МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи
УДК 517.958

Чечкин Григорий Александрович

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ГРАНИЧНОГО УСРЕДНЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гадыльшин Рустем Рашитович
	доктор физико-математических наук, профессор Назаров Сергей Александрович
	доктор физико-математических наук, профессор Шкаликов Андрей Андреевич
Ведущая организация:	Институт проблем механики РАН

Защита состоится 13 апреля 2007 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 13 марта 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85
доктор физико-математических наук,
профессор Т.П.Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Сингулярно возмущенные краевые задачи (уравнения с сингулярно возмущёнными коэффициентами, сингулярно возмущённые граничные условия, задачи в сингулярно возмущённых областях и т.д.) привлекают внимание исследователей на протяжении длительного времени. Интерес к этим задачам вызывает тот факт, что предельные (усреднённые) задачи, как правило, имеют другую структуру (другое уравнение, другие граничные условия, задаются в других областях). Для исследования сингулярно возмущённых задач оказались наиболее эффективными инструментами — торил усреднения и асимптотические методы. Отметим труды в этой области таких учёных, как В.М.Бабич, Н.С.Бахвалов, A.Bensoussan, Н.Н.Боголюбов, В.С.Булдырев, В.Ф.Бутузов, А.Б.Васильева, M.D. Van Dyke, М.И. Вишик, Р.Р. Гадыльшин, G.Dal Maso, В.В.Жиков, А.М.Ильин, Г.А.Иосифьян, С.М.Козлов, О.А.Ладыженская, J.-L. Lions, С.А.Ломов, Л.А. Люстерник, В.Г. Мазья, В.А. Марченко, В.П. Маслов, Ю.А.Митропольский, Е.Ф.Мищенко, F.Murat, С.А.Назаров, О.А.Олейник, Г.П.Панасенко, G.Papanicolau, Б.А.Пламеневский, Л.С.Понтрягин, А.Л.Пятницкий, Н.Х.Розов, E. Sánchez-Palencia, И.В.Скрыпник, L.Tartar, А.Н.Тихонов, М.Ф.Федорюк, Е.Я.Хруслов, А.С.Шамаев.

В диссертационной работе рассматриваются задачи в областях с сингулярной плотностью около границы. Предполагается, что сингулярных уплотнений (“концентрированных масс”) — много. Их диаметр, а также расстояние между ними являются малыми параметрами, а плотность — большим параметром. В зависимости от соотношения между этими параметрами выводятся усреднённые задачи и строятся асимптотики собственных элементов исходных задач.

Поведение тел с неоднородной плотностью достаточно сложное и его изучение представляется интересной задачей, которая не может быть успешно решена без соответствующего математического аппарата. Вопрос о поведении тел, нагруженных присоединенными или концентрированными массами, интересовал исследователей давно, особенно в связи с многочисленными приложениями, например, в технике (авиации, космической технике, станкостроении, автомобилестроении). На разных уровнях строгости были получены формулы, описывающие эффективное поведение таких тел. Отметим недавние исследования, проведенные на физическом уровне строгости, которые касались вопросов асимптотического поведения струн[1],

[1] *Erol H.* “Vibration analysis of stepped-pipe strings for mining from deep-sea floors” // Ocean Engineering. 2005. V. 32. № 1. P. 37–55.

балок[2] [3] и пластин[4] с конечным числом концентрированных масс. С появлением серьёзного математического аппарата интерес к таким задачам только усиливается. Оказывается, что математические модели задач в областях с сингулярной плотностью связаны с исследованием тонких спектральных свойств довольно сложных дифференциальных операторов.

Первая математическая работа (А.Н. Крылов[5]), положившая начало глубоким исследованиям в этой области, опубликована в 1913 году. В статье автор рассматрел задачу о колебаниях струны с концентрированной массой, сосредоточенной в точке. В приложении к главе 2 книги А.Н. Тихонова, А.А. Самарского[6] изучается та же задача о собственных частотах колебаний струны, нагруженной сосредоточенной массой в одной точке. Там рассматривается предельное поведение решений задачи при стремлении массы к нулю и бесконечности. В конце 70-х годов E. Sánchez-Palencia рассмотрел задачу[7], где присоединённая к системе масса сконцентрирована в ε-окрестности внутренней точки, ε — малый параметр, описывающий концентрацию и размер массы. В этой работе были использованы методы спектральной теории возмущений.

Другой подход был предложен в работах О.А.Олейник[8][9]. Базировался этот подход на введении нового основного параметра колебательных систем с локально присоединёнными массами — отношения присоединённой массы к массе всей системы. При этом удалось описать локальные колебания системы вблизи сосредоточенной массы. Подробное обоснование модели Олейник — Sánchez-Palencia, а также анализ размерностей в задаче о спектральных свойствах колебательных систем с присоединёнными массами сделал Ю.Д. Головатый[10].

---

[2] *Bapat C.N., Bapat C.* “Natural frequencies of a beam with nonclassical boundary-conditions and concentrated masses”// J. Sound Vibration. 1987. V. 112. № 1. P. 177–182.

[3] *Naguleswaran S.* “Transverse vibrations of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying several particles” // Intern. J. Mech. Sci. 2002. V. 44. № 12. P. 2463–2478.

[4] *Achong A.* “Vibrational analysis of circular and elliptic plates carrying point and ring masses and with edges elastically restrained” // J. Sound Vibration. 1995. V. 183. № 1. P. 157–168.

[5] *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. // Известия Николаевской морской академии. 1913. Вып.2. С. 325–348.

[6] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

[7] *Sánchez-Palencia E.* Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of system with concentrated masses. // In: Trends and Application of pure Math. to Mechanics. Lecture notes in Phisics, 195, Springer Verlag, Berlin, 1984, p. 346–368.

[8] *Олейник О.А.* О спектрах некоторых сингулярно возмущенных операторов //УМН. 1987. Т. 42. Вып.3. С. 221–222.

[9] *Олейник О.А.* О собственных колебаниях тел с концентрированными массами. В кн. Современные проблемы прикладной математики и математической физики. М.: Наука, 1988, с.101–128.

[10] *Головатый Ю.Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами; Дисс. к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1988.

В работах О.А. Олейник[11], Т.С.Соболевой[12], Ю.Д.Головатого[13], С.А. Назарова[14][15] Sánchez-Palencia[16], H. Tchatat, J.Sanchez-Hubert[17] рассмотрены различные задачи для оператора Лапласа и системы теории упругости с различными краевыми условиями в случае конечного числа масс. В работах M.Lobo[18], M$^{\underline{a}}$E. Pérez[19] рассматривается асимптотика колебаний тела, имеющего много небольших включений большой плотности, расположенных периодически вдоль границы (их количество растёт при переходе к пределу). В этих работах разобрано много различных случаев, которые характеризуются размерностью пространства и плотностью маленьких включений. Предполагается, что расстояние между массами много меньше, чем их диаметр. В этом предположении была доказана слабая сходимость решений задач к решениям предельных задач, сходимость собственных значений, получены оценки отклонения решений и собственных элементов предельных задач от, соответственно, решений и собственных элементов исходных задач.

Во всех этих моделях предполагалось, что закон колебания груза или уплотнений должен описываться теми же уравнениями, которыми описываются колебания самой системы. В статье В. Рыбалко[20] рассматривается задача для линейной стационарной системы теории упругости в областях с концентрированными массами. Рассмотрены различные случаи поведения собственных элементов таких задач. В работе рассматривается ситуация, когда включения достаточно жёсткие. При этом законы колебания тела и масс — различны.

Отметим также работу Ю.Д.Головатого[21], где впервые применен ВКБ-

[11] *Олейник О.А.* О частотах собственных колебаний тел с концентрированными массами. В кн. Функциональные и численные методы математической физики. Киев: Наукова думка, 1988, с.165–171.

[12] *Олейник О.А., Соболева Т.С.* О собственных колебаниях неоднородной струны с конечным числом присоединенных масс. // УМН. 1988. Т.43. № 4. С. 187–188.

[13] *Головатый Ю.Д.* О собственных колебаниях и собственных частотах упругого стержня с присоединенной массой. //УМН. 1988. Т.43. № 4. С. 173–174.

[14] *Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций в задачах о колебаниях среды с сингулярным возмущением плотности. //УМН. 1988. Т.43. № 5. С. 189–190.

[15] *Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой. // Сиб. мат. журнал. 1988. Т.29. № 5. С. 71–91.

[16] *Sánchez-Palencia E., Tchatat H.* Vibration de systèmes elastiques avec masses concentrées. // Rendiconti del Seminario matematico della Universita e politecnico di Torino. 1984. V. 42. № 3. P. 43–63.

[17] *Leal C., Sanchez-Hubert J.* Perturbation of the Eigenvalue of a Membrane with a Concentrated Mass. // Quarterly Appl. Math. 1989. V. XLVII. № 1. P. 93–103.

[18] *Lobo M., Pérez M$^{\underline{a}}$E.* On Vibrations of a Body With Many Concentrated Masses Near the Boundary. // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 1993. V. 3. № 2. P. 249–273.

[19] *Lobo M., Pérez M$^{\underline{a}}$E.* The skin effect in vibrating systems with many concentrated masses // Math. Methods Appl. Sci. 2001. V. 24. № 1. P. 59–80.

[20] *Rybalko V.* Vibration of Elastic Systems with a Large Number of Tiny Heavy Inclusions // Asymptotic Analysis. 2002. V. 32. N 1. P. 27–62.

[21] *Golovaty Yu. D.* On WKB–approximation of high frequency vibrations of a singular perturbed string // Proc. of Int. Conf. “Nonlinear partial differential equations”. – Kiev, August 26–30. IX. 1997. – P. 62.

метод для задач с концентрированными массами, позволяющий более точно построить схему поведения собственных чисел в окрестности предельных точек. В этой работе рассматривалась струна с произвольным возмущением плотности и построена асимптотика глобальных колебаний.

Результаты настоящей диссертации являются продолжением и обобщением исследований задач в областях с сингулярными плотностями. Разобраны новые случаи, для которых применены как стандартные, так и новые методы исследования, и классифицированы возможные ситуации, возникающие в таких моделях. Диссертационная работа является естественным развитием более ранних результатов автора.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-01-00138-а, 06-01-00441-а и грантом Президента РФ для ведущих научных школ НШ-2538.2006.1.

Цель работы.

Целью работы является исследование задач в областях с сингулярной плотностью, классификация возможных случаев, построение асимптотик собственных значений и собственных функций как в случае простого собственного значения, так и в случае кратного собственного значения.

Целью работы является также доказательство теоремы усреднения для квадратичного операторного пучка при наличии концентрированных масс и исследование асимптотики собственных значений такого пучка.

Также целью работы является исследование поведения полюсов аналитического продолжения решений задач в неограниченных областях с сингулярным возмущением плотности и доказательство сходимости этих полюсов к собственным значениям усреднённой задачи в ограниченной области.

Методика исследования.

В диссертации используются методы согласования асимптотических разложений, методы теории усреднения, качественной теории дифференциальных операторов в частных производных, функционального анализа, элементы теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них следующие:

- Выявлена количественная и качественная зависимость собственных значений исходной задачи от параметров массы. Построены явные формулы для членов асимптотического разложения, которые непосредственно выявляют влияние массы.

- Впервые исследована задача об усреднении операторного пучка в области с концентрированными массами.

- Впервые рассмотрена задача усреднения в неограниченной области с концентрированными массами. Доказана сходимость полюсов аналитического продолжения решения к собственным значениям усреднённой задачи в ограниченной области.

