задана аддитивная функция F. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) функция F является неопределенным кратным интегралом Курцвейля–Хенстока;
2) вариационная мера $V\left(\mathcal{B}^{\mathcal{KH}}, F, \cdot\right)$ абсолютно непрерывна на m-мерном интервале I относительно меры Лебега;
3) F является ACG_δ-функцией на m-мерном интервале I.

Вместе с тем развитие теории ортогональных рядов потребовало построения интегралов, более общих по сравнению с узким интегралом Данжуа и интегралом Перрона. В конце 60-х годов 20 в. В.А. Скворцовым был определен *двоичный интеграл Перрона*, решающий задачу восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов по системам Хаара и Уолша[23, 24, 25, 26]. Аналогом двоичного интеграла Перрона для мультипликативных систем являются *$\mathcal{P}$-ичные интегралы Перрона*. В 1977 г. А. Пакеманом был определен *двоичный интеграл Курцвейля–Хенстока*[27]. Аналогичным образом определяется *$\mathcal{P}$-ичный интеграл Курцвейля–Хенстока*, при этом двоичный ин-

[21] *Lee Tuo-Yeong.* A full descriptive definition of the Henstock–Kurzweil integral in the Euclidean space // Proc. London Math. Soc. 2003, **87**, №3, P. 677-700.

[22] *Lee Tuo-Yeong.* Some full descriptive characterizations of the Henstock–Kurzweil integral in the Euclidean space // Czech. Math. J. 2005, **55(130)**, P. 625-637.

[23] *Скворцов В.А.* О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // ДАН СССР. 1968, **183**, №4, С. 784-786.

[24] *Скворцов В.А.* Некоторое обобщение интеграла Перрона // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1969, №4, С. 48-51.

[25] *Skvortsov V.A.* Generalized integrals in the theory of trigonometric, Haar and Walsh series // Real Analysis Exchange. 1986/87, **12**, №1, P. 59-62.

[26] *Skvortsov V.A.* Nonabsolutely convergent integrals in the problem of recovering the coefficients of orthogonal series // Banach Center publication. 2002, **56**, P. 107-117.

[27] *Pacquement A.* Détermination d'une fonction au moyen de sa dérivée sur un réseau binaire // C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A,B. 1977, **284**, №6, P. 365-368.

теграл Перрона является частным случаем $\mathcal{P}$-ичного интеграла Перрона, а двоичный интеграл Курцвейля–Хенстока — частным случаем $\mathcal{P}$-ичного интеграла Курцвейля–Хенстока. В 1985 г. К. Осташевским была доказана эквивалентность кратного двоичного интеграла Перрона кратному двоичному интегралу Курцвейля–Хенстока и кратного $\mathcal{P}$-ичного интеграла Перрона кратному $\mathcal{P}$-ичному интегралу Курцвейля–Хенстока соответственно[17]. Наконец, в 1991 г. Р. Гордоном была получена дескриптивная характеристика двоичного интеграла Курцвейля–Хенстока на отрезке $[0,1]$ в терминах ACG_d-функций[28], подобная теореме B, а Б. Бонжорно, Л. Ди Пьяццей и В.А. Скворцовым в предположении ограниченности последовательности натуральных чисел $\mathcal{P}$ была получена дескриптивная характеристика $\mathcal{P}$-ичных интегралов Курцвейля–Хенстока также на отрезке $[0,1]$ в терминах абсолютной непрерывности соответствующих вариационных мер[29, 30], аналогичная утверждению 2) теоремы C. Рассмотрению дескриптивных характеристик кратных интегралов хенстоковского типа, аналогичных теореме C, посвящена данная диссертация. Исследования в этом направлении активно ведутся и в настоящее время.

Актуальность данной темы определяется еще и тем, что интегралы хенстоковского типа находят все более широкое применение в смежных разделах математики, таких как: гармонический анализ, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, случайные процессы и др.

