МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.541

БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ Екатерина Анатольевна

ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ ГРУППЫ И СВЯЗИ С ИХ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2007

Работа выполнена на кафедре высшей математики
физико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор ФОМИН Александр Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор АРТАМОНОВ Вячеслав Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор КОЖУХОВ Сергей Федорович

доктор физико-математических наук,
профессор ТУГАНБАЕВ Аскар Аканович

Ведущая организация: Томский государственный университет

Защита состоится " 6 " апреля 2007 года в 16 час 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, Главное здание, ауд. 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "......"......................... 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук
профессор

В.Н. ЧУБАРИКОВ

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Абелевы группы традиционно являются бурно развивающейся в мире областью фундаментальной алгебры, в основания которой внесли свой вклад выдающиеся русские алгебраисты Л.Я. Куликов, А.Г. Курош, А.И. Мальцев, Л.С. Понтрягин, чьи традиции успешно продолжены в России работами И.С. Беккера, С.Я. Гриншпона, С.Ф. Кожухова, П.А. Крылова, А.П. Мишиной, А.А. Фомина, А.В. Яковлева, что отражено в обзорных публикациях[1],[2].

В последние десятилетия теория *почти вполне разложимых* групп выделилась в самостоятельную ветвь общей теории абелевых групп. Её истоки следует искать в давних результатах, которыми было открыто существование абелевых групп без кручения, не являющихся прямыми суммами групп ранга 1. Александр Геннадьевич Курош в своей знаменитой книге[3] писал: "Мы увидим позже, что вполне разложимыми группами далеко не исчерпываются все абелевы группы без кручения". Класс почти вполне разложимых групп по своему определению является наиболее близким к классу вполне разложимых групп конечного ранга, так как состоит из групп, содержащих вполне разложимую группу в качестве подгруппы конечного индекса. Интерес к нему определяется многими обстоятельствами, в частности тем, что в нем реализуется все многообразие неизоморфных прямых разложений, выраженное в терминах натуральных чисел (обозначающих ранги неразложимых слагаемых и их число в различных разложениях одной и той же группы), которое существует в классе всех абелевых групп без

[1]А.В. Михалев, А.П. Мишина. Бесконечные абелевы группы: методы и результаты, Фундаментальная и прикладная математика, том. 1, вып. 2, стр. 320 - 375, 1995.

[2]A. Fomin. Abelian groups in Russia, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 32, no. 4, 1161-1180, 2002.

[3]А.Г. Курош. Теория групп. Изд-е третье. Издательство "Наука" , Москва, 1967.

кручения конечного ранга. Это показано в работах[4,5,6,7,8,9], результаты которых нашли отражение в монографии[10] А. Мадера как содержащие решения проблем 67, 68 из книги[11] Л. Фукса. В недавно вышедшей монографии[12] её авторы, П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев, систематизировали широкий спектр результатов, относящихся ко всем направлениям теории абелевых групп, в том числе абелевых групп без кручения, и представлены они в тесной взаимосвязи с их кольцами эндоморфизмов, что выделяет эту книгу из ряда других по теории групп.

Связанная с этой книгой методикой совместного рассмотрения групп и их колец эндоморфизмов, диссертация при этом имеет более узкий предмет изучения, почти вполне разложимые группы, как и упомянутая выше монография А. Мадера, и, таким образом, вплетается в ткань современных исследований абелевых групп. Она посвящена установлению взаимозависимостей между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов, причем при изучении последних упор делается на их групповые свойства (кольцевые свойства колец эндоморфизмов групп без кручения отражены в ряде работ[13,14] П.А. Крылова). Важными групповыми характеристиками любой почти

[4] Е. А. Благовещенская, А.В. Яковлев. Прямые разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения. Алгебра и Анализ, т. 1, вып. 1, с. 111–127, 1989.

[5] Яковлев А. В. Абелевы группы конечного ранга без кручения и их прямые разложения, Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 175, стр. 135-153, 1989.

[6] Яковлев. О прямых разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения, Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 160, стр. 272-285, 1987.

[7] Е. А. Благовещенская. Разложения абелевых групп конечного ранга без кручения в прямые суммы неразложимых групп. Алгебра и Анализ, т. 4, вып. 2, с. 62–69, 1992.

[8] Е. А. Благовещенская. О прямых разложениях абелевых групп без кручения конечного ранга. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 132, с. 17–25, 1983.

[9] Е. А. Благовещенская. Графическое истолкование некоторых абелевых групп без кручения конечного ранга. Прикладная Математика, Труды С. Петербургского Политехнического Университета, # 461, с. 53-59, 1996.

[10] A. Mader. Almost completely decomposable abelian groups, Gordon and Breach, *Algebra, Logic and Applications*, Vol. **13**, Amsterdam, 2000.

[11] Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы, т. 2, М.: Мир, 1977.

[12] П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов, Москва, Факториал, 2006.

[13] П.А. Крылов. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения, Абелевы группы и модули, вып. 11, 12, с. 99-120, Томск, 1994.

[14] П.А. Крылов. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения, Матем, сб., 95, вып. 2, с. 214 - 228, 1974.

вполне разложимой группы X являются ее *регулятор* $R(X)$, однозначно определенная вполне разложимая вполне характеристическая подгруппа конечного индекса, и *регуляторный фактор* $X/R(X)$.

Основой взаимопроникновения теории групп и теории колец в данном случае служит то обстоятельство, что кольца эндоморфизмов почти вполне разложимых групп по отношению к операции сложения также являются группами из этого класса. Этот факт определяет новое направление исследований, во-многом реализованное в представленной работе, а именно, исследование почти вполне разложимых колец (групповая характеристика кольца относится к его аддитивной группе, как и принято).

