МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

УДК 515.12

ЧАТЫРКО Виталий Альбертович

Индуктивные топологические инварианты, определяемые через перегородки, и объединения множеств

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Москва - 2007

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Пасынков Борис Алексеевич,

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Зарелуа Александр Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор Семёнов Павел Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор Шапиро Леонид Борисович

Ведущая организация: Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 18 мая 2007 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 18 апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Одной из основных функций теории размерности является малая индуктивная размерность ind, независимо определенная Урысоном и Менгером (Menger) в начале 1920'х годов [1].

Пусть X - регулярное T_1-пространство, а n целое число ≥ -1. Тогда

(i) $\operatorname{ind} X = -1$ тогда и только тогда, когда $X = \emptyset$;

(ii) $\operatorname{ind} X \leq n \ \geq 0$, если каждая точка в X обладает произвольно малыми открытыми окрестностями V с $\operatorname{ind} Bd V \leq n-1$

(здесь $Bd\,A$ обозначает границу множества A в пространстве X).

Альтернативно в определении размерности ind вместо границ открытых множеств можно использовать *перегородки* между точками и произвольными замкнутыми множествами, их не содержащими, то есть такие множества, дополнение к которым в пространстве X есть объединение двух дизъюнктных открытых множеств, одно из которых содержит выбраную точку, а другое выбранное замкнутое множество.

Хорошо известно, что для сепарабельных метризуемых пространств размерность ind совпадает с двумя другими известными функциями, лебеговой размерностью $\dim$ и большой индуктивной размерностью Ind, в определении которых помимо Лебега (Lebesque) участвовали Брауэр (Brouwer) и Чех (Cech). Поэтому для таких пространств в классической теории размерности говорят просто о размерности пространства.

Вне класса сепарабельных метризуемых пространств функции ind, Ind и $\dim$ вообще говоря различны. К примеру, широко известно, что для всякого нормального T_1-пространства X справедливы неравенства

$$\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X, \ \dim X \leq \operatorname{Ind} X,$$

и для любых трех целых чисел $l, m, n : n \geq l \geq 0, \ n \geq m > 0$, а также для $n = m = l = 0$, существует такое нормальное T_1-пространство $L(l, m, n)$, что

$$\operatorname{ind} L(l, m, n) = l, \ \dim L(l, m, n) = m, \ \operatorname{Ind} L(l, m, n) = n$$

(напомним, что если $\dim X = 0$ для нормального T_1-пространства X, тогда $\operatorname{Ind} X = 0$).

Отметим, что проблемы взаимоотношений функций ind, Ind и $\dim$ в том или ином классе топологических пространств являются основой теории размерности. Здесь можно вспомнить знаменитую проблему Александрова

[1] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, Введение в теорию размерности, М: Наука, 1973

о совпадении трех размерностей для бикомпактов, которая стимулировала деятельность большого числа отечественных топологов на протяжении последних 70-ти лет.

Заметим также, что поведение размерности в сепарабельных метризуемых пространствах описано в литературе очень хорошо, как и поведение лебеговой размерности $\dim$ и большой индуктивной размерности Ind в нормальных T_1-пространствах. Что касается малой индуктивной размерности ind, то обычно она находилась при обсуждении "в тени", после $\dim$ и Ind.

В этой диссертации мы сделаем наоборот и больше внимания уделим размерности ind и ее "родственницам".

Одной из последних является малая индуктивная степень компактности cmp, рассмотренная де Гроотом (de Groot) [2]. Ее определение можно получить из определения размерности ind заменой в пункте (i) условия: $X = \emptyset$, на условие: *пространство X компактно.*

Появление cmp было стимулировано приведенным ниже утверждением де Гроота (de Groot), которое дает внутреннюю характеризацию пространства, имеющего метризуемую компактификацию с размерностью нароста ≤ 0, и последующей попыткой его обобщения.

Пространство X имеет метризуемую компактификацию с размерностью нароста ≤ 0 тогда и только тогда, когда в этом пространстве между любой точкой $p \in X$ и любым замкнутым множеством $A \subset X$, не содержащим p, всегда найдется компактная перегородка.

Другая функция, участвовавшая в обобщении, дефект компактности def, определяется равенством

$$\operatorname{def} X = \min\{\dim(Y \setminus X) : Y \text{ метризуемая компактификация } X\},$$

для всякого сепарабельного метризуемого пространства X.

Следуя теории размерности, де Гроот (de Groot) определил также с помощью перегородок между дизъюнктными замкнутыми множествами аналог размерности Ind, большую индуктивную степень компактности Cmp, при базисе индукции: $Cmp\, X = n,\ n = -1, 0 \Longleftrightarrow cmp\, X = n$;

и поставил проблему описания взаимоотношений функций cmp, def и Cmp в сепарабельных метризуемых пространствах, привлёкшую внимание многих зарубежных топологов.