Цель работы. Исследовать свойства σ-конечных вариационных мер относительно различных дифференциальных базисов. Охарактеризовать абсолютно непрерывные вариационные меры посредством класса $\mathcal{B}ACG_\delta$-функций. Найти в явном виде производные Радона–Никодима абсолютно непрерывных вариационных мер, рассмотренных относительно различных дифференциальных базисов. Использовать указанные результаты для получения дескриптивных характеристик некоторых кратных интегралов хенстоковского типа, включая кратный $\mathcal{P}$-ичный интеграл Курцвейля–Хенстока, в терминах $\mathcal{B}ACG_\delta$-функций и абсолютно непрерывных вариационных мер, а также для

[28] *Gordon R.A.* The inversion of approximate and dyadic derivatives using an extension of the Henstock integral // Real Analysis Exchange. 1990/91, **16**, №1, P. 154-168.

[29] *Bongiorno B., Di Piazza L., Skvortsov V. A.* On variational measures related to some bases // J. Math. Anal. and Appl. 2000, **250**, №2, P. 533-547.

[30] *Bongiorno B., Di Piazza L., Skvortsov V. A.* The Ward property for a $\mathcal{P}$-adic basis and the $\mathcal{P}$-adic integral // J. Math. Anal. and Appl. 2003, **285**, P. 578-592.

характеризации класса функций обобщенной q-вариации VGG_q^* в терминах σ-конечности соответствующих вариационных мер.

Методы исследований. В работе использованы не только классические методы теории меры и теории функций действительного переменного, но также развиты новые и современные методы теории интеграла, в частности, метод характеризации интегралов с помощью вариационных мер, определяемых относительно различных дифференциальных базисов.

Научная новизна. Главные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что производной Радона–Никодима абсолютно непрерывной вариационной меры, построенной по аддитивной функции $\mathcal{P}$-ичного интервала F, относительно $\mathcal{P}$-ичного базиса, где последовательность натуральных чисел $\mathcal{P}$ ограничена, является модуль обычной (в смысле Сакса) $\mathcal{P}$-ичной производной функции F, при этом вариационные меры, рассмотренные относительно той же функции F и ρ-регулярных $\mathcal{P}$-ичных базисов, совпадают с исходной вариационной мерой для всех значений параметра регулярности ρ.

2. Доказано, что аддитивная функция F, заданная на m-мерных $\mathcal{P}$-ичных интервалах, является неопределенным кратным $\mathcal{P}$-ичным интегралом Курцвейля–Хенстока тогда и только тогда, когда вариационная мера, построенная по этой функции, относительно $\mathcal{P}$-ичного базиса абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, при этом последовательность $\mathcal{P}$ также предполагается ограниченной.

3. Доказано, что аддитивная функция F, заданная на m-мерных $\mathcal{P}$-ичных интервалах, является неопределенным кратным $\mathcal{P}$-ичным интегралом Курцвейля–Хенстока тогда и только тогда, когда F является $\mathcal{P}ACG_\delta$-функцией (последовательность $\mathcal{P}$ ограничена).

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию интегралов хенстоковского типа. Полученные результаты могут найти применение в теории меры и интеграла, теории ортогональных рядов, теории случайных процессов.

Аппробация работы. Результаты настоящей диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством академика $\boxed{\text{П.Л. Ульянова}}$, д.ф.-м.н., профессора М.К. Потапова, д.ф.-м.н., профессора М.И. Дьяченко, д.ф.-м.н., профессора В.А. Скворцова и д.ф.-м.н., профессора Т.П. Лукашенко в 2006 г., на семинарах по теории функций под руководством д.ф.-м.н., профессора В.А. Скворцова, д.ф.-м.н., профессора Т.П. Лукашенко и к.ф.-м.н. А.П. Солодова в 2003 — 2006 гг., а также на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" в 2003 г., 12-й и 13-й Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" в 2004 и 2006 гг., XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г., Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова в 2004 г., IV Международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" в 2006 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 183 наименования. Общий объем диссертации составляет 157 страниц (из них 144 страницы — текст диссертации и 13 страниц — список литературы).

Краткое содержание диссертации

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике настоящей диссертации.