В этой связи следует отметить книгу[15] И.Х. Беккера и С.Ф. Кожухова, в которой рассматриваются условия того, что автоморфизм регулятора продолжается до автоморфизма всей почти вполне разложимой группы. Здесь открываются широкие возможности для применения методов линейной алгебры, имеющих интересные приложения в различных областях, о чем, в частности, свидетельствует книга[16] В.А. Артамонова и В.Н. Латышева.

Действенным инструментом исследования абелевых групп является двойственный подход к различным классам групп. К наиболее красивым и эффективным можно отнести двойственную конструкцию[17] А.А. Фомина, а также категориальную двойственность.[18] Открытая в диссертации двойственность определения почти вполне разложимых структур (групп и их колец эндоморфизмов) дает способ доказательства ряда важных результатов.

Данный подход переносится на введенный в последней главе диссертации класс *локально почти вполне разложимых* групп, состоящий из групп счетного ранга, все вполне характеристические

[15] И.Х. Беккер, С.Ф. Кожухов. Автоморфизмы абелевых групп без кручения, Томск, 1988.

[16] В.А. Артамонов, В.Н. Латышев. Линейная алгебра и выпуклая геометрия, Москва, Факториал Пресс, 2004.

[17] А.А.Фомин, Инварианты и двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга, Алгебра и логика, **26**, № 1, стр. 63-83, 1987.

[18] A.A. Fomin and W.J.Wickless, Quotient divisible abelian groups, Proceedings of the Amer.Math.Soc., vol. 126, no. 1, pp. 45-52, 1998.

сервантные подгруппы которых конечного ранга являются почти вполне разложимыми группами. Сложность проблемы классификации групп без кручения даже конечного ранга хорошо известна, и наиболее ярким свидетельством этого является известный результат[19] А.В. Яковлева. Возникшее в связи с этим понятие *почти изоморфизма*[20,21] распространяется в диссертации на группы счетного ранга для осуществления их классификации.

Цель работы.

1) Установить связи (в том числе, двойственные) между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов для выявления групповой структуры последних и распространения специальных методов теории почти вполне разложимых групп на кольца.

2) Определить новые классы групп без кручения счетного ранга, являющихся почти вполне разложимыми в локальном смысле, и на основе полученных закономерностей распространить на них теорию почти вполне разложимых групп.

3) Ответить на традиционные для алгебры вопросы теоремами классификации групп и колец, реализации колец, теоремами об определяемости групп их кольцами эндоморфизмов (аналог теоремы[22,23] Бэра-Капланского), об идентичности прямых разложений почти изоморфных групп счетного ранга (аналог теоремы[24] Арнольда), критериями неразложимости групп и колец.

Процесс совместного исследования почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов естественным образом распадается на этапы, сводящиеся к решению отдельных задач:

[19] А.В. Яковлев. К проблеме классификации абелеых групп без кручения конечного ранга, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 57, с. 171–175, 1976.

[20] L. Lady. Almost completely decomposable torsion-free abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **35**, pp. 41 - 47, 1974.

[21] L. Lady. Nearly isomorphic torsion-free abelian groups, J. Algebra, **35**, pp. 235 - 238, 1975.

[22] R. Baer. Automorphism rings of primary abelian operator groups, Ann. Math. **44**, pp. 192 - 227, 1943

[23] I. Kaplansky. Infinite Abelian Groups, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1954.

[24] D. Arnold. Finite rank torsion free abelian groups and rings, Lecture Notes in Mathematics, **931**, Springer Verlag, 1982.

1. Исследовать почти вполне разложимые группы X с примарным регуляторным фактором совместно с их кольцами эндоморфизмов $\operatorname{End} X$ для получения групповых характеристик последних.

2. Установить связи между почти вполне разложимыми группами X с произвольным регуляторным фактором и их кольцами эндоморфизмов $\operatorname{End} X$. Исследовать группу автоморфизмов $\operatorname{Aut}(\operatorname{End} X)$ кольца $\operatorname{End} X$.

3. Построить теорию блочно-жестких почти вполне разложимых групп X с циклическим регуляторным фактором, включающую их классификацию, построение $\operatorname{End} X$ и $\operatorname{Aut}(\operatorname{End} X)$, определение на группах кольцевых структур.

4. На класс локально почти вполне разложимых групп счетного ранга распространить теорию почти вполне разложимых групп, включающую обобщение понятия почти изоморфизма и доказательство аналога теоремы Арнольда о прямых разложениях.

Общая методика исследования. Используются методы теории абелевых групп, относящиеся к конечным группам и группам без кручения, а также специальные методы теории почти вполне разложимых групп, которые здесь распространены на почти вполне разложимые кольца. Вложение группы в её делимую оболочку приводит к эффективному использованию матричной техники. Определяющую роль в применении матричных методов играет традиционный подход линейной алгебры в комбинации с теорией чисел. Найден комбинаторный (графический) способ построения и классификации прямых разложений групп счетного ранга определенного класса. Развита новая техника параллельных перемещений групп без кручения в их общей делимой оболочке, что приводит к двойственности определений почти вполне разложимых структур и важным следствиям. Применяются общие методы теории колец и модулей.

Далее будут использоваться сокращенные формы записи: "пвр-группа" (почти вполне разложимая группа) и "црф-группа" (пвр-группа с циклическим регуляторным фактором); под "пвр-кольцом" и "црф-кольцом" понимаются кольца с соответствующими аддитивными структурами.

Рассматриваемые пвр-группы считаются группами *кольцевого типа*, то есть все прямые слагаемые ранга 1 их регуляторов изоморфны подгруппам группы рациональных чисел, являющимся кольцами с единицей.