- Проведена классификация возникающих случаев. Рассмотрены случаи различной размерности пространства, различных плотностей масс и различной частоты их расположения.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер. Развитые в работе подходы могут быть применены к более общим задачам в областях с сингулярной плотностью и другим задачам граничного усреднения. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров: МГУ, Механико-математический факультет: семинар под руководством академика Олейник О.А., семинар под руководством проф. В.В.Жикова, проф. А.С.Шамаева, проф. Т.А.Шапошниковой, семинар под руководством проф. В.А.Кондратьева, проф. В.М. Миллионщикова, проф. Н.Х.Розова, семинар под руководством проф. В.А.Кондратьева, проф. Е.В. Радкевича, семинар под руководством проф. Б.Е.Победри; МИРАН им. В.А. Стеклова: семинар под рук. проф. А.К.Гущина, проф. В.П.Михайлова; ПОМИРАН им. В.А. Стеклова: семинар под рук. проф. М.С.Бирмана; МАИ: семинар под рук. проф. А.Л. Скубачевского; Институт математики с ВЦ УНЦ РАН: семинар по дифференциальным уравнениям математической физики под руководством проф. Л.А.Калякина и проф. В.Ю.Новокшенова; НГУ: семинар под руководством проф. В.Н.Врагова; Институт математики СО РАН им. С.Л.Соболева: семинар лаборатории обратных задач мат. физики под руководством проф. Ю.Е.Аниконова; кроме того, на заседаниях семинаров университета Блеза Паскаля (2003, Клермон-Ферран, Франция), Белградского университета (2002, Белград, Югославия), Пенсильванского университета (2002, Стейт Каллидж, США), Первого Римского университета "Ла Сапиенца" (2001, Рим, Италия), политехнического университета города Турина (2001, Италия), университета Жана Моне (2001, 2003, Сант-Этьен, Франция), университета города Оулу (2001, 2003, Финляндия), технического университета города Люлео (2000, 2001, 2003, Швеция), университета Кантабриа (2000, Сантандер, Испания), университета города Айзу (1999, Япония), университета Юты (1998, 2002, Солт Лейк Сити, США), университета Пьера и Марии Кюри (1997, 2003, 2004, Париж, Франция), Коллежа де Франс (1996, Париж, Франция), Курантовского института математических наук (1995, Нью Йорк, США), университета Миннесоты (1995, Миннеаполис, США).

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях: Совместные заседания семинара им. И.Г. Петровского и Московского Математического общества (конференции И.Г.Петровского), Москва, МГУ, Механико-математический факультет (1989 – 2004 г.); Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной математики", посвящённая памяти Н.С.Бахвалова (Москва, 28 - 29 августа 2006 г.); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10 - 15 июля 2006 г.) - пленарный доклад; Международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышёва и их приложения в современной науке" (Обнинск, 3-я конференция: 14 - 18 мая 2006 г.; 1-ая конференция: 24 - 18 мая 2002 г.); Международная Уфимская зимняя математическая и физическая школа (Уфа, 30 ноября - 6 декабря 2005 г.) - пленарный доклад; Международная школа по течению и переносу через сложные структуры (Обервольфах, Германия, 30 октября - 5 ноября 2005 г.); Международная конференция "Многомасштабные задачи и асимптотический анализ" (Нарвик, Норвегия, 22 - 26 июня 2004 г.); 5-й Международный конгресс по индустриальной и прикладной математике (Сидней, Австралия, 7 - 11 июля 2003 г.); 13-ый Международный коллоквиум по дифференциальным уравнениям (Пловдив, Болгария, 18 - 23 августа 2002 г.) - пленарный доклад; Международная конференция "Асимптотики в дифференциальных уравнениях", посвящённая 70-летию академика А.М.Ильина (Уфа, 26 -30 мая 2002); Международная конференция "Усреднение и приложения в науке о материалах" (Тимишоара, Румыния, 15 - 19 сентября 2001 г.) - пленарный доклад; Международная конференция "Многомасштабные задачи в науке и технологии" (Дубровник, Хорватия, 3 - 9 сентября 2000 г.) - приглашённый доклад; Международная школа по асимптотическому и численному анализу структур и неоднородных сред (Санкт-Петербург, 26 - 30 июня 2000 г.) - приглашённый доклад; Международная школа "Многомасштабные задачи и усреднение" (Гейдельберг, Германия, 29 ноября - 4 декабря 1999 г.) - приглашённый доклад; 3-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 22 - 27 июня 1998 г.); Международный коллоквиум "Усреднение и пористые среды" (Марсель, Франция, 24 - 28 июня 1996 г.) - пленарный доклад; Международный коллоквиум EurHomogenization "Усреднение и приложения в науке о материалах" (Ницца, Франция, 6 - 10 июня 1995 г.) - пленарный доклад; Международная конференция, посвященная 90-летию академика С.М. Никольского (Москва, 27 апреля - 3 мая 1995 г.);

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 24 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-24].

Структура и объем работы. Диссертация занимает 247 страниц текста и состоит из введения, трёх глав, разбитых на девять параграфов и списка литературы, включающего 200 наименований. Нумерация формул, теорем и лемм тройная – номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 3.2.1 – лемма 1 второго параграфа третьей главы.

Основное содержание работы.

Первая глава. В первой главе рассматривается спектральная задача для оператора Лапласа в ограниченной области с большим количеством "лёгких" концентрированных масс на границе. Доказана теорема усреднения, получены оценки отклонения решений и собственных элементов такой задачи от решений и собственных элементов, соответственно, усреднённой задачи. Также строятся полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций.

В **первом параграфе** ставится задача в ограниченной области с лёгкими концентрированными массами около границы.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$, лежащая в верхней полуплоскости, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, при этом Γ_4 — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ на оси абсцисс, имеющий микронеоднородную структуру, $\Gamma_4 = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, а Γ_2 и Γ_3 принадлежат прямым $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_1 = \frac{\pi}{2}$, соответственно. Здесь $\varepsilon = \frac{1}{2\mathbf{N}+1}$ — малый параметр, $\mathbf{N}$ — натуральное число, $\mathbf{N} \gg 1$. Опишем подробнее мелкомасштабную структуру Γ_4. Пусть $\gamma = \{\zeta \ : \ -1 < \zeta_1 < 1, \zeta_2 = 0\}$, $\Gamma = \{\zeta \ : \ -\infty < \zeta_1 < -1, 1 < \zeta_1 < +\infty, \zeta_2 = 0\}$ в переменных $\zeta = \frac{x}{a\varepsilon}$, при этом $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}} \{x \in \Gamma_4 \ : \ -1 < \frac{x_1}{a\varepsilon} - \frac{\mathbf{n}\pi}{a} < 1, \ \}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_4 \backslash \gamma_\varepsilon$. Пусть $\Pi = \{\xi \ : \ -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \frac{\pi}{2}, \xi_2 > 0\}$ — полуполоса в пространстве $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, $\Sigma = \{\xi \ : \ -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < 0, 0 < \xi_1 < \frac{\pi}{2}, \xi_2 = 0\}$, а B — полукруг $\{\zeta \ : \ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 < 1, \zeta_2 > 0\}$ в пространстве $\zeta = \frac{\xi}{a}$.

Будут также использоваться следующие обозначения. Пусть B^a — полукруг $\{\xi \ : \ \xi_1^2 + \xi_2^2 < a^2, \xi_2 > 0\}$, $\gamma^a = \{\xi \ : \ -a < \xi_1 < a, \xi_2 = 0\}$, $\Gamma^a = \{\xi \ : \ -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < -a, a < \xi_1 < \frac{\pi}{2}, \xi_2 = 0\}$ в переменных $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$.

Обозначим $B_\varepsilon^{\mathbf{n}} = \{x \in \Omega \ : \ (\frac{x_1}{a\varepsilon} - \frac{\mathbf{n}\pi}{a})^2 + (\frac{x_2}{a\varepsilon})^2 < 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \cup B_\varepsilon^{\mathbf{n}}$, соответственно, $\gamma_\varepsilon^{\mathbf{n}} = \{x \in \Gamma_4 \ : \ -1 < \frac{x_1}{a\varepsilon} - \frac{\mathbf{n}\pi}{a} < 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$, т.е. $\gamma_\varepsilon = \cup\gamma_\varepsilon^{\mathbf{n}}$.

Рассматриваются два случая:

- случай **часто расположенных масс**, т.е.

$$a = const;$$

- случай **редко расположенных масс**, т.е. $a(\varepsilon)$ является функцией от ε такой, что $a(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln a = 0. \tag{1}$$

Целью параграфа является построение асимптотики при $\varepsilon \to 0$ собственных элементов следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases} \tag{2}$$

где $\rho_\varepsilon(x)$ — плотность, имеющая вид в первом случае

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{в } \Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon, \\ (a\varepsilon)^{-m} \quad \text{в } B_\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

а во втором случае —

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{в } \Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon, \\ 1 + (a\varepsilon)^{-m} \quad \text{в } B_\varepsilon. \end{cases} \tag{4}$$

Всюду далее рассматривается $0 < m < 2$ — постоянная величина. Будем называть множества $B_\varepsilon^{\mathbf{n}}$ — *концентрированными массами.* Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda u_0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ u_0 = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_4, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases} \tag{5}$$

Во **втором параграфе** на основе схемы из работы Р.Р.Гадыльшина[22] и результатов из работы автора[23] доказывается теорема усреднения и выводятся оценки.

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} -\Delta U_\varepsilon = \lambda \rho_\varepsilon U_\varepsilon + f \quad \text{при } x \in \Omega, \\ U_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases} \tag{6}$$

где $\rho_\varepsilon(x)$ имеет вид (3) в случае $a = const$ и вид (4) в случае малого a, и предельная (усреднённая) задача

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = \lambda U_0 + f \quad \text{при } x \in \Omega, \\ U_0 = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_4, \\ \frac{\partial U_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases} \tag{7}$$

---

[22] *Гадыльшин Р.Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. № 4. С. 640–652.

[23] *Чечкин Г.А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе “лёгких” концентрированных масс. Двумерный случай. // Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69. № 4. С. 161–204.

Решение задач (2), (5), (6) и (7) будем понимать в обобщённом смысле.

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Обозначим через $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$ соответственно нормы функции u в пространствах $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$.

Доказаны следующие три утверждения.

Теорема 1.2.1 *Пусть $f \in L_2(\Omega)$, K — произвольный компакт на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащий собственных значений предельной задачи (5). Тогда*

1. *существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и любом $\lambda \in K$ решение задачи (6) существует и единственно, а также справедлива равномерная по ε и λ оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C\|f\|_0, \tag{8}$$

   где C не зависит также и от f;

2. *для решений задач (6) и (7) имеет место сходимость*

$$\|U_\varepsilon - U_0\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{9}$$

Теорема 1.2.2 *Пусть λ_0 — собственное значение предельной задачи (5). Тогда*

1. *существует собственное значение λ_ε исходной задачи (2), сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$;*

2. *если кратность λ_0 равна N, то к нему сходится N собственных значений исходной задачи (с учётом совокупной кратности).*

Теорема 1.2.3 *Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Если кратность собственного значения λ_0 предельной задачи (5) равна N, то*

1. *для любого λ близкого к λ_0 и решения U_ε краевой задачи (6) справедлива равномерная оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C\frac{\|f\|_0}{\prod\limits_{j=1}^{N} |\lambda_\varepsilon^j - \lambda|},$$

   где $\lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^N$ — собственные значения задачи (2), сходящиеся к λ_0.