В **первой главе** вводятся основные понятия. Дается определение дифференциального базиса, формулируются определения основных классов дифференциальных базисов: *базисы Перрона,* BF*-базисы, базисы Витали, базисы макшейновского типа, базисы со свойством Витали, базисы со свойством Варда, базисы обладающие свойством разбиения.* В таблице § 1.1 приводятся примеры конкретных дифференциальных базисов, наиболее важными из которых являются *полный базис* $\mathcal{B}^{\mathcal{KH}}$ и $\mathcal{P}$*-ичный базис* $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$. Затем в § 1.2 вводятся различные виды производных и производных чисел функции множества относительно дифференциального базиса. Наконец, в § 1.3 кратко приводятся определения и формулировки некоторых теорем общей теории меры, необходимые для дальнейшего изложения, включая понятия умеренной, полуумеренной и полуконечной меры. Всюду далее через $\mathcal{B}$ будет обозначаться дифференциальный базис, а через Ψ — класс $\mathcal{B}$-множеств.

Вторая и третья главы являются основными.

Во **второй главе** определяется вариационная мера и изучаются основные свойства этого класса мер.

В **параграфе 2.1** даётся определение вариационной меры в произвольном метрическом пространстве.

Определение 2.3. Пусть в метрическом пространстве X задан дифференциальный базис Витали $\mathcal{B}$. Тогда со всякой функцией $\mathcal{B}$-множества $F\colon\Psi\to\mathbb{R}$ и непустым множеством $E\subset X$ можно связать величины $\mathrm{Var}\big(\mathcal{B}_\delta,F,E\big)=\sup\limits_{\pi}\sum\limits_{(x,M)\in\pi}\big|F(M)\big|$ и $V\big(\mathcal{B},F,E\big)=\inf\limits_{\delta}\mathrm{Var}\big(\mathcal{B}_\delta,F,E\big)$, где supremum берется по всем разбиениям π на множестве E, согласованным с $\delta(\cdot)$, а infimum — по всем функциям $\delta\colon E\to(0,+\infty)$. По определению считается $V\big(\mathcal{B},F,\varnothing\big)=0$. Функция множества $\mathrm{Var}\big(\mathcal{B}_\delta,F,\cdot\big)$ называется *δ-вариацией*, а функция $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$ — *вариационной мерой, построенной по функции F, относительно базиса $\mathcal{B}$.*

Затем доказываются наиболее общие свойства вариационных мер о том, что вариационная мера является внешней метрической, а значит, борелевской мерой, обсуждается вопрос о представимости всякой умеренной борелевской меры в $\mathbb{R}^m$ в виде вариационной меры, что позволяет сделать вывод о том, что класс вариационных мер в $\mathbb{R}^m$ содержит в себе класс всех мер Лебега–Стилтьеса.

Параграф 2.2 посвящен изучению свойств, связанных с σ-конечностью вариационных мер. Основными результатами данного параграфа являются следствие 2.3 и теорема 2.6, характеризующие классы σ-конечных вариационных мер относительно базисов макшейновского и перроновского типов.

Следствие 2.3. *Пусть на непустом подмножестве E сепарабельного метрического пространства (X,d) задан дифференциальный базис макшейновского типа $\mathcal{B}$, являющийся базисом Витали, и функция $\mathcal{B}$-множества $F:\Psi\to\mathbb{R}$. Вариационная мера $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$ является умеренной (конечной) борелевской мерой в (компактном) метричес-*

ком пространстве (E, d) тогда и только тогда, когда она полуконечна в этом пространстве.

Приводится пример, показывающий, что условие сепарабельности пространства X в следствии 2.3 отбросить нельзя. Из следствия 2.3 вытекает также, что в отличие от общей ситуации в сепарабельных метрических пространствах классы σ-конечных и полуконечных вариационных мер относительно некоторого базиса макшейновского типа, являющегося базисом Витали, совпадают. В компактных же метрических пространствах вообще не существует σ-конечных вариационных мер относительно описанного класса базисов, принимающих бесконечные значения.

В теореме 2.6 рассматриваются базисы Перрона $\mathcal{B}$, удовлетворяющие следующим условиям:
а) всякое $\mathcal{B}$-множество M имеет непустую внутренность $Int\ M$;
б) каждая граничная точка, принадлежащая $\mathcal{B}$-множеству M, является точкой положительной нижней плотности для $Int\ M$.
Из этих условий вытекает, в частности, измеримость по Лебегу всех таких $\mathcal{B}$-множеств M.