Для определенности считаем, что пвр-группа X имеет регулятор A, естественно, ранги этих групп совпадают, $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(A)$. Слово "фактор" всегда означает регуляторный фактор, то есть конечную группу X/A. Её экспонента, $e = \exp X/A$, наименьшее натуральное число e со свойством $e(X/A) = 0$, называется *регуляторной экспонентой* группы X. Известно, что $\mathrm{End}\, X \subset \mathrm{End}\, A$.

Основными результатами работы являются следующие:

1. Установлено, что кольца эндоморфизмов почти изоморфных пвр-групп также являются почти изоморфными пвр-группами.

2. Для блочно-жесткой пвр-группы X доказано, что любой автоморфизм кольца $\mathrm{End}\, X$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}\, A$. Для случая p-примарного фактора получено разбиение кольца $\mathrm{End}\, A$ на $l+1$ непустые попарно дизъюнктные области инвариантности по отношению ко всем $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{End}\, X)$, где $\exp X/A = p^l$. В случае циклического фактора построена группа автоморфизмов кольца $\mathrm{End}\, X$.

3. Для блочно-жесткой пвр-группы X, содержащей вполне разложимую подгруппу A (не обязательно являющуюся регулятором), такую что $p = \exp(X/A)$ для некоторого простого p, получено наилучшее из возможных необходимое условие неразложимости, связанное только с числом $\mathrm{rk}(X/A)$.

4. Решена проблема классификации для блочно-жестких црф-групп и *полуправильных* коммутативных црф-колец с единицей, найден

критерий неразложимости, решена проблема определения кольцевых структур данного вида на группах. Для *правильных* колец получена теорема реализации.

5. Установлены двойственные связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов, дающие эффективный способ доказательства важных результатов как для групп конечного ранга (в Главе 4), так и счетного ранга (в Главе 5).

6. Определено понятие почти изоморфизма для групп без кручения счетного ранга и доказан аналог теоремы Арнольда о прямых разложениях блочно-жестких *локально почти вполне разложимых групп*, в случае *обобщенно циклического регуляторного фактора* для них построена графическая теория прямых разложений.

7. В классах блочно-жестких црф-групп (конечного ранга) и групп из п. 6. (счетного ранга) с обобщенно циклическим фактором доказана их определяемость кольцами эндоморфизмов с точностью до почти изоморфизма (теоремы типа Бэра-Капланского).

Таким образом, в диссертации основано и развито новое направление исследований: совместное изучение почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов. В качестве приложений получены эффективные методы исследования почти вполне разложимых коммутативных колец с единицей и обосновано распространение построенной теории на группы, почти вполне разложимые в локальном смысле (имеющие счетный ранг).

При этом доказан ряд теорем классификации, реализации для колец, типа Бэра-Капланского для групп, получены критерии неразложимости групп и колец.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Установленные в ней связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов расширяют представления об аддитивных структурах. Разработан общий подход, снимающий ограничения, связанные с конечностью рангов, и сформирован новый взгляд на прямые разложения, реализованный для локально почти вполне разложимых групп счетного ранга. Структурирована теория коммутативных пвр-колец с единицей, выяснено, что существование неизоморфных прямых разложений пвр-групп проявляется в многозначности определения на них кольцевых структур данного вида, причем сами кольца являются однозначно разложимыми.

Разработанные методы могут быть использованы в дальнейшем развитии теории абелевых групп, а также колец и модулей как в целом, так и при исследовании колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов (в том числе, кольцевых), в частности, модулей над дедекиндовыми кольцами.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международном семинаре "Компьютерная алгебра и информатика" в Московском Государственном Университете (2005), на Международных алгебраических конференциях в Москве (2000, 2004), С. Петербурге (1997, 2002), Екатеринбурге (2005), Новосибирске (1989), на Международной конференции по алгебраической комбинаторике во Владимире (1991), на Всероссийском Симпозиуме по Абелевым группам в Бийске (2005), на алгебраическом семинаре в МГУ (2005), на Всероссийской конференции "Фундаментальные исследования в технических университетах" в С. Петербургском Государственном Политехническом Университете (2006), на 4-ом Европейском математическом конгрессе (Швеция, 2004), на Европейских и международных алгебраических конференциях в Германии (1998, 1999, 2002), Италии (2002), на специальных конференциях по абелевым группам, кольцам и модулям в Германии (1993), Италии (1994, 1999), Ирландии (1998), а также на регулярных алгебраических семинарах в университетах Германии (Нюрнберг-Эрланген 2002, Эссен 2000), Швеции (Стокгольм 1998, Упсала 1998), Австралии (Сидней 1999, Перт 1999), США (Коннектикут 1999), на Нью-Йоркском семинаре по теории групп (1999).

Некоторые результаты диссертации вошли в книги:
A. Mader. "Almost completely decomposable abelian groups" , 2000,
П.А. Крылов, А.В. Михалев и А.А. Туганбаев "Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов" , 2006,
P. Krylov, A. Mikhalev and A. Tuganbaev "Endomorphism Rings of Abelian Groups" , 2003.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 15 работ [1] — [15].

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 273 страницах и состоит из введения, пяти глав, разделенных на 20 параграфов, и списка литературы, который содержит 98 наименований.

Содержание диссертации.

Во введении содержится общая характеристика диссертации, анализируются результаты, предшествующие появлению представленной работы, дается краткое содержание глав.

Глава 1 является вводной в теорию почти вполне разложимых групп, содержит базовые определения и важные известные результаты, составляющие фундамент данной работы. В этой главе устанавливается используемая далее система обозначений, в частности, $\operatorname{End} X^+$ всегда обозначает аддитивную группу кольца эндоморфизмов пвр-группы X, которая также является почти вполне вполне разложимой.