2. *если решение U_ε задачи (6) ортогонально в $L_2(\Omega)$ собственной функции u_ε^i задачи (2), соответствующей λ_ε^i, то имеет место оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C\frac{\|f\|_0}{\prod\limits_{j=1; j\neq i}^{N} |\lambda_\varepsilon^j - \lambda|}.$$

В **третьем параграфе** на основе метода согласования асимптотических разложений (см. например, книгу А.М.Ильина[24]) строятся полные асимптотические разложения в случае часто расположенных масс как для случая простого собственного значения предельной задачи, так и для случая кратного собственного значения.

Пусть λ_0 — простое собственное значение. Перенумеруем множество $\left\{1+i+(2-m)j\right\}_{i,j=0}^{\infty}$ для фиксированного m в порядке возрастания: $1=\varsigma_1<\varsigma_2<\cdots$. Легко видеть, что $\varsigma_2=2$ при $0<m\le 1$, а $\varsigma_2=3-m$ при $1<m<2$.

Теорема 1.3.1. *Асимптотика собственных значений и соответствующих собственных функций имеет вид*

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_0+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{\varsigma_i}\lambda_{\varsigma_i}, \tag{10}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{\varsigma_i}u_{\varsigma_i}(x),\ x_2>\varepsilon^\beta,\quad \mathcal{U}_\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{\varsigma_i}v_{\varsigma_i}\left(\frac{x}{\varepsilon};x_1\right),\ 0\le x_2<\varepsilon^\beta \tag{11}$$

в норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$, $0<\beta<1$ *— произвольное число. Здесь* $u_{\varsigma_k}\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v_{\varsigma_k}(\xi;x_1)$ *—* π*-периодические по* ξ_1 *функции с асимптотикой* $v_{\varsigma_i}(\xi;x_1)\sim P_{[\varsigma_i]}(\xi_2)$ *при* $\xi_2\to\infty$ *при любом фиксированном* x_1, *где* $[\varsigma_i]$ *— целая часть* ς_i, $P_k(\xi_2)$ *— многочлен степени* k,

$$v_{\varsigma_1}(\xi;x_1)=\alpha_0(x_1)\ X(\xi),\qquad \lambda_{\varsigma_1}=\ln\sin a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha_0^2(x_1)\ dx_1,$$

$$\lambda_{\varsigma_2}=-\frac{a^{-m}\lambda_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha_0^2(x_1)\ dx_1\int_B X^2(\xi)\ d\xi\qquad \textit{при}\qquad 1<m<2,$$

$$\lambda_{\varsigma_2}=\ln\sin a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha_1(x_1)\alpha_0(x_1)\,dx_1-\delta_m^1\frac{a^{-m}\lambda_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha_0^2(x_1)\,dx_1\int_B X^2(\xi)\,d\xi\ \textit{при}\ 0<m\le 1,$$

где $X(\xi)=\mathbf{Re}\ \ln(\sin z+\sqrt{\sin^2 z-\sin^2 a})-\ln\sin a$, $z=\xi_1+\mathrm{i}\xi_2$, $\alpha_0(x_1)=\frac{\partial u_0}{\partial x_2}|_{x_2=0}$, $\alpha_1(x_1)=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}|_{x_2=0}$, δ_k^l *— символ Кронекера,* u_1 *— решение задачи*

$$\begin{cases}-\Delta u_1=\lambda_0 u_1+\lambda_1 u_0 \quad \textit{в}\ \Omega,\\ u_1=-\alpha_0\,ln\,\sin a \quad \textit{на}\ \Gamma_4,\\ \frac{\partial u_1}{\partial\nu}=0 \quad \textit{на}\ \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3,\end{cases} \tag{12}$$

[24] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

ортогональное u_0 в $L_2(\Omega)$.

Здесь $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = T_\varepsilon u_\varepsilon(x)$, константа $T_\varepsilon = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \to 0$.
Пусть предельная задача (5) имеет собственное значение λ_0 кратности два.

Обозначим две собственные функции этой задачи, ортонормированные в $L_2(\Omega)$, соответствующие собственному значению λ_0, через $u_0^{(1)}$ и $u_0^{(2)}$. Будем также предполагать, что выполнено условие ортогональности

$$\int\limits_{\Gamma_4} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial \nu} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \nu}\, ds = 0. \tag{13}$$

Дополнительно для простоты изложения будем считать, что

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 \neq \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x_2} \right)^2 dx_1. \tag{14}$$

В соответствии с теоремой 1.2.2 существуют два собственных значения исходной задачи с учётом совокупной кратности, которые сходятся к λ_0 и две собственные функции, сходящиеся к линейным комбинациям собственных функций предельной задачи. Условие (14) гарантирует, что эти два собственных значения различны (т.е. являются простыми), условие же (13) гарантирует, что соответствующие собственные функции будут сходится к собственным функциям $u_0^{(\theta)}$, $\theta = 1, 2$, а не к их линейным комбинациям.

Справедлива теорема.

Теорема 1.3.3. *Асимптотика собственных значений и соответствующих собственных функций имеет вид*

$$\lambda_\varepsilon^{(\theta)} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\varsigma_i} \lambda_{\varsigma_i}^{(\theta)}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_\varepsilon^{(\theta)}(x) = u_0^{(\theta)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\varsigma_i} u_{\varsigma_i}^{(\theta)}(x), \quad x_2 > \varepsilon^\beta \\ \mathcal{U}_\varepsilon^{(\theta)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\varsigma_i} v_{\varsigma_i}^{(\theta)}\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right), \quad 0 \le x_2 < \varepsilon^\beta \end{gathered} \tag{16}$$

в норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$. Здесь $u_{\varsigma_k}^{(\theta)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v_{\varsigma_k}^{(\theta)}(\xi; x_1)$ — π-периодические по ξ_1 функции с асимптотикой $v_{\varsigma_i}^{(\theta)}(\xi; x_1) \sim P_{[\varsigma_i]}(\xi_2)$ при $\xi_2 \to \infty$ при любом фиксированном x_1, где $[\varsigma_i]$ — целая часть ς_i, $P_k(\xi_2)$ — многочлен степени k,

$$v_{\varsigma_1}^{(\theta)}(\xi; x_1) = \alpha_0^{(\theta)}(x_1)\ X(\xi), \qquad \lambda_{\varsigma_1}^{(\theta)} = \ln \sin a \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\alpha_0^{(\theta)}(x_1) \right)^2\ dx_1,$$

$$\lambda_{\varsigma_2}^{(\theta)} = -\frac{a^{-m}\lambda_0}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\alpha_0^{(\theta)}(x_1)\right)^2\ dx_1\int\limits_B X^2(\xi)\ d\xi \qquad \text{при} \qquad 1<m<2,$$

$$\lambda_{\varsigma_2}^{(\theta)} = \ln\sin a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha_1^{(\theta)}(x_1)\alpha_0^{(\theta)}(x_1)dx_1 - \delta_m^1\frac{a^{-m}\lambda_0}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\alpha_0^{(\theta)}(x_1)\right)^2 dx_1\int\limits_B X^2(\xi)d\xi \ \text{при}\ 0<m\le 1,$$

где $\alpha_0^{(\theta)}(x_1) = \frac{\partial u_0^{(\theta)}}{\partial x_2}|_{x_2=0}$, $\alpha_1^{(\theta)}(x_1) = \frac{\partial u_1^{(\theta)}}{\partial x_2}|_{x_2=0}$, $u_1^{(\theta)}$ *— решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{(\theta)} = \lambda_0 u_1^{(\theta)} + \lambda_1^{(\theta)} u_0^{(\theta)} \quad \text{в } \Omega, \\ u_1^{(\theta)} = -\alpha_0^{(\theta)}\ ln\sin a \quad \text{на } \Gamma_4, \\ \frac{\partial u_1^{(\theta)}}{\partial \nu}(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3. \end{cases} \tag{17}$$

В **четвёртом параграфе** строятся полные асимптотические разложения в случае редко расположенных масс. Обозначим $\mu := \varepsilon^{2-m}a^{2-m}$.

Определим классы функций, которые используются для формулировки основных теорем. Для того, чтобы определить новые классы функций, введём следующие обозначения: $\widetilde{B}$ — полукруг $\{\zeta\ :\ \tau<1, \zeta_2\ge 0\}$, $\mathcal{O}_{\varsigma,\pm}$ — ς-окрестность точек $(\pm 1, 0)$.

• Обозначим через $B_{\text{even}}^{(2k,2n,q)}$ множество чётных по ζ_1 функций $g_{\text{even}} \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+)\cap C^\infty(\widetilde{B})\cap H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+\backslash\overline{(\mathcal{O}_{\varsigma,+}\cup\mathcal{O}_{\varsigma,-})})$ для любого ς, таких что они имеют асимптотику на бесконечности вида

$$g_{\text{even}}(\zeta) = \delta_0^q\sum_{i=1}^{k+1}\eta_{\text{even}}^{(i)}\tau^{2i-2}\cos 2i\theta + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\widehat{\eta}_{\text{even}}^{(i,j)}\tau^{2i}\cos 2(i-j)\theta\ln\tau +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\widetilde{\eta}_{\text{even}}^{(i,j)}\tau^{-2i+2j}\cos 2i\theta + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}\breve{\eta}_{\text{even}}^{(i,j)}\tau^{2i-2j}\cos 2i\theta, \qquad \tau\to+\infty,$$

где δ_0^q — символ Кронекера.

Обозначим $\quad \mathcal{B}_{\text{even}}^{(2k,2n,q)} = \Big\{V(\zeta;x_1)\ :\ V(\zeta;x_1) = \sum\limits_{j=1}^{J}\sigma_j(x_1)Y_j(\zeta),$

$$Y_j\in B_{\text{even}}^{(2k,2n,q)}, \sigma_j\in C^\infty[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], (\sigma_j)^{(2n+1)}(\pm\frac{\pi}{2}) = 0, n = 0,1,\ldots\Big\},$$

здесь и далее J — произвольное (не фиксированное, но конечное).

• Обозначим через $B_{\text{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)}$ множество нечётных по ζ_1 функций $g_{\text{odd}}\in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+)\cap C^\infty(\widetilde{B})\cap H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+\backslash\overline{(\mathcal{O}_{\varsigma,+}\cup\mathcal{O}_{\varsigma,-})})$ для любого ς, таких что они имеют асимптотику на бесконечности вида

$$f_{\mathrm{odd}}(\zeta)=\delta_0^q\sum_{i=0}^{k}\eta_{\mathrm{odd}}^{(i)}\tau^{2i-1}\cos(2i+1)\theta+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\widehat{\eta}_{\mathrm{odd}}^{(i,j)}\tau^{2i+1}\cos(2i-2j+1)\theta\ln\tau+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\widetilde{\eta}_{\mathrm{odd}}^{(i,j)}\tau^{-2i+2j-1}\cos(2i+1)\theta+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}\check{\eta}_{\mathrm{odd}}^{(i,j)}\tau^{2i-2j+1}\cos(2i+1)\theta,$$

$$\text{при}\quad \tau\to+\infty,$$

где δ_0^q — символ Кронекера. Сразу отметим, что символом $B_{\mathrm{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)}$ при $k=0$ будем обозначать класс функций, в асимптотике которых при $\tau\to+\infty$ нет слагаемых с $\ln\tau$, соответственно, при $n=0$ будем обозначать класс функций, в асимптотике которых при $\tau\to+\infty$ нет слагаемых с отрицательными степенями τ.