Теорема 2.6. *Пусть на непустом F_σ-множестве $E \subset \mathbb{R}^m$ задан дифференциальный BF-базис Перрона и Витали $\mathcal{B}$, удовлетворяющий условиям а) и б), и функция $\mathcal{B}$-множества $F\colon \Psi \to \mathbb{R}$. Вариационная мера $V\big(\mathcal{B}, F, \cdot\big)$ σ-конечна на множестве E тогда и только тогда, когда она σ-конечна на каждом компактном множестве* $K \subset E$ меры $\mu(K) = 0$.

В **параграфе 2.3** изучаются различные свойства, абсолютно непрерывных вариационных мер (имеется ввиду абсолютная непрерывность относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^m$). Показывается, что абсолютная непрерывность вариационной меры, рассмотренной относительно дифференциального базиса $\mathcal{B}$, влечет ее конечность, умеренность, полуумеренность либо σ-конечность в зависимости от пространства, на котором эта мера рассматривается, и от свойств дифференциального базиса $\mathcal{B}$ (следствия 2.5, 2.6). Затем доказывается вариационный аналог теоремы Банаха–Зарецкого (теорема 2.8). Наконец, основными результатами § 2.3 являются теоремы 2.11 и 2.12, для различных видов дифференциальных базисов в $\mathbb{R}^m$ устанавливающие связь между абсолютной непрерывностью вариационных мер и классом обобщенно абсолютно непрерывных функций множества — $\mathcal{B}ACG_\delta$-функций.

Определение 2.5. Пусть на непустом множестве $E\subset\mathbb{R}^m$ задан дифференциальный базис Витали $\mathcal{B}$, у которого $\mathcal{B}$-множества измеримы по Лебегу. Функция $\mathcal{B}$-множества $F\colon\Psi\to\mathbb{R}$ называется *$\mathcal{B}AC_\delta$-функцией на множестве E*, если для любого $\varepsilon>0$ существуют функция $\delta: E\to(0,+\infty)$ и $\eta>0$, такие, что для любого разбиения $\big\{(x_i,M_i)\big\}_{i=1}^p$ на множестве E, согласованного с $\delta(\cdot)$, со свойством $\sum\limits_{i=1}^p\mu(M_i)<\eta$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^p\big|F(M_i)\big|<\varepsilon.$$

По определению считается, что всякая функция $\mathcal{B}$-множества $F\colon\Psi\to\mathbb{R}$ является $\mathcal{B}AC_\delta$-функцией на пустом множестве. Наконец, функция $\mathcal{B}$-множества $F\colon\Psi\to\mathbb{R}$ называется *$\mathcal{B}ACG_\delta$-функцией на множестве $E\subset\mathbb{R}^m$*, если справедливо представление $E=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}E_n$, где F является $\mathcal{B}AC_\delta$-функцией на каждом множестве E_n. Если при этом множество E является F_σ-множеством, а множества E_n можно выбрать компактными, то такие функции будут называться *$\mathcal{B}ACG_\delta[E]$-функциями.*

Теорема 2.11. *Пусть на непустом множестве $E\subset\mathbb{R}^m$ задан дифференциальный базис макшейновского типа $\mathcal{B}$, являющийся базисом Витали, $\mathcal{B}$-множества которого измеримы по Лебегу и имеют границу нулевой меры либо замкнуты. Вариационная мера $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$, построенная по функции $\mathcal{B}$-множества $F:\Psi\to\mathbb{R}$, абсолютно непрерывна на (компактном) множестве E тогда и только тогда, когда F является $\mathcal{B}ACG_\delta$-функцией ($\mathcal{B}AC_\delta$-функцией) на E, при этом множества E_n, на которых F является $\mathcal{B}AC_\delta$-функцией, можно выбрать открытыми в E.*