Все рассматриваемые группы — абелевы и редуцированные (не имеющие ненулевых делимых подгрупп), так как теория абелевых групп без кручения сводится к редуцированному случаю. Рангом абелевой группы без кручения X, обозначаемым $\operatorname{rk} X$, называется размерность ее делимой оболочки $\mathbb{Q}X = X \otimes \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ всегда обозначает поле или группу рациональных чисел).

Как обычно, $V \subset X$ означает, что V — подгруппа группы X, а $V_* = \{g \in X :$ существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $ng \in V\}$ обозначает сервантную оболочку подгруппы V в группе без кручения X. Подгруппа V *сервантна* в X, если $V_* = V$. Подгруппа V называется *вполне характеристической* подгруппой группы X, если ограничения на неё всех эндоморфизмов группы X являются эндоморфизмами группы V.

Любая почти вполне разложимая группа X ранга n содержит единственным образом определенную вполне разложимую подгруппу $R(X)$ конечного индекса (прямую сумму групп ранга 1), которая является ее вполне характеристической подгруппой и называется *регулятором* в X. В большинстве случаев A обозначает регулятор $R(X)$, тогда X/A — *регуляторный фактор* группы X.

Если в прямом (однозначно определенном с точностью до изоморфизма) разложении регулятора $A = \bigoplus_{i=1,\dots n} A_i$ в прямую сумму слагаемых ранга 1 любые две различные группы A_k и A_j $(k \neq j)$, либо изоморфны, либо удовлетворяют условию $\mathrm{Hom}(A_k, A_j) = \mathrm{Hom}(A_j, A_k) = 0$, то группы X и A называются *блочно-жесткими*, если при этом реализуется только вторая возможность, то X и A называются *жесткими* группами. Множество различных типов (классов изоморфизма) слагаемых A_i ранга 1 называется множеством *критических типов*, $T_{cr}(A)$, группы A и определяет ее разложение $A = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} A_\tau$ на τ-однородные компоненты, определенные однозначно для блочно-жесткой группы A. Всегда считается, что $T_{cr}(A)$ состоит из идемпотентных типов, то есть X — пвр-группа *кольцевого типа.*

Пусть $e = \prod_{p \in P} p^{l_p}$ — каноническое разложение *регуляторной экспоненты* $e = \exp X/A$ пвр-группы X (P — некоторое конечное множество простых чисел).

Если X/A является циклической группой, то X называется почти вполне разложимой группой с *циклическим регуляторным фактором*; если, в другом частном случае, X/A — примарная группа, то X называется почти вполне разложимой группой с *примарным регуляторным фактором*, и для нее P состоит из одного элемента.

В любой периодической (конечной) группе G её p-примарная компонента обозначается как $(G)_p$.

Традиционно, групповые характеристики, примененные к кольцу L, относятся к его аддитивной группе L^+, и только для случая "вполне разложимых колец" делается исключение и считается, что такое кольцо L является прямой суммой идеалов ранга 1, а не только группа L^+ представляется в виде прямой суммы подгрупп ранга 1. Нам понадобятся блочно-жесткие почти вполне разложимые кольца L (по отношению к операции сложения), в том числе те, которые имеют вполне разложимые подкольца G конечного индекса (то есть L^+/G^+ — конечная группа и G — прямая сумма идеалов ранга 1). Регулятором пвр-кольца называется регулятор его аддитивной группы. Прямое произведение колец L_i записывается в виде $\prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} L_i$.

Хорошо известно, что пвр-группа имеет *примарно-факторное представление*

$$X = \sum_{p\in P} X_{(p)} \tag{1}$$

в виде суммы пвр-групп $X_{(p)}$ с одним и тем же регулятором A и p-примарными регуляторными факторами $X_{(p)}/A$. С другой стороны,

$$\operatorname{End} X = \bigcap_{p\in P} \operatorname{End} X_{(p)}.$$

Это означает, что изучение групп с примарным регуляторным фактором и их колец эндоморфизмов является необходимым шагом в исследовании почти вполне разложимых групп в целом.

Отметим их *уровневую структуру*. Фиксируем p, и пусть $p^l = \exp X_{(p)}/A$ для некоторого натурального l. Обозначим $Y = X_{(p)}$ и введем $\mathbb{Q}A = A \otimes \mathbb{Q}$, делимую оболочку групп A и Y. Отождествляем A с $A \otimes 1 = \{a \otimes 1 \ : \ a \in A\}$ и для любого натурального k обозначаем подгруппу $A \otimes \frac{1}{p^k} = \{a \otimes \frac{1}{p^k} \ : \ a \in A\}$ группы $\mathbb{Q}A$ как $\frac{A}{p^k}$. Ясно, что $p^l \frac{A}{p^l} = A$ и $A \subset Y \subset \frac{A}{p^l}$. Тогда подгруппы $Y_k = Y \cap \frac{A}{p^k}$, $k = 0, 1, \ldots, l$ составляют *уровневую* цепь

$$Y = Y_l \supset Y_{l-1} \supset Y_{l-2} \supset Y_{l-3} \supset \ldots \supset Y_2 \supset Y_1 \supset Y_0 = A$$

пвр-группы $Y = X_{(p)}$ с примарным регуляторным фактором.