Отметим, что появление функции Cmp, а также наличие для нее такого базиса индукции объясняется изначальным желанием де Гроота (de Groot) получить функцию, способную помочь разобраться в отношениях между функциями cmp и def, а значит близкую к этим функциям. Легко видеть, что формальная замена условия: $X = \emptyset$, на условие: *пространство X компактно*, в определении большой индуктивной размерности Ind приводит к

[2] J. de Groot, Topologische Studien, thesis (Groningen 1942)

функции $\mathcal{K}$-Ind, отличной от функций cmp и def (к примеру, для полуинтервала $I* = (0,1]$ справедливо $\mathcal{K}\text{-Ind}\, I* = 1$, а $\operatorname{cmp} I* = \operatorname{def} I* = 0$).

Сейчас хорошо известно, что

$$\operatorname{cmp} X \leq \operatorname{Cmp} X \leq \operatorname{def} X \ (\leq \mathcal{K}\text{-Ind}\, X) \leq \operatorname{ind} X$$

для всякого сепарабельного метризуемого пространства X (отметим, что условие $\operatorname{cmp} X = 0$ влечет равенство $\operatorname{def} X = 0$), и имеются примеры таких подмножеств Y, Z евклидова пространства R^4, что

$$\operatorname{cmp} Y < \operatorname{Cmp} Y \text{ и } \operatorname{Cmp} Z < \operatorname{def} Z.$$

Однако полного описания взаимоотношений указанных функций пока не сделано. Например, нет примера такого сепарабельного метризуемого пространства X, для которого все три значения $\operatorname{cmp} X, \operatorname{Cmp} X, \operatorname{def} X$ были бы различны.

В 1964 году Лелек (Lelek) [3] предложил обобщить определения малой индуктивной размерности ind и малой индуктивной степени компактности cmp. Напомним его подход.

Пусть X - регулярное T_1-пространство, n целое число ≥ -1, а $\mathcal{P}$ класс топологических пространств, монотонный по замкнутым подмножествам ($\emptyset$ является элементом $\mathcal{P}$ по определению). Тогда малая индуктивная размерность по модулю $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}\text{-}ind\, X$ пространства X определяется так.

(i) $\mathcal{P}\text{-}ind\, X = -1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{P}$;

(ii) $\mathcal{P}\text{-}ind\, X \leq n \geq 0$, если каждая точка в X обладает произвольно малыми открытыми окрестностями V с $\mathcal{P}\text{-}ind\, Bd V \leq n-1$.

Отметим, что альтернативно в определении размерности $\mathcal{P}$-ind вместо границ открытых множеств можно использовать перегородки между точками и произвольными замкнутыми множествами, их не содержащими.

Легко видеть, что если $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$, тогда $\mathcal{P}\text{-ind}\, X = \operatorname{ind} X$, а если $\mathcal{P}$ есть класс всех компактных пространств, тогда $\mathcal{P}\text{-ind}\, X = \operatorname{cmp} X$. Позднее Аартс (Aarts) и Нишиура (Nishiura) [4] довели количество частных случаев размерности $\mathcal{P}$-ind до ω_1-штук, начав рассматривать в качестве $\mathcal{P}$ абсолютные борелевские классы.

Теперь вернёмся назад во времени.

[3] A. Lelek, Dimension and mappings of spaces with finite deficiency, Colloq. Math. 12 (1964) 221-227

[4] J. M. Aarts and T. Nishiura, Dimension and Extensions, North-Holland, Amsterdam, 1993

Также в начале 1920'х годов Урысон заметил, что можно рассмотреть естественное трансфинитное продолжение размерности ind, трансфинитную малую индуктивную размерность trind. (Формальное определение функции trind было дано Гуревичем (Hurewicz) [5].) Размерность trind, как известно, является одной из основных функций трансфинитной теории размерности.

Напомним, что большая индуктивная размерность Ind также может быть естественно продолжена на трансфинитные числа. Это было сделано Смирновым [6]. Трансфинитная большая индуктивная размерность trInd также является популярной функцией трансфинитной теории размерности.

Хорошо известно, что $\mathrm{trind}\, X \le \mathrm{trInd}\, X$ для всякого нормального T_1-пространства X, и существуют даже метризуемые компакты, для которых $\mathrm{trind} \neq \mathrm{trInd}$.

Отметим, что размерность $\dim$ продолжается на трансфиниты различными способами. Обычно используется какая-либо характеризация размерности $\dim$, которую можно естественным образом продолжить на ординальные числа.

По аналогии с размерностью ind малая индуктивная степень компактности cmp допускает естественное трансфинитное продолжение, трансфинитную малую индуктивную степень компактности trcmp. Первые результаты о функции trcmp были получены Э. Пол (E. Pol)[7].

Большая индуктивная степень компактности Cmp также естественно продолжается на трансфиниты, причем для всякого нормального T_1-пространства X имеет место неравенство $\mathrm{trcmp}\, X \le \mathrm{trCmp}\, X$.