Теорема 2.12. *Пусть на непустом измеримом по Лебегу множестве $E\subset\mathbb{R}^m$ задан дифференциальный базис Витали $\mathcal{B}$, удовлетворяющий условиям теоремы 2.6, $\mathcal{B}$-множества которого замкнуты либо имеют границу нулевой меры. Вариационная мера $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$, построенная по функции $\mathcal{B}$-множества $F:\Psi\to\mathbb{R}$, абсолютно непрерывна на множестве (F_σ-множестве) E тогда и только тогда, когда F является $\mathcal{B}ACG_\delta$-функцией ($\mathcal{B}ACG_\delta[E]$-функцией) на*

E, при этом справедливо представление $E=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}E_n$, где F является $\mathcal{B}AC_\delta$-функцией на каждом множестве E_n, множества E_n $(n=2,3,\ldots)$ компактны, а множество E_1 является G_δ-множеством в E меры $\mu(E_1)=0$.

Параграф 2.4 посвящен посвящен доказательству теорем о производных Радона–Никодима вариационных мер относительно различных дифференциальных базисов. В чуть более общем случае дается новое доказательство (см. доказательство теоремы 2.14) известного результата о производной Радона–Никодима абсолютно непрерывной вариационной меры, рассмотренной относительно произвольного дифференциального BF-базиса Перрона и Витали в $\mathbb{R}^m$, обладающего свойством Витали[31, 32, 33]. Основной результат главы 2 и § 2.4 содержится в теореме 2.15 о производной Радона–Никодима абсолютно непрерывной вариационной меры, рассмотренной относительно $\mathcal{P}$-ичного базиса. Этот результат является новым. Параллельно в теореме 2.15 формулируется аналогичный известный результат для абсолютно непрерывной вариационной меры относительно полного базиса[21], и приводится упрощенное доказательство этого результата Ли Туо–Йеонга.

Теорема 2.15. *Пусть задана аддитивная функция $\mathcal{B}$-интервала F, где $\mathcal{B}$ обозначает один из дифференциальных базисов $\mathcal{B}^{\mathcal{KH}}$ или $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ с ограниченной последовательностью $\mathcal{P}$. Вариационная мера $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$ абсолютно непрерывна на измеримом по Лебегу множестве $E\subset\mathbb{R}^m$ (в случае $\mathcal{P}$-ичного базиса вместо $\mathbb{R}^m$ рассматривается единичный куб $[0,1]^m$) тогда и только тогда, когда функция $|F'_{\mathcal{B}}(x)|$ является производной Радона–Никодима для $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$, т.е. для каждого измеримого по Лебегу множества $X\subset E$ справедливо равенство*

$$V\big(\mathcal{B},F,X\big)=(L)\int\limits_X\big|F'_{\mathcal{B}}\big|d\mu, \qquad (1)$$

при этом вариационные меры $V\big(\mathcal{B}_\rho,F,\cdot\big)$ и $V\big(\mathcal{B},F,\cdot\big)$ совпадают для всех $\rho\in(0,1]$.

---

[31] *Bongiorno B., Vetro P.* Un teorema sulla rappresentazione degli integrali // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. 1979, **28**, №1, P. 33-36.

[32] *Bongiorno B.* Essential variation. Measure Theory Oberwolfach 1981 // Lect. Notes in Math. **945**, P. 187-193. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[33] *Di Piazza L.* Variational measures in the theory of the integration in $\mathbb{R}^m$ // Czech. Math. J. 2001, **51(126)**, №1, P. 95-110.

Завершается § 2.4 доказательством теоремы о производной Радона–Никодима абсолютно непрерывной вариационной меры, рассмотренной относительно некоторого класса базисов макшейновского типа (теорема 2.16). Теорема 2.16 также является новой.

Наконец, **третья глава** касается приложений вариационных мер в теории интеграла и содержит главные результаты данной диссертации.

В **параграфе 3.1** доказаны теоремы, характеризующие σ-конечные вариационные меры относительно полного базиса, заданные на отрезке действительной прямой, посредством подкласса функций обобщенной q-вариации VBG_q^* $(q \geqslant 1)$ и, наоборот, класс всех VBG_q^*-функций охарактеризован с помощью некоторого класса вариационных мер, более широкого по сравнению с σ-конечными вариационными мерами (теоремы 3.3 и 3.4).