Поскольку почти вполне разложимые группы входят в более широкий класс Батлеровских групп, допускающих неизоморфные прямые разложения, они в большинстве случаях классифицируются только с точностью до почти изоморфизма — эквивалентности, которая слабее изоморфизма, но достаточно полно отражает свойства прямых разложений в отличие от квазиизоморфизма:

Определение. Пусть G и H — группы конечного ранга без кручения. Тогда G и H *почти изоморфны* ($G \cong_{nr} H$), если и только если для каждого простого p существуют мономорфизмы $\phi_p : G \longrightarrow H$ и $\psi_p : H \longrightarrow G$, для которых группы $H/G\phi_p$ и $G/H\psi_p$ конечны и $(H/G\phi_p)_p = 0 = (G/H\psi_p)_p$. $\square$

Теорема (Д.Арнольд, 1982). Если G и H — почти изоморфные абелевы группы без кручения конечного ранга и $G = G_1 \oplus G_2$, то $H = H_1 \oplus H_2$ для некоторых групп $H_1 \cong_{nr} G_1$, $H_2 \cong_{nr} G_2$. $\square$

Глава 1 заканчивается обоснованием необходимости отдельного рассмотрения пвр-групп с примарным регуляторным фактором, что и составляет содержание следующей главы.

Глава 2, как и все последующие, состоит из результатов автора.

Вводится класс $\mathcal{A}$ пвр-групп X, содержащих в качестве регулятора фиксированную вполне разложимую группу A, в этой главе дополнительно предполагается, что X/A — примарная группа. Важной является

Теорема 2.1.3 Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ и X/A, X'/A — примарные конечные группы. Если $X \cong_{nr} X'$, то $\operatorname{End} X$ и $\operatorname{End} X'$ почти изоморфны как абелевы группы. $\square$

Её обобщение на группы счетного ранга позволит в последней главе доказать для них аналог теоремы Арнольда.

Из того, что A является вполне характеристической подгруппой в X и $X \subset \mathbb{Q}A$, следует, что $\operatorname{End} X \subset \operatorname{End} A$ для групп $X \in \mathcal{A}$, поскольку любой эндоморфизм на X определяется образами элементов из A. Необходимым шагом в исследовании аддитивной структуры колец эндоморфизмов $\operatorname{End} X$ пвр-групп X является нахождение регулятора $R(\operatorname{End} X^+)$, что подготовлено **Теоремой 2.2.5**, из которой вытекает

Следствие 2.2.6 Пусть $X \in \mathcal{A}$ является блочно-жесткой пвр-группой с p-примарным регуляторным фактором X/A и $p^l = \exp X/A$. Тогда

$$R(\operatorname{End} X^+) = \operatorname{Hom}(X, A)^+$$

и регуляторная экспонента группы $\operatorname{End} X^+$ равна p^l. □

Отсюда, на основе классического результата из книги[25] Джекобсона о том, что любой автоморфизм полного матричного кольца над $\mathbb{Q}$ является внутренним, и с использованием предварительно доказанной с помощью матричной техники **Леммы 2.3.4**, предопределяющей многие дальнейшие результаты, получается

Теорема 2.3.5 Пусть X — блочно-жесткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа с регулятором $A = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} A_\tau$ и p-примарным регуляторным фактором X/A. Если $\mathcal{B} \in \operatorname{Aut}(\operatorname{End} X)$, то $\mathcal{B} \in \prod^{\otimes}_{\tau \in T_{cr}(A)} \operatorname{Aut}(\operatorname{End} A_\tau)$, т.е. $\mathcal{B}$ продолжается до (кольцевого) автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. □

Эта теорема является центральной во всем проведенном исследовании как имеющая самостоятельную значимость, так и во-многом определившая ход последующих рассуждений. В частности, в этой же главе на ее основе раскрывается уровневая структура группы $\operatorname{End} X^+$ и исследуется действие кольцевых автоморфизмов на $\operatorname{End} X$ следующими теоремами:

Теорема 2.5.4 Пусть X является блочно-жесткой пвр-группой кольцевого типа с регулятором A и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого числа p, и пусть $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Предположим, что для каждого целого k из интервала $[0, \quad l]$ группы X'_k и $\widetilde{X_k}$ определяются как $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$ и $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$, где $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$.

Тогда существует цепь

$$\mathcal{E} = {\mathcal{E}_A}^{(l)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(l-1)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(l-2)} \subset \ldots \subset {\mathcal{E}_A}^{(1)} \subset {\mathcal{E}_A}^{(0)} = \mathcal{E}_A,$$

в которой ${\mathcal{E}_A}^{(k)} = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$, и

$$p^{l-k}{\mathcal{E}_A}^{(k)} = p^{l-k}\mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}.$$

[25] Н. Джекобсон. Теория Колец, Москва, 1947.

$\square$

Теорема 2.5.6 Пусть X является блочно-жесткой пвр-группой кольцевого типа с регулятором A и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого числа p, и пусть $\mathcal{E} = \mathrm{End}\, X$, $\mathcal{E}_A = \mathrm{End}\, A$. Предположим, что ${\mathcal{E}_A}^{(k)} = \mathrm{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ для любого целого $k \in [0, \quad l]$, где $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$, $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$ и $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$.