Обозначим $\mathcal{B}_{\mathrm{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)}=\Big\{V(\zeta;x_1)\ :\ V(\zeta;x_1)=\sum\limits_{j=1}^{J}\sigma_j(x_1)Y_j(\zeta),$

$$Y_j\in B_{\mathrm{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)},\sigma_j\in C^\infty[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],(\sigma_j)^{(2n)}(\pm\frac{\pi}{2})=0,n=0,1,\dots\Big\}.$$

Введём следующий класс функций.

$$\mathbb{B}^{(2k+1,2n+1,q)}=\Big\{V(\zeta;x_1):V(\zeta;x_1)=\hat{Z}(\zeta;x_1)+\check{Z}(\zeta;x_1),\hat{Z}\in\mathcal{B}_{\mathrm{odd}}^{(2k+1,2n+1,q)},\check{Z}\in\mathcal{B}_{\mathrm{even}}^{(2k,2n,q)}\Big\},$$

$$\mathbb{B}^{(2k,2n,q)}=\Big\{V(\zeta;x_1):V(\zeta;x_1)=\hat{Z}(\zeta;x_1)+\check{Z}(\zeta;x_1),\hat{Z}\in\mathcal{B}_{\mathrm{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)},\check{Z}\in\mathcal{B}_{\mathrm{even}}^{(2k,2n,q)}\Big\}.$$

- Обозначим через $\mathcal{H}_{\mathrm{odd}}^{2k-1}(\xi;x_1)$ множество многочленов вида

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\varkappa_{\mathrm{odd}}^{(i,j)}(x_1)\rho^{-2i-1}\cos(2i+2j+1)\theta$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на отрезке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, чётные производные которого по x_1 обращаются в нуль при $x_1=\pm\frac{\pi}{2}$.

Обозначим через $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}^{2k}(\xi;x_1)$ множество многочленов вида

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\varkappa_{\mathrm{even}}^{(i,j)}(x_1)\rho^{-2i}\cos 2(i+j)\theta$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на отрезке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, нечётные производные которого по x_1 обращаются в нуль при $x_1=\pm\frac{\pi}{2}$.

А также обозначим

$$\mathcal{F}^{(k)} = \Bigg\{ V(\xi; x_1) \ : \ V(\xi; x_1) = h_0(x_1) \ln\rho + \sum_{j=1}^{k} h_j(\xi; x_1),$$

$$h_{2j+1} \in \mathcal{H}^{2j+1}_{\text{odd}}, h_{2j} \in \mathcal{H}^{2j}_{\text{even}}, j = 0, \dots, \left[\frac{k}{2}\right] \Bigg\}.$$

• Обозначим через $A^{(2k,2n,q)}_{\text{even}}$ множество таких π-периодических чётных по ξ_1 функций $f_{\text{even}} \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{(k\pi, 0)\})$, что $e^{\varpi\xi_2}\chi(\rho) f_{\text{even}} \in H^1(\Pi)$,$0 < \varpi < 2$ и они имеют асимптотику в нуле вида

$$f_{\text{even}}(\xi) = \delta^q_0 \sum_{i=1}^{k+1} \beta^{(i)}_{\text{even}} \rho^{2i-2} \cos 2i\theta + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \widehat{\beta}^{(i,j)}_{\text{even}} \rho^{2i} \cos 2(i-j)\theta \ln\rho +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \widetilde{\beta}^{(i,j)}_{\text{even}} \rho^{2i} \cos 2(i-j)\theta + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} \breve{\beta}^{(i,j)}_{\text{even}} \rho^{-2i+2j} \cos 2i\theta, \qquad \rho \to 0,$$

где δ^q_0 — символ Кронекера.

Обозначим

$$\mathcal{A}^{(2k,2n,q)}_{\text{even}} = \Bigg\{ V(\xi; x_1) \ : \ V(\xi; x_1) = \sum_{j=1}^{J} \sigma_j(x_1) Y_j(\xi),$$

$$Y_j \in A^{(2k,2n,q)}_{\text{even}}, \sigma_j \in C^\infty[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], (\sigma_j)^{(2n+1)}(\pm\frac{\pi}{2}) = 0, n = 0, 1, \dots \Bigg\}.$$

• Обозначим через $A^{(2k-1,2n-1,q)}_{\text{odd}}$ множество таких π-периодических нечётных по ξ_1 функций $f_{\text{odd}} \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{(k\pi, 0)\})$, что $e^{\varpi\xi_2}\chi(\rho) f_{\text{odd}} \in H^1(\Pi)$, $\quad 0 < \varpi < 2$ и они имеют асимптотику в нуле вида

$$f_{\text{odd}}(\xi) = \delta^q_0 \sum_{i=0}^{k} \beta^{(i)}_{\text{odd}} \rho^{2i-1} \cos(2i+1)\theta + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} \widehat{\beta}^{(i,j)}_{\text{odd}} \rho^{2i+1} \cos(2i-2j+1)\theta \ln\rho +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \widetilde{\beta}^{(i,j)}_{\text{odd}} \rho^{2i+1} \cos(2i-2j+1)\theta + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} \breve{\beta}^{(i,j)}_{\text{odd}} \rho^{-2i+2j-1} \cos(2i+1)\theta,$$

$$\text{при} \quad \rho \to 0,$$

где δ^q_0 — символ Кронекера. Сразу отметим, что символом $A^{(2k-1,2n-1,q)}_{\text{odd}}$ при $k = 0$ будем обозначать класс функций, в асимптотике которых при $\rho \to 0$ нет слагаемых с $\ln\rho$, соответственно, при $n = 0$ будем обозначать класс функций, в асимптотике которых при $\rho \to 0$ нет слагаемых с отрицательными степенями ρ.

А также обозначим

$$\mathcal{A}_{\text{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)} = \Big\{ V(\xi;x_1) \ : \ V(\xi;x_1) = \sum_{j=1}^{J} \sigma_j(x_1) Y_j(\xi),$$

$$Y_j \in A_{\text{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)}, \sigma_j \in C^\infty[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], (\sigma_j)^{(2n)}(\pm\frac{\pi}{2}) = 0, n = 0,1,\ldots \Big\}.$$

Введём следующий класс функций.

$$\mathbb{A}^{(2k+1,2n+1,q)} = \Big\{ V(\xi;x_1) : V(\xi;x_1) = \hat{Z}(\xi;x_1) + \check{Z}(\xi;x_1), \hat{Z} \in \mathcal{A}_{\text{odd}}^{(2k+1,2n+1,q)}, \check{Z} \in \mathcal{A}_{\text{even}}^{(2k,2n,q)} \Big\},$$

$$\mathbb{A}^{(2k,2n,q)} = \Big\{ V(\xi;x_1) : V(\xi;x_1) = \hat{Z}(\xi;x_1) + \check{Z}(\xi;x_1), \hat{Z} \in \mathcal{A}_{\text{odd}}^{(2k-1,2n-1,q)}, \check{Z} \in \mathcal{A}_{\text{even}}^{(2k,2n,q)} \Big\}.$$

Имеют место теоремы.

Теорема 1.4.9. *Существуют ряды*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a \, a^l \mu^p \ \lambda_{j,k,l,p} + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p \ \lambda_{j,k,0,p}, \quad (18)$$

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a \, a^l \mu^p \ u_{j,k,l,p}(x) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p \ u_{j,k,0,p}(x), \quad (19)$$

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a \, a^l \mu^p v_{j,k,l,p}(\xi;x_1) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p v_{j,k,0,p}(\xi;x_1), \quad (20)$$

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l} \varepsilon^j \ln^k a \, a^l \mu^p w_{j,k,l,p}(\zeta;x_1) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p w_{j,k,0,p}(\zeta;x_1), \quad (21)$$

такие что

а) пары $u_{j,k,l,p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $\lambda_{j,k,l,p}$ являются решениями задач

$$\begin{cases} -\Delta u_{j,k,l,p} = \sum\limits_{j_1,k_1,l_1,p_1} \lambda_{j_1,k_1,l_1,p_1} u_{j-j_1,k-k_1,l-l_1,p-p_1} & \text{в} \ \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u_{j,k,l,p}}{\partial \nu} = 0 & \text{на} \ \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь и далее предполагается, что индексы j_1, k_1, l_1 и p_1 меняются только в пределах, указанных в соответствующих суммах (18), (19), (20) *и* (21)*; здесь $u_{0,0,0,0} = u_0$, $\lambda_{0,0,0,0} = \lambda_0$;*

б) ряд (19) имеет асимптотику при $x_2 \to 0$, переписанную в переменных ξ, вида:

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a\ a^l \mu^p\ V_{j,k,l,p}(\xi_2; x_1) +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p\ V_{j,k,0,p}(\xi_2; x_1) \ \ \text{при } \varepsilon\xi_2 \to 0,$$

где $V_{j,k,l,p}(\xi_2;x_1)$ — многочлены порядка $j-k$ по переменной ξ_2 с коэффициентами, являющимися бесконечно дифференцируемыми на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функциями от x_1, нечётные производные которых равны нулю при $x_1 = \pm\frac{\pi}{2}$;

в) коэффициент $\lambda_{1,1,0,0}$ определяется из формулы

$$\lambda_{1,1,0,0} = \int\limits_{\Gamma_4} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2\ ds > 0;$$

г) коэффициент $\lambda_{1,0,0,1}$ определяется из формулы

$$\lambda_{1,0,0,1} = -\frac{\lambda_0}{\pi} \int\limits_{\Gamma_4} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2\ ds \int\limits_{B} Y^2(\zeta) d\zeta,$$

где $Y(\zeta) = \mathbf{Re}\ \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$, $y = \zeta_1 + \mathrm{i}\zeta_2$;

д) функции $v_{j,k,l,p}$ представляются в виде суммы $v_{j,k,l,p} = V_{j,k,l,p} + \widetilde{v}_{j,k,l,p}$, $\widetilde{v}_{j,k,l,p} \in \mathbb{A}^{(j-k,l,1)}$, являются решениями задач

$$\begin{cases} -\Delta_\xi v_{j,k,l,p} = 2\dfrac{\partial^2 v_{j-1,k,l,p}}{\partial x_1 \partial \xi_1} + \dfrac{\partial^2 v_{j-2,k,l,p}}{\partial x_1^2} + \sum\limits_{j_1,k_1,l_1,p_1} \lambda_{j_1,k_1,l_1,p_1} v_{j-j_1-2,k-k_1,l-l_1,p-p_1} \ \text{в } \Pi, \\ \dfrac{\partial v_{j,k,l,p}}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ \dfrac{\partial v_{j,k,l,p}}{\partial \xi_1}(\xi; \pm\dfrac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{при} \ \ \xi_1 = \pm\dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{23}$$

причём

$$\frac{\partial v_{j,k,l}}{\partial x_1}(\xi; \pm\frac{\pi}{2}) \equiv 0;$$

е) функции $v_{j,k,l,p}$ имеют асимптотику

$$v_{j,k,l,p} = \mathcal{V}_{j,k,l,p} \qquad \text{при} \qquad \rho \to 0,$$

где $\mathcal{V}_{j,k,l,p} \in \mathcal{F}^{(l-j+k)}$;

ж) функции $w_{k,j,l,p} \in \mathbb{B}^{j-k,l,1}$ являются решениями задач

$$\begin{cases} -\Delta_\zeta w_{j,k,l,p} = 2\frac{\partial^2 w_{j-1,k,l-1,p}}{\partial x_1 \partial\zeta_1} + \frac{\partial^2 w_{j-2,k,l-2,p}}{\partial x_1^2} + \\ \qquad + \begin{cases} \sum\limits_{j_1,k_1,l_1,p_1} \lambda_{j_1,k_1,l_1,p_1} w_{j-j_1-2,k-k_1,l-l_1-2,p-p_1} & \text{в } \overline{\mathbb{R}^2_+}\setminus B, \\ \sum\limits_{j_1,k_1,l_1,p_1} \lambda_{j_1,k_1,l_1,p_1} w_{j-j_1,k-k_1,l-l_1,p-p_1-1} & \text{в } B, \end{cases} \\ w_{j,k,l,p} = 0 \quad \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial w_{j,k,l,p}}{\partial\zeta_2} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{24}$$