В **параграфе 3.2** определяется интеграл Курцвейля–Хенстока относительно произвольного дифференциального базиса $\mathcal{B}$, обладающего свойством разбиения, $\mathcal{KH}_{\mathcal{B}}$-*интеграл*, и доказываются его основные свойства.

В **параграфе 3.3** выводятся дескриптивные характеристики кратного $\mathcal{P}$-ичного интеграла Курцвейля–Хенстока (теоремы 3.7 и 3.8), являющиеся главными результатами настоящей диссертации. Эти результаты являются новыми. Параллельно в теоремах 3.7 и 3.8 формулируются известные дескриптивные характеристики кратных интегралов Курцвейля–Хенстока[21, 22], и приводится их упрощенное доказательство.

Теорема 3.7. *Пусть $\mathcal{B}$ обозначает один из дифференциальных базисов $\mathcal{B}^{\mathcal{KH}}$ или $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$, где последовательность $\mathcal{P}$ ограничена. Аддитивная функция $\mathcal{B}$-интервала F является неопределенным $\mathcal{KH}_{\mathcal{B}}$-интегралом тогда и только тогда, когда вариационная мера $V\big(\mathcal{B}, F, \cdot\big)$ абсолютно непрерывна на m-мерном интервале I_0 (в случае $\mathcal{P}$-ичного базиса $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ рассматривается $\mathcal{P}$-ичный интервал I_0).*

Теорема 3.8. *Пусть $\mathcal{B}$ обозначает один из дифференциальных базисов $\mathcal{B}^{\mathcal{KH}}$ или $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$, где последовательность $\mathcal{P}$ ограничена. Аддитивная функция $\mathcal{B}$-интервала F является неопределенным $\mathcal{KH}_{\mathcal{B}}$-интегралом тогда и только тогда, когда F является $\mathcal{B}ACG_{\delta}[I_0]$-функцией на m-мерном интервале I_0 (в случае $\mathcal{P}$-ичного базиса $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ рассматривается $\mathcal{P}$-ичный интервал I_0).*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В. А. Скворцову за плодотворные обсуждения поставленных задач и постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. *Жеребьёв Ю.А., Скворцов В.А.* О производной Радона–Никодима для вариационной меры, построенной по двоичному базису // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004, №5, С. 6-12.

   Лемма 7 принадлежит В.А. Скворцову, остальные результаты — Ю.А. Жеребьёву.

2. *Жеребьёв Ю.А.* VBG_q^*-функции и σ-конечные вариационные меры // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005, №6, С. 17-22.

3. *Жеребьёв Ю.А.* О дескриптивной характеризации многомерного двоичного интеграла Курцвейля–Хенстока с помощью вариационной меры // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2004, т. 1, С. 93-96.

4. *Skvortsov V., Zherebyov Y.* On classes of functions generating absolutely continuous variational measures // Real Analysis Exchange. 2004/05, **30**, №1, С. 361-372.

   Теорема 2 принадлежит В.А. Скворцову, остальные результаты — Ю.А. Жеребьёву.

5. *Жеребьёв Ю.А.* О дескриптивной характеристике двоичного многомерного интеграла Курцвейля–Хенстока // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции — Воронеж: ВГУ, 2003, С. 97.

6. *Жеребьёв Ю.А.* ACG_δ-функции и кратный интеграл Данжуа–Перрона // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы — Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2004, С. 82-83.

7. *Жеребьёв Ю.А.* Характеристика σ-конечных вариационных мер при помощи VBG^*-функций // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Абрау–Дюрсо, база отдыха Ростовского госуниверситета "Лиманчик", 5–11 сентября 2004 г. — Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2004, С. 103-104.

8. *Жеребьёв Ю.А.* О достаточном условии σ-конечности вариационной меры // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы — Саратов: ООО Изд-во "Научная книга", 2006, С. 68-69.

9. *Жеребьёв Ю.А.* Вариационные меры и ACG_δ-функции относительно макшейновского базиса // XIV Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". IV международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Труды. — Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2006, С. 26.