Тогда

$$\mathcal{E}_A = ({\mathcal{E}_A}^{(0)} \setminus {\mathcal{E}_A}^{(1)}) \cup ({\mathcal{E}_A}^{(1)} \setminus {\mathcal{E}_A}^{(2)}) \cup \ldots \cup ({\mathcal{E}_A}^{(l-1)} \setminus {\mathcal{E}_A}^{(l)}) \cup {\mathcal{E}_A}^{(l)}$$

есть объединение попарно дизъюнктных непустых подмножеств, таких что ограничение любого $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ на каждое из них устанавливает взаимно однозначное соответствие между его элементами. $\square$

В конце главы доказывается теорема, дающая для групп некоторого специального вида наилучшее из возможных необходимое условие неразложимости (в том смысле, что при его нарушении группа может оказаться как разложимой так и неразложимой, в зависимости от других ее характеристик, что подтверждается специально подобранными примерами). Известно, что вопрос о том, является ли вполне разложимая подгруппа конечного индекса регулятором в пвр-группе, довольно сложен, и в данном случае важно, что в условии этого требования нет, что облегчает применение полученной теоремы:

Теорема 2.6.20 Пусть X является блочно-жесткой пвр-группой ранга n, содержащей вполне разложимую подгруппу A, максимальный ранг однородной компоненты которой равен m $(m \geqslant 2)$, и пусть X/A — элементарная p-группа ранга t. Тогда, если X неразложима, то $m < n/2$ и $m \leqslant t \leqslant n - m$. $\square$

В ее доказательстве используется матричный подход, согласующийся с тем, который применен в работе[26] С.Ф. Кожухова.

Следующим в порядке усложнения групповой структуры

[26] С.Ф. Кожухов. Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения с примарными факторами, Абелевы группы и модули, вып. 5, с. 42-55, Томск, 1985.

рассматривается класс групп с циклическим регуляторным фактором и начинается

Глава 3. На всем ее протяжении действует ограничение на регулятор A, который считается блочно-жесткой группой.

В **Теореме 3.2.11** получена классификация блочно-жестких црф-групп кольцевого типа с точностью до изоморфизма, согласующаяся с классификацией[27], полученной А.В. Блаженовым для некоторого класса модулей, к которому можно отнести рассматриваемые группы, но применительно к группам данная формулировка выглядит более предпочтительной. Она позволяет выделить из каждого класса почти изоморфизма некий особый класс изоморфизма, состоящий из *правильных црф-групп*. Это используется в последней части главы при классификации некоторого класса колец с почти вполне разложимой аддитивной структурой, так как оказалось, что все они являются правильными, рассматриваемые как группы.

Далее, применение теоремы 2.3.5 (которую мы назвали центральной), а точнее, ее следствия 2.3.6, приводит к матричному представлению группы автоморфизмов кольца $\operatorname{End} X$ для блочно-жесткой црф-группы X в **Теореме 3.3.7**.

Для црф-групп получены также матричные представления других предшествующих конструкций, в том числе, уровневой структуры.

Но есть результат, который имеет место только для групп конечного ранга, рассматриваемых в этой главе, — это теорема типа Бэра-Капланского (ей предшествует доказательство того, что почти изоморфизм групп из этого класса влечет изоморфизм их колец эндоморфизмов):

Теорема 3.5.14 Пусть X и Y — блочно-жесткие црф-группы кольцевого типа. Если $\operatorname{End} X \cong \operatorname{End} Y$, то $X \cong_{nr} Y$. □

В отношении групп без кручения определяемость кольцами эндоморфизмов до сих пор была установлена только в случае вполне

[27] А.В. Блаженов. Роды и сокращение модулей конечного ранга без кручения, Алгебра и Анализ, т. 7, вып. 6, с. 33-78, 1995.

разложимых[28] и векторных групп. Рассматриваемые в доказательстве этой теоремы кольца эндоморфизмов жестких црф-групп имеют правильную аддитивную структуру и относятся к классу коммутативных црф-колец с единицей.

В структурировании их общей теории (в последней части главы) возникли два направления, связанные с наличием или отсутствием в кольце K вполне разложимого подкольца (прямой суммы идеалов ранга 1) конечного индекса. Если такое подкольцо существует и как множество совпадает с регулятором группы K^+, то кольцо K называется *правильным*, а класс всех таких коммутативных колец с единицей обозначается $\mathcal{K}$. Отождествляя K с его изоморфной копией в $\mathrm{End}(K^+)$, подкольцом, состоящим из умножений (слева) на элементы из K, имеем вложение $K \subset \mathrm{End}(K^+)$, которое называется *регулярным представлением* кольца K. Для правильных колец получена

Теорема реализации 3.6.4 Пусть $K \in \mathcal{K}$ — кольцо с регулярным представлением $K \subset \mathrm{End}(K^+)$, и пусть R — регулятор в K^+. Тогда существует единственное разложение $R^+ = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} R_i$ на слагаемые ранга 1, такое что $K = \mathrm{End}(K^+) \cap \prod\limits_{i \in \mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(R_i^+)$. □

Для правильных и даже относящихся к более широкому классу $\widetilde{K}$ *полуправильных* колец получены представления некоторыми подкольцами колец эндоморфизмов их регуляторов, из которых выведены критерии изоморфизма и неразложимости (**Теоремы 3.6.9, 3.6.18, 3.6.19**).

Кроме того, доказывается необходимое и достаточное условие изоморфизма аддитивных групп колец из класса $\widetilde{\mathcal{K}}$ (в частности, из $\mathcal{K}$), которым решается проблема определения различных кольцевых структур данного вида на одной и той же группе (**Следствие 3.6.17**).

Следующая **Глава 4** является последней, в которой обсуждаются группы конечного ранга, а именно, пвр-группы из класса $\mathcal{A}$ с одним и тем

[28] А.М Себельдин. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов, Матем. заметки, том 11, вып. 4, с. 403-408, 1972.

же регулятором A, произвольной вполне разложимой группой кольцевого типа, и регуляторным фактором, не являющимся примарным.

Из упомянутого примарно-факторного представления пвр-группы

$$X = \sum_{p \in P} X_{(p)}$$

в виде суммы групп $X_{(p)}$ с p-примарными регуляторными факторами, легко получается, что

$$\mathcal{E} = \bigcap_{p \in P} \mathcal{E}_p,$$

где $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ и $\mathcal{E}_p = \operatorname{End} X_{(p)}$ для каждого $p \in P$. Этот факт используется в доказательстве **Теоремы 4.1.1**, обобщающей теорему 2.1.3 на группы с произвольным регуляторным фактором.