з) ряд (21) имеет асимптотику при $\tau \to +\infty$, переписанную в переменных ξ, вида

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a\; a^l \mu^p\; \mathcal{V}_{j,k,l,p}(\xi; x_1) +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p\; \mathcal{V}_{j,k,0,p}(\xi; x_1) \;\; \text{при } \rho a^{-1} \to +\infty.$$

Теорема 1.4.10. *Асимптотика собственных значений и соответствующих собственных функций имеет вид*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a\; a^l \mu^p\; \lambda_{j,k,l,p} + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p\; \lambda_{j,k,0,p}, \tag{25}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) = u_0(x) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a a^l \mu^p u_{j,k,l,p}(x) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p u_{j,k,0,p}(x) \;\text{при}\; x_2 \ge \varepsilon^\beta, \tag{26}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l+1} \varepsilon^j \ln^k a a^l \mu^p v_{j,k,l,p}\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p\; v_{j,k,0,p}\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right)$$
$$\text{при}\;\; x_2 < 2\varepsilon^\beta,\; (x_1 - a\mathbf{n}\pi)^2 + x_2^2 \ge \varepsilon^{2\beta} a^{2\beta}, \tag{27}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-l} \varepsilon^j \ln^k a\; a^l \mu^p\; w_{j,k,l,p}\left(\frac{x_1}{a\varepsilon} - \frac{\mathbf{n}\pi}{\varepsilon}, \frac{x_2}{a\varepsilon}; x_1\right) +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1} \varepsilon^j \ln^k a \mu^p\; w_{j,k,0,p}\left(\frac{x_1}{a\varepsilon} - \frac{\mathbf{n}\pi}{\varepsilon}, \frac{x_2}{a\varepsilon}; x_1\right) \tag{28}$$
$$\text{при}\;\; (x_1 - a\mathbf{n}\pi)^2 + x_2^2 < 2\varepsilon^{2\beta} a^{2\beta},$$
$$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}, \qquad -\mathbf{N} \le \mathbf{n} \le \mathbf{N}$$

в норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$. *Здесь* $u_{j,k,l,p}$, $\lambda_{j,k,l,p}$, $v_{j,k,l,p}$ *и* $w_{j,k,l,p}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.4.9, *и, в частности,*

$$\lambda_{1,1,0,0} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\alpha_0^1)^2(x_1)\ dx_1 > 0, \quad \lambda_{1,0,0,1} = -\frac{\lambda_0}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\alpha_0^1)^2(x_1)\ dx_1 \int\limits_B Y^2(\zeta)d\zeta,$$

$$w_{1,0,0,0}(\zeta;x_1) = \alpha_0^1(x_1)\ Y(\zeta), \qquad v_{1,0,0,0}(\xi;x_1) = \alpha_0^1(x_1)\ \mathcal{X}(\xi),$$

где $\mathcal{X}(\xi) = \mathbf{Re}\ \ln\sin z + \ln 2$, $z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$, $\alpha_0^1(x_1) = \frac{\partial u_0}{\partial x_2}|_{x_2=0}$.

Отметим, что в теореме строится асимптотика ненормированной собственной функции, т.е. $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = T_\varepsilon u_\varepsilon(x)$, константа $T_\varepsilon = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \to 0$, где u_ε — нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция задачи (2).

В **пятом** параграфе рассматривается задача о стационарных колебаниях круговой мембраны, частично закреплённой по границе с часто расположенными лёгкими концентрированными массами на границе. С помощью метода погранслойных функций (см., например, работу М.И.Вишика и Л.А.Люстерника[25]) строятся полные разложения собственных элементов исходной задачи.

Обозначим Ω — единичный круг ц центром в начале координат. Выбираем на окружности $\partial\Omega$ периодическое множество γ_ε, состоящее из $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \gg 1$, несвязных кривых. Здесь $\varepsilon = \frac{2}{\mathbf{N}}$ — малый параметр. Множество γ_ε является пересечением границы со множеством B_ε, которое является объединением малых кругов $B_\varepsilon^{\mathbf{n}}$ (концентрированных масс). Мы предполагаем, что длина кривых равна $a\varepsilon$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$ — константа. Каждая из кривых и каждый из кругов получается из соседней (соседнего) поворотом вокруг начала координат на угол $\varepsilon\pi$. Обозначим $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega\backslash\gamma_\varepsilon$. Вводим полярную систему координат (θ, r) в области Ω с центром в начале координат.

Опишем подробнее множество B_ε. Обозначим $B_a^\cup$ — объединение полукругов, полученных целочисленными сдвигами полукруга B^a вдоль оси $O\xi_1$. И определим B_ε как образ $B_a^\cup$ при преобразовании $\theta = \frac{\xi_2}{\varepsilon}$, $r = 1 - \frac{\xi_1}{\varepsilon}$.

Пусть $\rho_\varepsilon(x)$ — плотность, определённая формулой (3). Изучается асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ собственных элементов краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{29}$$

[25] *Вишик М.И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.

Рассмотрим также усреднённую задачу (корректность такого определения усреднённой задачи см. в работе[26])

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda_0 u_0 \quad \text{as } x \in \Omega, \\ u_0 = 0 \quad \text{as } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

Строится полное асимптотическое разложение в следующей форме:

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^{ex}(x) + \chi(1-r) u_\varepsilon^{in}\left(\frac{1-r}{\varepsilon}, \frac{\theta}{\varepsilon}\right), \tag{31}$$

где гладкая функция $\chi(1-r)$ равна 1 при $\frac{1}{2}<r<1$ и равна 0 при $r<\frac{1}{4}$,

$$u_\varepsilon^{ex}(x) = \mathcal{J}_0\left(k(\varepsilon)r\right), \qquad u_\varepsilon^{in}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\varsigma_i} v_{\varsigma_i}(\xi) \tag{32}$$

и λ_ε имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\varsigma_i} \lambda_{\varsigma_i}. \tag{33}$$

Здесь $\mathcal{J}_0$ — функция Бесселя, $k(\varepsilon) = \sqrt{\lambda_\varepsilon}$, $v_{\varsigma_k}(\xi)$ — π-периодические по ξ_1 функции, экспоненциально убывающие при $\xi_2 \to \infty$, в частности, $v_{\varsigma_1}(\xi) = \alpha_0(\theta)\ X(\xi)$, λ_{ς_1} определена формулой

$$\lambda_{\varsigma_1} = \ln \sin a \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)^2 ds, \tag{34}$$

λ_{ς_2} определена

$$\lambda_{\varsigma_2} = -\frac{a^{-m}\lambda_0}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \alpha_0^2(\theta)\ d\theta \int\limits_B X(\xi) \ddot{X}(\xi)\ d\xi \qquad \text{при} \quad 1 < m < 2, \tag{35}$$

или

$$\lambda_{\varsigma_2} = \ln \sin a \int\limits_0^{2\pi} \alpha_1(\theta)\alpha_0(\theta) d\theta - \delta_m^1 \frac{a^{-m}\lambda_0}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \alpha_0^2(\theta) d\theta \int\limits_B X(\xi) \ddot{X}(\xi) d\xi \ \text{при}\ 0 < m \leq 1, \tag{36}$$

где δ_k^l — символ Кронекера,

$$\ddot{X}(\xi) = \mathbf{Re} \ln\left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 a}\right) - \xi_2,$$

[26] *Чечкин Г.А.* Об оценке решений краевых задач в областях с концентрированными массами, периодически расположенными вдоль границы. Случай “лёгких” масс. // Мат. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 928–944.

$z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$ — комплексная переменная. Проверяется,что для любого $k(\varepsilon)$ функция (32) является решением уравнения из (29), если $\lambda_\varepsilon = k^2(\varepsilon)$, и удовлетворяет следующему граничному условию:

$$u_\varepsilon^{ex} = \mathcal{J}_0(k(\varepsilon)), \quad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon^{ex}}{\partial r} = k(\varepsilon)\mathcal{J}_0'(k(\varepsilon)), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \tag{37}$$

Если асимптотика $k(\varepsilon)$ имеет вид $k(\varepsilon) = k_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\varsigma_i} k_{\varsigma_i}$, то λ_ε имеет асимптотику (33), где

$$\lambda_0 = k_0^2, \qquad \lambda_1 = 2k_0k_1,$$

$$\lambda_{\varsigma_2} = 2k_0k_{\varsigma_2} \quad \text{если} \quad 1 < m < 2, \qquad \lambda_{\varsigma_2} = \delta_m^1 k_1^2 + 2k_0k_{\varsigma_2} \quad \text{если} \quad 0 < m \leq 1.$$

Рекуррентная система уравнений для коэффициентов ряда u_ε^{in} из (32) имеет вид:

$$\Delta_\xi v_{\varsigma_k} = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\xi_2^{j-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \beta_j \xi_2^j \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) v_{\varsigma_k - j} - \begin{cases} \sum\limits_{\substack{p,q \\ \varsigma_p + \varsigma_q = \varsigma_k - 2}} \lambda_{\varsigma_p} v_{\varsigma_q} & \text{в } \{\xi_2 > 0\} \backslash B_a^{\cup}, \\ \sum\limits_{\substack{p,q \\ \varsigma_p + \varsigma_q = \varsigma_k + m - 2}} a^{-m} \lambda_{\varsigma_p} v_{\varsigma_q} & \text{в } B_a^{\cup}. \end{cases} \tag{38}$$

где β_j – вполне определённые константы, в частности, $\beta_1 = -2$. Если $\varsigma_i - t$ не равно ς_j для некоторого j, где $t, j \in \mathbb{N}$, то члены с этими индексами в (38) равны нулю. Граничные условия для коэффициентов второго ряда из (32):

$$\begin{aligned} v_{\varsigma_i} &= -k_{\varsigma_i}\mathcal{J}_0'(k_0) + f_{\varsigma_i}(k_1, \ldots, k_{\varsigma_{i-1}}), \quad \xi \in \gamma_\cup^a, \\ \frac{\partial v_{\varsigma_i}}{\partial \xi_2} &= g_{\varsigma_i}(k_1, ..., k_{\varsigma_{i-1}}), \quad \xi \in \Gamma_\cup^a, \end{aligned} \tag{39}$$

где f_{ς_i} и g_{ς_i} могут быть вычислены непосредственно, в частности,

$$f_{\varsigma_1} = 0, \qquad g_{\varsigma_1} = k_0 \mathcal{J}_0'(k_0), \tag{40}$$

$$\begin{aligned} f_{\varsigma_2}(k_1) &= -\frac{1}{2}\mathcal{J}_0''(k_0)k_1^2 \equiv \frac{k_1^2}{2k_0}\mathcal{J}_0'(k_0), \\ g_{\varsigma_2}(k_1) &= k_1\mathcal{J}_0'(k_0) + k_0k_1\mathcal{J}_0''(k_0) \equiv 0, \end{aligned} \quad 0 < m \leq 1; \quad \begin{aligned} f_{\varsigma_2}(k_1) &= 0, \\ g_{\varsigma_2}(k_1) &= 0, \end{aligned} \quad 1 < m < 2. \tag{41}$$

Имеет место теорема.

Теорема 1.5.1. *Существуют числа k_{ς_i} и π-периодические по ξ_1 функции v_{ς_i} с конечным интегралом Дирихле по полуполосе Π, экспоненциально убывающие при $\xi_2 \to \infty$, являющиеся решениями последовательности краевых задач* (38), (39)*; константы k_{ς_i} определяются из формул*

$$k_{\varsigma_i} = \frac{1}{\mathcal{J}_0'(k_0)} \left(f_{\varsigma_i}(k_1, \ldots, k_{\varsigma_{i-1}}) + g_{\varsigma_i}(k_1, \ldots, k_{\varsigma_{i-1}}) \ln \sin a - \pi^{-1} \int\limits_{\Pi} \ddot{X} F_{\varsigma_i} d\xi \right), \tag{42}$$

где F_{ς_i} *— правые части уравнений* (38), *а* f_{ς_i}, g_{ς_i} *определены в* (39) – (41).

В частности,

$$k_1 = k_0 \ln \sin a, \tag{43}$$

$$k_{\varsigma_2} = \frac{k_1^2}{2k_0} \text{ для } 0 < m < 1, \quad k_{\varsigma_2} = \delta_m^1 \frac{k_1^2}{2k_0} - \frac{1}{\pi \mathcal{J}_0'(k_0)} \int\limits_{\Pi} \ddot{X} F_{\varsigma_2} d\xi \text{ для } 1 \le m < 2. \tag{44}$$

Также строятся полные асимптотики в случае кратного собственного значения. Число собственных значений (учитывая кратность) исходной задачи, сходящихся к собственному значению предельной (усреднённой) задачи, равно кратности этого собственного значения предельной (усреднённой) задачи (см. работу[27]). Хорошо известно, что собственные частоты $k_0 = \sqrt{\lambda_0}$ предельной задачи— суть нули функции Бесселя $\mathcal{J}_n$ для некоторого целого $n \ge 0$ и они являются простыми, если $n = 0$ или двукратными, если $n > 0$; соответствующие собственные функции имеют вид $\mathcal{J}_0(k_0 r)$, если $n = 0$; и, соответственно, вид $\mathcal{J}_n(k_0 r)\sin(k_0\theta)$ и $\mathcal{J}_n(k_0 r)\cos(k_0\theta)$, если $n > 0$.

Пусть λ_0 — двукратное собственное значение. Обозначим $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ и $u_\varepsilon^{(i)}$ ($i = 1, 2$) соответствующие собственные числа и собственные функции исходной задачи, нормированные в $L_2(\Omega)$, такие что $\lambda_\varepsilon^{(i)} \to \lambda_0$ при $\varepsilon \to 0$. Легко видеть, что функция $u_\varepsilon^{(i)}(r, \theta + \varepsilon\pi\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{N}$, тоже является собственной функцией с собственным значением $\lambda_\varepsilon^{(i)}$, но существует такая κ, что $u_\varepsilon^{(i)}(r, \theta + \varepsilon\pi\kappa)$ и $u_\varepsilon^{(i)}(r, \theta)$ являются линейно независимыми. Следовательно, $\lambda_\varepsilon^{(1)} = \lambda_\varepsilon^{(2)}$, т.е. λ_ε, сходящаяся к λ_0, тоже является двукратным и вторая собственная функция может быть получена из первой поворотом.

Пусть λ_0 — двукратное собственное значение, т.е. k_0 — нуль функции $\mathcal{J}_0$ для $n > 0$. Асимптотику собственного значения будем строить в виде (33), а асимптотику собственной функции — в следующем виде:

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^{ex}(x) + \chi\,(1 - r)\, u_\varepsilon^{in}\left(\frac{1 - r}{\varepsilon}, \frac{\theta}{\varepsilon}, \theta\right), \tag{45}$$

$$u_\varepsilon^{ex}(x) = \cos(n\theta)\mathcal{J}_n(k(\varepsilon) r), \quad u_\varepsilon^{in}(\xi, \theta) = \cos(n\theta)\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_{\varsigma_i}(\xi) + \sin(n\theta)\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i v_{\varsigma_i}^{\text{odd}}(\xi). \tag{46}$$

Отметим, что схема (45), (46) — это комбинация метода погранслойных функций[28] и метода многих масштабов[29].

[27] *Чечкин Г.А.* Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сборник. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.

[28] *Вишик М.И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.

[29] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974.

Краевые условия для коэффициентов v_{ς_i} имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{\varsigma_i} &= -k_{\varsigma_i}\mathcal{J}_n'(k_0) + f_{\varsigma_i}^{(n)}(k_1,...,k_{\varsigma_{i-1}}), \quad \xi\in\gamma_\cup^a,\\ \frac{\partial v_{\varsigma_i}}{\partial\xi_2} &= g_{\varsigma_i}^{(n)}(k_1,...,k_{\varsigma_{i-1}}), \quad \xi\in\Gamma_\cup^a, \end{aligned} \tag{47}$$

где

$$f_{\varsigma_1}^{(n)} = 0, \qquad g_{\varsigma_1}^{(n)} = k_0\mathcal{J}_n'(k_0); \tag{48}$$

$$\begin{aligned} &f_{\varsigma_2}^{(n)}(k_1) = \frac{k_1^2}{2k_0}\mathcal{J}_n'(k_0), \\ &g_{\varsigma_2}^{(n)}(k_1) = k_1\mathcal{J}_n'(k_0) + k_0k_1\mathcal{J}_n''(k_0) = 0, \end{aligned} \quad 0<m\le 1; \quad \begin{aligned} &f_{\varsigma_2}^{(n)}(k_1)=0,\\ &g_{\varsigma_2}^{(n)}(k_1)=0, \end{aligned} \quad 1<m<2; \tag{49}$$

а для коэффициентов $v_{\varsigma_i}^{\text{odd}}$ — однородные граничные условия

$$v_{\varsigma_i}^{\text{odd}} = 0, \quad \xi\in\gamma_\cup^a, \qquad \frac{\partial v_{\varsigma_i}^{\text{odd}}}{\partial\xi_2} = 0, \quad \xi\in\Gamma_\cup^a. \tag{50}$$

Рекуррентные системы уравнений для коэффициентов ряда u_ε^{in} из (46):

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_{\varsigma_k} = &\sum_{j=1}^{k-1}\left(\xi_2^{j-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \beta_j\xi_2^j\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)v_{\varsigma_k-j} + n\sum_{j=0}^{k-3}\beta_j\xi_2^j\frac{\partial}{\partial\xi_1}v_{\varsigma_k-j-1}^{\text{odd}} + \\ + &n^2\sum_{j=0}^{k-3}\beta_j\xi_2^j v_{\varsigma_k-j-2} - \begin{cases} \sum\limits_{\substack{p,q\\ \varsigma_p+\varsigma_q=\varsigma_k-2}}\lambda_{\varsigma_p}v_{\varsigma_q} & \text{в } \{\xi_2>0\}\backslash B_a^\cup,\\ \sum\limits_{\substack{p,q\\ \varsigma_p+\varsigma_q=\varsigma_k+m-2}} a^{-m}\lambda_{\varsigma_p}v_{\varsigma_q} & \text{в } B_a^\cup, \end{cases} \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_{\varsigma_k}^{\text{odd}} = &\sum_{j=1}^{k-2}\left(\xi_2^{j-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \beta_j\xi_2^j\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)v_{\varsigma_k-j}^{\text{odd}} - n\sum_{j=0}^{k-2}\beta_j\xi_2^j\frac{\partial}{\partial\xi_1}v_{\varsigma_k-j-1} - \\ - &n^2\sum_{j=0}^{k-3}\beta_j\xi_2^j v_{\varsigma_k-j-2}^{\text{odd}} - \begin{cases} \sum\limits_{\substack{p,q\\ \varsigma_p+\varsigma_q=\varsigma_k-2}}\lambda_{\varsigma_p}v_{\varsigma_q}^{\text{odd}} & \text{в } \{\xi_2>0\}\backslash B_a^\cup,\\ \sum\limits_{\substack{p,q\\ \varsigma_p+\varsigma_q=\varsigma_k+m-2}} a^{-m}\lambda_{\varsigma_p}v_{\varsigma_q}^{\text{odd}} & \text{в } B_a^\cup, \end{cases} \end{aligned} \tag{52}$$

где $\beta_0=-1$, а остальные β_j — точно такие же, как в (38). Если $\varsigma_i - t$ не равно ς_j для некоторого j, где $t,j\in\mathbb{N}$, то члены с этими индексами в (51), (52) равны нулю.

Справедлива теорема.

Теорема 1.5.2. *Существуют числа k_{ς_i} и π-периодические по ξ_1 чётные функции v_{ς_i} и нечётные функции $v_{\varsigma_i}^{odd}$ с конечным интегралом Дирихле по Π, экспоненциально убывающие при $\xi_2\to\infty$ вместе со своими производными, такие что они являются решениями рекуррентной последовательности краевых задач* (51), (47) *и* (52), (48) *соответственно, константы k_{ς_i} определены формулами*

$$k_{\varsigma_i} = \frac{1}{\mathcal{J}_n'(k_0)}\left(f_{\varsigma_i}^{(n)}(k_1,\dots,k_{\varsigma_{i-1}}) + g_{\varsigma_i}^{(n)}(k_1,\dots,k_{\varsigma_{i-1}})\ln\sin a - \pi^{-1}\int_\Pi \ddot{X}F_{\varsigma_i}d\xi\right),$$

где F_{ς_i} — правая часть уравнения (51), а $f^{(n)}_{\varsigma_i}$, $g^{(n)}_{\varsigma_i}$ определены в (47) – (49). Коэффициенты k_1 и k_{ς_2} удовлетворяют (43) и (44), соответственно.

Вторая глава. Во второй главе рассматривается скалярный аналог уравнений линейной гидродинамики. Исследуется аналог малых колебаний вязкой неоднородной жидкости в открытом неподвижном сосуде с накинутой на поверхность сетью. Предполагается, что в окрестности узлов сетки образуются тяжёлые сгустки. Исходная задача сводится к исследованию асимптотики собственных элементов квадратичного операторного пучка, которая исследуется на основе методов из монографии[30]. Далее проводится усреднение операторного пучка на основе схемы из монографии[31].

В **первом параграфе** вводятся обозначения и ставятся основные спектральные задачи, которые изучаются в этой главе.

Пусть Ω — гладкая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, обозначим через $\partial\Omega$ — её границу. Предполагается, что $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, гиперплоскость Γ_2 состоит из двух частей, Γ_ε и γ_ε, где $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} \gamma^i_\varepsilon$. Введём следующее обозначение: $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} B^i_\varepsilon$ — объединение полушаров, находящихся внутри области Ω. Поясним теперь построение. Пусть B_ε — гомотетичное сжатие δB^ε, B^ε_0 — это полушар $\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < \varepsilon^2,\ \xi_n < 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\xi = \frac{x}{\delta}$, $\gamma^\varepsilon_0 = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2,\ \xi_n = 0\}$, B^ε — область, полученная целочисленными сдвигами множества B^ε_0 на гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$, с центрами в точках $\widetilde{\xi_k} = (k_1, \ldots, k_{n-1}, 0)$, $k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$. При этом $\gamma_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon \cap \partial\Omega$. Отметим, что рассматривается случай, когда параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между участками γ^i_ε на границе, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Также заметим, что $N_\delta = O\Big(\frac{1}{\delta^{n-1}}\Big)$. Обозначим также $D = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2},\ i = 1, \ldots, n-1,\ \ \xi_n < 0\}$, $\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2},\ i = 1, \ldots, n-1,\ \ \xi_n = 0\}$.