Этот же подход приводит к построению двух булевых алгебр, ассоциированных с X, атомами которых являются группы $X_{(p)}$, и, соответственно, кольца $\mathcal{E}_p$, и в них определены операции $\cap$ и $+$ в теоретико-групповом смысле. Тогда отображение $X_{(p)} \longrightarrow \mathcal{E}_p$, $p \in P$, определяет антиизоморфизм[29] этих алгебр.

Ключевым результатом этой главы является установление двойственного подхода к почти вполне разложимым структурам, который заключается в том, что группу можно рассматривать как пересечение групп, изоморфных $X_{(p)}$, а ее кольцо эндоморфизмов, наоборот, как сумму структур, аддитивно изоморфных соответствующим $\mathcal{E}_p$, $p \in P$:

Теорема двойственности 4.3.1 Пусть $X = \sum_{p \in P} X_{(p)} \in \mathcal{A}$. Канонические цепи

$$A \subset X \subset \frac{A}{e} \quad \text{и} \quad e\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_A,$$

совпадают со следующими,

$$\bigcap_{p \in P} X_{(p)} \quad \subset \quad \sum_{p \in P} X_{(p)} = \bigcap_{p \in P} \frac{X_{(p)}}{\hat{e}_p} \quad \subset \quad \sum_{p \in P} \frac{X_{(p)}}{\hat{e}_p} \quad \text{и} \tag{2}$$

[29] S. Koppelberg. Handbook on Boolean Algebras, *North-Holland*, 1989.

$$\bigcap_{p\in P}\hat{e}_p\mathcal{E}_p \quad\subset\quad \sum_{p\in P}\hat{e}_p\mathcal{E}_p=\bigcap_{p\in P}\mathcal{E}_p \quad\subset\quad \sum_{p\in P}\mathcal{E}_p \quad \text{соответственно,} \tag{3}$$

где $e_p=\exp X_{(p)}$, $\hat{e}_p=\prod_{q\in P,\ q\neq p}e_q$ для каждого $p\in P$. □

Отсюда получается обобщение центральной теоремы 2.3.5 из Главы 2 на группы с произвольным регуляторным фактором:

Теорема 4.3.2 Пусть $X=\sum_{p\in P}X_{(p)}$ является блочно-жесткой пвр-группой кольцевого типа. Тогда любой автоморфизм кольца $\mathcal{E}=\operatorname{End}X$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A=\operatorname{End}A$, более того, $\operatorname{Aut}\mathcal{E}=\bigcap_{p\in P}\operatorname{Aut}\mathcal{E}_p$. □

Этим завершается построенная в работе теория, связывающая почти вполне разложимые группы и кольца конечного ранга, которая будет распространена в последней главе на группы счетного ранга.

В **Главе 5** сформулировано определение почти изоморфизма для групп произвольного ранга, которое совпадает с изоморфизмом, если рассматриваемые группы вполне разложимы, и совпадает с традиционным почти изоморфизмом в случае групп конечного ранга:

Определение 5.1.2 Пусть G и H — абелевы группы без кручения. Тогда G и H называются **почти изоморфными**, $G\cong_{nr}H$, если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p: G\to H$ и $\Psi_p: H\to G$, такие что

1. группы $H/G\Phi_p$ и $G/H\Psi_p$ являются периодическими;
2. $(H/G\Phi_p)_p=0=(G/H\Psi_p)_p$;
3. для любых сервантных подгрупп конечного ранга $G'\subseteq G$ и $H'\subseteq H$ фактор-группы $(G'\Phi_p)_*^H/G'\Phi_p$ и $(H'\Psi_p)_*^G/H'\Psi_p$ являются конечными. □

Вводится класс $\mathcal{C}'$ блочно-жестких локально почти вполне разложимых групп счетного ранга (все вполне характеристические сервантные подгруппы которых конечного ранга являются пвр-группами), и для него доказывается аналог теоремы 2.1.3 из Главы 2. Отсюда получается

Теорема 5.2.4 (***Главный результат о прямых разложениях локально почти вполне разложимых групп***)

Пусть X и Y — почти изоморфные группы из класса $\mathcal{C}'$. Если $X = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} X_i$, то существует разложение $Y = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} Y_i$, такое что $X_i \cong_{nr} Y_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$. $\square$

И в завершение, для блочно-жестких локально почти вполне разложимых групп счетного ранга с обобщенно циклическим регуляторным фактором (все вполне характеристические сервантные подгруппы которых конечного ранга являются црф-группами) доказывается **Теорема 5.3.14** об их определяемости кольцами эндоморфизмов с точностью до почти изоморфизма. При этом используются результаты глав 2, 3 и теоремы 4.3.1 и 4.3.2.

Также для таких групп строится комбинаторная (графическая) теория прямых разложений, из которой непосредственно вытекает известная теорема[30] Корнера.

Таким образом, совместное использование теорем 2.1.3, 2.3.5, 4.3.1, 4.3.2 составляет новый подход к исследованию групп и колец, имеющих почти вполне разложимую структуру (или почти вполне разложимую структуру в локальном смысле), который применен в последней главе.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту профессору Александру Александровичу Фомину за постоянное внимание к работе и данные им полезные советы.

За введение в проблематику теории абелевых групп, связанную с их прямыми разложениями, и руководство кандидатской диссертацией автор искренне благодарит профессора Анатолия Владимировича Яковлева.

[30] A. L. S. Corner. A note on rank and decomposition of torsion-free abelian groups, Proceedings Cambridge Philos. Soc. **57**, pp. 230 – 233, 1961; **66**, pp. 239 – 240, 1969.