Изучаются следующие спектральные задачи:

$$\begin{cases} \Delta s^k_\varepsilon = -\lambda^k_\varepsilon \rho^\varepsilon(x) s^k_\varepsilon \ \text{ в } \ \Omega \ , \\ s^k_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon \ , \\ \dfrac{\partial s^k_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\varepsilon \end{cases} \tag{53}$$

---

[30] *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. Москва: Наука, 1989.

[31] *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. Москва: Изд. МГУ им. М.В.Ломоносова, 1990.

и

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u_\varepsilon^k = -\lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \lambda_\varepsilon^k \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial \nu} - q u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{54}$$

где

$$\rho^\varepsilon(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{в} & \Omega \backslash B_\varepsilon, \\ \frac{1}{(\varepsilon\delta)^m} & \text{в} & B_\varepsilon \end{array}\right. .$$

а ν — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Предполагается, что $q \equiv const > 0$, а $m < 2$.

Во **втором параграфе** формулируется вспомогательная теорема Олейник–Иосифьяна–Шамаева[32] и на её основе проводится усреднение задачи (53) и доказываются оценки отклонения собственных элементов исходной задачи от собственных элементов усреднённой задачи.

Обозначим $P := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}$. Рассмотрим краевые задачи

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta s^\varepsilon = -\rho^\varepsilon(x) f^\varepsilon \ \text{ в } \ \Omega \ , \\ s^\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon \ , \\ \dfrac{\partial s^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\varepsilon \ , \end{array}\right. \tag{55}$$

которая соответствует спектральной задаче (53), и

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta s^0 = -f^0(x) \ \text{ в } \ \Omega \ , \\ s^0 = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad (P = +\infty), \\ \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial s^0}{\partial \nu} + P \frac{\sigma_n c_{\gamma_0^\varepsilon}}{2} s^0 = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_2, \\ s^0 = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \end{array}\right], \ (P < +\infty), \end{array}\right. \tag{56}$$

где σ_n — площадь единичной n-мерной сферы, а $c_{\gamma_0^\varepsilon} := cap(\gamma_0^\varepsilon)$ — гармоническая ёмкость $(n-1)$-мерного диска γ_0^ε. Пусть функция Θ^ε, периодическая по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, является первой собственной функцией задачи типа Стеклова

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta \Theta^\varepsilon = 0 \ \text{ в } \ D, \\ \Theta^\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \gamma_0^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \varsigma_\varepsilon \Theta^\varepsilon \ \text{ на } \ \Sigma \backslash \gamma_0^\varepsilon. \end{array}\right. \tag{57}$$

Доказано существование такой функции. Зададим ϑ_ε формулой

$$\vartheta_\varepsilon(x) = 1 + \psi(x_n)\left(\Theta^\varepsilon\left(\frac{x}{\delta}\right) - 1\right)$$

[32] *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. Москва: Изд. МГУ им. М.В.Ломоносова, 1990.

и продолжим её по периодичности. Здесь $\psi(t)$ — гладкая срезающая функция одной переменной, $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ в некоторой достаточно малой окрестности Γ_2. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.2.1. *Если $P < +\infty$, s^ε и s^0 — обобщённые решения задач (55) и (56), соответственно, то существует такая константа K_1, не зависящая от ε, и δ, что для достаточно малых ε имеем*

$$\|s^0\vartheta_\varepsilon - s^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le K_1\Big(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \Big|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\Big| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big).$$

Если $P = +\infty$, то существует K_2 такое, что

$$\|s^0\vartheta_\varepsilon - s^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le K_2\Big(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big).$$

Теперь приведём спектральную задачу, соответствующую краевой (56):

$$\begin{cases} \Delta s_0^k = -\lambda_0^k s_0^k \ \text{ в } \ \Omega \ , \\ s_0^k = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad (P = +\infty), \\ \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial s_0^k}{\partial \nu} + P\frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} s_0^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_2, \\ s_0^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \end{array}\right], \ (P < +\infty). \\ \int\limits_\Omega s_0^k s_0^l dx = \delta_{kl}, \ \ 0 < \lambda_0^1 \le \lambda_0^2 \le \cdots \ , \end{cases} \tag{58}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть λ_0^k, λ_ε^k являются собственными значениями задач (58) и (53), соответственно. Тогда*

$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \le C_k^1\Big(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \Big|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\Big| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big), \ \ \textit{если} \ \ P < \infty,$$

$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \le C_k^2\Big(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big), \ \ \textit{если} \ P = +\infty,$$

где постоянные C_k^1, C_k^2 не зависят от ε.

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (58) равна r, то есть $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \cdots = \lambda_0^{l+r}$, то для любой собственной функции s_0^l задачи (58), соответствующей собственному значению λ_0^l, $\|s_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{s^\varepsilon}$ собственных функций задачи (53), соответствующих собственному значению $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \cdots, \lambda_\varepsilon^{l+r}$ такая, что

$$\Big(\int\limits_\Omega \rho^\varepsilon(x)|\overline{s^\varepsilon} - s_0^l|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_l^1\Big(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \Big|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\Big| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big), \ \ \textit{если} \ P < \infty,$$

$$\Big(\int_\Omega \rho^\varepsilon(x)|\overline{s^\varepsilon}-s_0^l|^2dx\Big)^{\frac12}\le C_l^2\Big(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}+\frac{\delta^{\frac12}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}+\varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big),\ \ \textit{если}\ \ P=+\infty,$$

где постоянные C_l^1, C_l^2 *не зависят от* ε *и* s_0^l.

В **третьем параграфе** основная спектральная задача (54) сводится к операторному пучку и проводится её усреднение. В конце параграфа проводится аналогия исходной задачи с задачей о малых колебаниях вязкой неоднородной жидкости в неподвижном сосуде.

Доказано, что самосопряжённый операторный пучок, соответствующий задаче (54), имеет вид

$$L(\lambda_\varepsilon):=I-\lambda_\varepsilon\mathbf{A}_\varepsilon-\frac{q}{\lambda_\varepsilon}\mathbf{B}_\varepsilon, \tag{59}$$

где оператор $\mathbf{A}_\varepsilon$ определяется следующим образом: $\mathbf{A}_\varepsilon[f]=s^\varepsilon$, и s^ε — решение задачи (55), а $\mathbf{B}_\varepsilon$ — оператор, который определяется равенством $\mathbf{B}_\varepsilon[\varphi]=w^\varepsilon$ и w^ε — решение задачи

$$\begin{cases}\Delta w^\varepsilon(x)=0 & \text{в} \quad \Omega,\\ w^\varepsilon(x)=0 & \text{на} \quad \Gamma_1\cup\gamma_\varepsilon,\\ \dfrac{\partial w^\varepsilon(x)}{\partial\nu}=\varphi & \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon.\end{cases} \tag{60}$$

Аналогичные пучки возникали в работах А.А.Шкаликова[33][34].

Имеет место теорема.

Теорема 2.3.2.

Задача (59) *обладает следующими свойствами.*

• *Спектр задачи* (59) *дискретный и состоит из счётного множества действительных собственных значений конечной кратности, которые расположены на интервалах* $(0,\,r_-)$, $(r_+,\,+\infty)$ *действительной оси, где*

$$r_\pm=\frac{1\pm\sqrt{1-4q\|\mathbf{A}_\varepsilon\|\,\|\mathbf{B}_\varepsilon\|}}{2\|\mathbf{A}_\varepsilon\|},\qquad 0<r_-<r_+,$$

и состоит из двух семейств $\{(\lambda_\varepsilon^k)^+\}_{k=1}^\infty$, $\{(\lambda_\varepsilon^k)^-\}_{k=1}^\infty$ *с точками накопления* $+\infty$ *и* 0, *соответственно, т.е.* $(\lambda_\varepsilon^k)^-\to 0$ *при* $k\to\infty$, *и* $(\lambda_\varepsilon^k)^+\to+\infty$ *при* $k\to\infty$, *при этом* $\lambda_k^-\ne\lambda_j^+$, $k,j\in\mathbb{N}$.

• *Справедливы следующие оценки и асимптотические формулы:*

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{A}_\varepsilon)}-2q\|\mathbf{B}_\varepsilon\|\le(\lambda_\varepsilon^k)^+\le\frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{A}_\varepsilon)}\ \ (k=1,2,\cdots),$$

---

[33] *Marletta M., Shkalikov A.A., Tretter C.* Pencils of differential operators containing the eigenvalue parameter in the boundary conditions. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133. 2003. № 4. P. 893–917.

[34] *Shkalikov A.A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula. Recent developments in operator theory and its applications (Winnipeg, MB, 1994). Oper. Theory Adv. Appl., 87. Basel: Birkhäuser. 1996, p. 358–385.

$$(\lambda_\varepsilon^k)^+ = \frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{A}_\varepsilon)}[1+o(1)] \qquad \text{\textit{при}} \qquad k \to +\infty,$$

$$q\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon) \le (\lambda_\varepsilon^k)^- \le \frac{q\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon)}{1-2q\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon)\|\mathbf{A}_\varepsilon^{-1}\|}\,(k=1,2,\cdots),$$

$$(\lambda_\varepsilon^k)^- = q\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon)[1+o(1)] \qquad \text{\textit{при}} \qquad k \to +\infty.$$

Далее проводится усреднение операторного пучка.

Доказано, что предельными при $\varepsilon \to 0$ (усреднёнными) задачами для (55) и (60) являются, соответственно, задача (56) и

$$\begin{cases} \Delta w^0(x) = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega; \\ w^0(x) = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial w^0(x)}{\partial \nu} + P\frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} w^0 = \varphi \qquad \text{на} \qquad \Gamma_2 \qquad (P<\infty); \\ w^0 = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega \qquad (P=\infty). \end{cases} \tag{61}$$

Определим $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ следующим образом: $\widehat{\mathbf{A}}[f^0] = s^0$, $\widehat{\mathbf{B}}[\varphi] = w^0$ при $P<\infty$ и $\widehat{\mathbf{B}} \equiv 0$ при $P=\infty$, где s^0 — решение задачи (56), w^0 — решение задачи (61), тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{A}_\varepsilon)$ — собственные значения оператора $\mathbf{A}_\varepsilon$, такие что $\lambda_\varepsilon^1(\mathbf{A}_\varepsilon) > \lambda_\varepsilon^2(\mathbf{A}_\varepsilon) \ge \cdots > 0$; $\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon)$ — собственные значения оператора $\mathbf{B}_\varepsilon$, такие что $\lambda_\varepsilon^1(\mathbf{B}_\varepsilon) > \lambda_\varepsilon^2(\mathbf{B}_\varepsilon) \ge \cdots > 0$; $\lambda_0^k(\widehat{\mathbf{A}})$ — собственные значения оператора $\widehat{\mathbf{A}}$, такие что $\lambda_0^1(\widehat{\mathbf{A}}) > \lambda_0^2(\widehat{\mathbf{A}}) \ge \cdots > 0$, и пусть $\lambda_0^k(\widehat{\mathbf{B}})$ — собственные значения оператора $\widehat{\mathbf{B}}$ в случае $P<\infty$, такие что $\lambda_0^1(\widehat{\mathbf{B}}) > \lambda_0^2(\widehat{\mathbf{B}}) \ge \cdots > 0$. Здесь все наборы собственных значений перенумерованы с учётом кратности.*

Тогда существуют константы C_1, C_2, C_3 и C_4, зависящие только от k, такие что

$$\left|\frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{A}_\varepsilon)} - \frac{1}{\lambda_0^k(\widehat{\mathbf{A}})}\right| \le C_1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right|\right), \ \text{\textit{если}}\ P<\infty,$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{A}_\varepsilon)} - \frac{1}{\lambda_0^k(\widehat{\mathbf{A}})}\right| \le C_2\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + \left(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\right)\right), \quad \text{\textit{если}} \quad P=\infty,$$

$$\left|\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon) - \lambda_0^k(\widehat{\mathbf{B}})\right| \le C_3\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right|\right), \ \text{\textit{если}}\ P<\infty,$$

$$\left|\lambda_\varepsilon^k(\mathbf{B}_\varepsilon)\right| \le C_4\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + \left(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\right)\right), \quad \text{\textit{если}} \quad P=\infty.$$

Теорема 3.3.4. *Пусть* u_ε *— решение задачи* (54), *тогда* $u_\varepsilon \rightharpoonup u^0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где*

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -\lambda u^0 \quad \text{в} \quad \Omega; \\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \lambda\Big(\dfrac{\partial u^0}{\partial \nu} + P^{\frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2}} u^0\Big) - q u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (P < \infty), \\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (P = \infty). \end{cases}$$

Операторный пучок

$$I - \lambda \widehat{\mathbf{A}} - \frac{q}{\lambda}\widehat{\mathbf{B}} \qquad (P < \infty),$$
$$I - \lambda \widehat{\mathbf{A}} \qquad (P = \infty)$$

называем **усреднённым операторным пучком** для (59).

Третья глава. В третьей главе рассматривается задача для уравнения Гельмгольца в неограниченной области с концентрированными массами на границе. Доказывается теорема усреднения, строятся решения и их аналитические продолжения и доказывается сходимость полюсов аналитического продолжения к собственным значениям предельной задачи.

В **первом параграфе** ставится задача, строится аналитическое продолжение стандартным способом[35] и доказывается теорема сходимости.

Пусть Ω — гладкая область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Предполагается, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, участок Γ_2 принадлежит плоскости $\{x_3 = 0\}$ и состоит из двух частей, γ_ε и $\Gamma_2 \backslash \overline{\gamma}_\varepsilon$, где $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$. Введём следующее обозначение: $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} B_\varepsilon^i$ — объединение полушаров, находящихся внутри области Ω. Поясним теперь построение. Пусть B_ε — гомотетичное сжатие δB, B - область, полученная целочисленными сдвигами множества B^0 на плоскости $\{\xi_3 = 0\}$, с центрами в точках $\widetilde{\xi_k} = (k_1, k_2, 0)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, B^0 — это полушар $\{(\xi_1, \xi_3) \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 < \varepsilon^2,\ \xi_3 < 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^3$, $\xi = \dfrac{x}{\delta}$, $\gamma_0 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 < \varepsilon^2,\ \xi_3 = 0\}$. При этом $\gamma_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon \cap \partial\Omega$. Заметим, что $N_\delta = O\Big(\dfrac{1}{\delta^2}\Big)$.

Рассматривается случай, когда $\delta = \delta(\varepsilon)$ зависит от ε и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = \infty$.

Предположим, что F — функция из $L_2(\mathbb{R}^3)$ с ограниченным носителем.

[35] *Sánchez-Palencia E.* Homogenization Techniques for Composite Media. Berlin – New York: Springer-Verlag, 1987.

Рассматривается следующая задача в неограниченной области:

$$\begin{cases} \left(\Delta + \rho^{\varepsilon} k^2\right) u_{\varepsilon,\delta} = F, \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\gamma_{\varepsilon} \cup \Gamma_2}, \\ u_{\varepsilon,\delta} = 0, \quad \text{на} \quad \gamma_{\varepsilon} \cup \Gamma_2, \end{cases} \tag{62}$$

с условиями излучения

$$u_{\varepsilon,\delta} = O(r^{-1}), \qquad \frac{\partial u_{\varepsilon,\delta}}{\partial r} - iku_{\varepsilon,\delta} = o(r^{-1}) \qquad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{63}$$

где $\operatorname{Im} k \geq 0$, $r = |x|$ и $\rho^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{(\varepsilon\delta)^m}, \ \text{в} \quad B_{\varepsilon} \\ 1, \quad \text{в} \quad \Omega \backslash B_{\varepsilon} \end{cases}$, $m < 1$.

Справедлива теорема.

Теорема 3.1.1. *Предположим, что f и $\widetilde{f}$ — суть сужения функции F на Ω и на $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$, соответственно. Тогда решение задачи* (62), (63) *сходится к функции*

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x), \quad \textit{в} \quad \Omega, \\ \widetilde{u}_0(x), \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$$

сильно в $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ при $\varepsilon \to 0$, где $u_0(x)$ — решение задачи

$$-\Delta u_0 = k^2 u_0 - f, \quad \textit{в} \quad \Omega, \qquad\qquad u_0 = 0, \quad \textit{на} \quad \Gamma, \tag{64}$$

а $\widetilde{u}_0(x)$ — решение задачи

$$\left(\Delta + k^2\right) \widetilde{u}_0 = \widetilde{f}, \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \qquad\qquad \widetilde{u}_0 = 0, \quad \textit{на} \quad \Gamma, \tag{65}$$

удовлетворяющее условиям излучения

$$\widetilde{u}_0 = O(r^{-1}), \qquad \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial r} - ik\widetilde{u}_0 = o(r^{-1}) \qquad \textit{при} \quad r \to \infty. \tag{66}$$

Здесь предполагается, что k^2 не является собственным значением уравнения Гельмгольца в области Ω.

Если $k^2 = k_0^2$ — собственное значение уравнения Гельмгольца в области Ω, то существует полюс $\tau_{\varepsilon,\,\delta(\varepsilon)}$ аналитического продолжения решения (62), (63) *в полуплоскости* $\operatorname{Im} k < 0$, *сходящийся к k_0 при $\varepsilon \to 0$.*

Основные публикации автора по теме диссертации

(из официального Перечня ВАК)

[1] Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сборник. - 1993. - т. 184, № 6. - с. 99–150.

[2] Чечкин Г.А. Полное асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимися граничными условиями в слое // УМН. - 1993. - т. 48, вып. 4. - с. 218–219.

[3] Чечкин Г.А. О колебаниях тел с концентрированными массами, расположенными на границе // УМН.- 1995.- т. 50, № 4.- с. 105–106.

[4] Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий // Труды семинара им. И.Г.Петровского.- 1996.- т. 19.- с. 323–337.

[5] Чечкин Г.А. Граничное усреднение в областях с сингулярной плотностью // Дифференциальные уравнения.- 2003.- т. 39, № 6.- с. 855.

[6] Чечкин Г.А. Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах. // УМН.- 2004.- т. 59, вып. 4.- с. 205–206.

[7] Чечкин Г.А. Об оценке решений краевых задач в областях с концентрированными массами, периодически расположенными вдоль границы. Случай "лёгких" масс. // Мат. заметки.- 2004.- т. 76, № 6.- с. 928–944.

[8] Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Двумерный случай. // Известия РАН.- 2005.- т. 69, № 4.- с. 161–204.

[9] Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение собственных элементов оператора Лапласа в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Многомерный случай. // Проблемы математического анализа.- 2005.- т. 30.- с. 87–119.

[10] Чечкин Г.А. Усреднение модельной спектральной задачи для оператора Лапласа в области с большим количеством близко расположенных "тяжёлых" и "средних" концентрированных масс. // Проблемы математического анализа.- 2006.- т. 32.- с. 45–76.

[11] Чечкин Г.А. Об усреднении решений задачи для оператора Лапласа в неограниченной области с большим количеством концентрированных масс на границе // Проблемы математического анализа.- 2006.- т. 33.- с. 103–111.

(прочие)

[12] Chechkin G.A. Vibration of Fluids in a Vessel with a Net on the Surface // In Homogenization and Applications to Material Sciences. Edited by D.Cioranescu, A.Damlamian, and P.Donato. Vol. 9, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications. Tokyo: Gakkōtosho, 1997, 95–112.

[13] Chechkin G.A. On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “light” Concentrated Masses on the Boundary // C R Mécanique.- 2004.- v. 332, № 12.- p. 949–954.

[14] Chechkin G.A. Spectrum of Homogenized Problem in a Circle Domain with Many Concentrated Masses // In Multi Scale Problems and Asymptotic Analysis. Edited by D.Cioranescu, A.Damlamian, P.Donato, and A.L.Piatnitski. Vol. 24, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications. Tokyo: Gakkōtosho, 2005, 49–62.

[15] Chechkin G.A. Operator Pencil and Homogenization in the Problem of Vibration of Fluid in a Vessel with a Fine Net on the Surface // IMA Preprint Series #1367. Minneapolis: Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota. November 1995.

[16] Chechkin G.A. Vibration of Fluid in a Vessel with a Net on the Surface // Abstracts du Colloque EurHomogenization “Homogénéisation et Applications aux Sciences des Matériaux” , Nice , June 6 - 10, 1995.- p. 16–17.

[17] Chechkin G.A. On Properties of Eigenelements of Boundary Value Problems in Domains with Many Concentrated Masses on the Boundary // Abstracts of the Conference “Advanced Mathematics, Computations and Applications” (AMCA - 95), Novosibirsk, June 20 - 24, 1995.- v. 1.- p. 69–70.

[18] Chechkin G.A. On Spectral Properties of Boundary Value Problems in Domains with Many Concentrated Masses Near the Boundary // Proceedings of the Fifth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutional Problems (KROMSH - V), p. Laspi, Crimea, Ukraine, September 19 - 30, 1994.- p. 51–53. (Simferopol - 1996: Simferopol

State University, Crimean Mathematical Foundation, Crimean Academy of Science).

[19] Chechkin G.A. Boundary Homogenization for Elliptic Operators // Abstracts of Junior Mathematical Congress (JMC–96), 8. Miscolc, Hungary, July 29 - August 2, 1996.

[20] Chechkin G.A. Homogenization Problems in Domains with Concentrated Masses// Book of Abstracts of the 5th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2003) (July 7-11, 2003, Sydney, Australia), 147, Sydney: Sydney University of Technology Press, June 2003.

[21] Чечкин Г.А. Усреднённый спектр краевой задачи для оператора Лапласа в области с большим количеством концентрированных масс критической плотности, близко расположенных на границе. // Book of Abstracts of the International Conference "Differential Equations and Related Topics" dedicated to the 103-d Anniversary of Ivan G. Petrovskii (XXI Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society) (May 16-22, 2004, Moscow, Russia), 44–45, Moscow: Moscow University Press, 2004. [Международная конференция, посвящённая 103-летию со дня рождения И.Г.Петровского (XXI сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского): Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ, 2004.- 280 с.]

[22] Chechkin G.A. Spectrum of Homogenized Problem in a Domain with Many Heavy Concentrated Masses. Book of Abstracts of the Midnight Sun Narvik Conference (June 22-26, 2004, Narvik, Norge), 16–18, Narvik: Narvik University College Press, 2004.

[23] Чечкин Г.А. О поведении спектра краевых задач в областях с концентрированными массами // Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (10–15 июля 2006, Суздаль, Россия), 224–226. Владимир: Изд-во "Собор", 2006.

[24] Chechkin G.A. Behavior of Bodies with Singular Perturbation of Density // Book of Abstracts of the International Conference on Differential Equations, Dedicated to the 100-th Anniversary of Ya.B.Lopatynsky (ICL–100) (September 12–17, 2006, Lviv, Ukraine), 80–81, Lviv: Ivan Franko National University of Lviv Press, 2006.