Важным стимулирующим фактором в работе явилась возможность содержательного обсуждения современного состояния теории групп, колец и модулей с профессором Самуилом Яковлевичем Гриншпоном, профессором Петром Андреевичем Крыловым, профессором Александром Васильевичем Михалевым, доцентом Анной Петровной Мишиной, профессором Тони Корнером, профессором Ласло Фуксом, общение с которыми всегда вспоминается с удовольствием и большой благодарностью.

Отдельно благодарю всех тех, с кем была связана совместная работа над статьями, Анатолия Владимировича Яковлева, Адольфа Мадера, Рюдигера Гобеля, Филла Шультца, Джорджа Иванова, за интересное и полезное взаимодействие в исследовании абелевых групп.

Все основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Е. Благовещенская.* Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жестких почти вполне разложимых групп // *Фундаментальная и прикладная математика,* т. 10, вып. 2, с. 23 - 50, 2004.

2. *Е. Благовещенская.* Двойственная структура почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов // *Успехи матем. наук,* т. 61, вып.2, с. 159-160, 2006.

3. *Е. Благовещенская.* Теоремы реализации и классификации для одного класса колец без кручения конечного ранга // *Успехи матем. наук,* т. 61, вып.4, с. 183-184, 2006.

4. *Е. Благовещенская.* Почти вполне разложимые группы с примарным регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов // *Фундаментальная и прикладная математика,* т. 12, вып. 2, с. 17 - 38, 2006.

5. *Е. Благовещенская.* Двойственность теории почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов // Научно-технические ведомости СпбГТУ, **1**, с. 69-72, 2006.

6. *Е. Благовещенская.* Почти вполне разложимые группы и кольца // *Фундаментальная и прикладная математика,* т. 12, вып. 8, с. 3 - 27, 2006.

7. *Е. Благовещенская.* Определяемость абелевых групп без кручения счетного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов // *Фундаментальная и прикладная математика,* т. 13, вып. 1, с. 31 - 43, 2007.

8. *Е. Благовещенская.* Двойственные связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов // *Современная математика и ее приложения*, т. 13, Алгебра, 2004 (пер. Journal of Mathematical Sciences, Kluwer Academic/Plenum Publishers, vol. 131, issue 5, pp. 5948 – 5961, 2005).

9. *Е. Благовещенская.* Прямые разложения локально почти вполне разложимых групп счетного ранга // Чебышевский сборник, т. 6. вып. 4. с. 24-47, 2005.

10. *Е. Благовещенская.* Графическое истолкование некоторых абелевых групп без кручения конечного ранга // Прикладная Математика, *Труды С. Петербургского Политехнического Университета*, # 461, с. 53-59, 1996.

11. *E. Blagoveshchenskaya.* Classification of a class of almost completely decomposable groups // Rings, Modules, Algebras and Abelian Groups (Lecture notes in pure and applied mathematics series/236), pp. 45 - 54, 2004.

12. *E. Blagoveshchenskaya.* Direct decompositions of almost completely decomposable abelian groups // Abelian Groups and Modules (Lecture notes in pure and applied mathematics series/182), pp. 163-179, 1996.

13. *E. Blagoveshchenskaya, A. Mader.* Decompositions of almost completely decomposable abelian groups // Contemporary Mathematics, 171, pp. 21-36, 1994.

14. *E. Blagoveshchenskaya, R. Göbel.* Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank // Comm. in Algebra 30, # 7, pp. 3403 - 3427, 2002.

15. *E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz.* The Baer-Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemporary Mathematics, 273, pp. 85 - 93, 2001.

Из работы [13] в диссертацию включены только результаты о прямых разложениях, принадлежащие лично автору, которые распространены в [14] на случай групп счетного ранга, будучи до этого аннонсированными в тезисах [22] (совместным результатом работы [14] является характеризация групп рассматриваемого класса). В [15] доказательство теоремы типа Бэра-Капланского для жестких пвр-групп получено первым автором, инициировавшим данное исследование, этот результат распространен на блочно-жесткие группы совместно с другими авторами.

Содержание докладов отражено в опубликованных тезисах:

16. *Е. Благовещенская.* Связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов // *Абелевы группы.* Труды Всероссийского симпозиума (2006), с. 9–10.

17. *Е. Благовещенская.* Почти вполне разложимые группы и их кольца эндоморфизмов // *Фундаментальные исследования в технических университетах.* Материалы X Всероссийиской конференции по проблемам науки и высшей школы (2006), с. 82–84.

18. *Е. Благовещенская.* Почти изоморфизм для абелевых групп без кручения конечного ранга // *Абелевы группы.* Труды Всероссийского симпозиума (2005), с. 7–9.

19. *E. Blagoveshchenskaya.* Automorphisms of endomorphism rings of a class of torsion-free abelian groups of finite rank // Международная алгебраическая конференция (2005), Екатеринбург, с. 84-85.

20. *E. Blagoveshchenskaya.* Classification of almost completely decomposable groups of some class // Международная алгебраическая конференция памяти З.И. Боревича, С. Петербург, (2002), с. 83-84.

21. *E. Blagoveshchenskaya.* Combinatorial structure theory of some torsion-free abelian groups // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (2000), p. 11, Moscow, Russia.

22. *Е. Благовещенская.* Direct decompositions of torsion-free abelian groups of countable rank // Международная алгебраическая конференция памяти Д.К. Фаддеева (1997), С. Петербург, с. 28–29.

23. *E. Blagoveshchenskaya.* Direct decompositions of torsion-free almost completely decomposable abelian groups of finite rank // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева, Новосибирск (1989), с. 17.