Дефект компактности def продолжается на ординальные числа различными способами.

Относительно недавно Хараламбус (Charalambous) [8] рассмотрел естественное трансфинитное продолжение размерностной функции $\mathcal{P}$-ind, трансфинитную малую индуктивную размерность по модулю $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}$-trind, и обсудил первые вопросы, связанные с взаимоотношениями ее частных случаев.

(Заметим, что если $P = \{\emptyset\}$, тогда $\mathcal{P}\text{-}\mathrm{trind}\, X = \mathrm{trind}\, X$, а если $\mathcal{P}$ есть класс всех компактных пространств, тогда $\mathcal{P}\text{-}\mathrm{trind}\, X = \mathrm{trcmp}\, X$. Напомним также, что в качестве $\mathcal{P}$ можно рассматривать различные абсолютные борелевские классы.)

Все перечисленные функции будем называть размерностными функциями.

---

[5] W. Hurewicz, Ueber unendlich-dimensionale Punktmengen, Proc. Akad. Amsterdam 31 (1928) 916-922

[6] Ю. М. Смирнов, Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств, Изв. Акад. Наук СССР Сер. Мат. 23 (1959) 185-196

[7] E. Pol, The Baire-category method in some extension problems, Pacific J. Math. 122, 1 (1986) 197-210

[8] M. Charalambous, On transfinite inductive dimension and deficiency modulo a class $\mathcal{P}$, Topol. Appl. 81 (1997), 123-135

Результат, предлагающий оценку размерностной функции от объединения множеств в терминах этой размерностной функции от участвующих в операции множеств, называется *теоремой сложения.* Можно говорить о конечных, счетных и других теоремах сложения в зависимости от типа объединения.

Хорошо известно, что для сепарабельных метризуемых пространств справедлива следующая теорема сложения для размерности, выписанная здесь с использованием функции ind.

(1) *Пусть* $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, *где все множества* X_i *замкнуты в пространстве* X, *тогда* $\mathit{ind}\, X = \sup\{\mathit{ind}\, X_i\}$.

Однако вне класса сепарабельных метризуемых пространств аналога этого утверждения вообще говоря нет. Напомним, что

(2) *существует компакт* $L = L_1 \cup L_2$ *с* $\mathit{ind}\, L = 2$, *являющийся объединением двух замкнутых и одномерных в смысле размерности ind подмножеств* L_1 *и* L_2 [9];

(3) *существует метризуемое пространство* $M = M_1 \cup M_2$ *с* $\mathit{ind}\, M = 1$, *являющееся объединением двух замкнутых и нульмерных в смысле размерности ind подмножеств* M_1 *и* M_2 [10].

(Отметим, что в этих примерах используются пространства с несовпадающими размерностями.)

Кроме того,

(4) *существует метризуемый компакт* S^{ω_0+1} *с* $\mathit{trind}\, S^{\omega_0+1} = \omega_0 + 1$, *являющийся объединением двух замкнутых подмножеств с* $\mathit{trind} = \omega_0$ *каждое* [11].

То есть аналога утверждения (1) для трансфинитной размерности trind нет даже в классе метризуемых компактов. Несложно показать, что и для функции cmp аналог утверждения (1) не существует.

Заметим однако, что для указанных функций хорошо известны конечные теоремы сложения для замкнутых подмножеств в общих пространствах, предлагающие верхние оценки (см. например, [12] для размерности

[9] О. В. Локуциевский, О размерности бикомпактов, ДАН СССР 67 (1949) 217-219

[10] E.K. van Douwen, The small inductive dimension can be raised by the adjunction of a single point, Indag. Math. 35 (1973) 434-442

[11] Б. Т. Левшенко, Пространства трансфинитной размерности, Мат. Сб. 67 (1965) 225-266

[12] В. В. Федорчук, Бесконечномерные бикомпакты, Изв. Акад. Наук СССР Сер. Мат, 42 (1978) 1162-1178

ind , класс нормальных пространств, и [13] для функции cmp , класс сепарабельных метризуемых пространств). Эти результаты были обобщены в упомянутой выше работе Хараламбуса (Charalambous) следующим образом.

Пусть $X = X_1 \cup X_2$ *- регулярное* T_1*-пространство, множества* X_1 *и* X_2 *замкнуты в* X*, а* $\mathcal{P}$ *допустимый класс топологических пространств. Если* α_1, α_2 *- ординальные числа* ≥ 0 *и* $\mathcal{P}\text{-}trind\, X_i \leq \alpha_i$ *для каждого* $i = 1, 2$*, тогда*

$$\mathcal{P}\text{-}trind\, X \leq \begin{cases} \max\{\alpha_1, \alpha_2\} & , \text{ если } \lambda(\alpha_1) \neq \lambda(\alpha_2), \\ \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + \min\{n(\alpha_1), n(\alpha_2)\} + 1 & , \text{ если } \lambda(\alpha_1) = \lambda(\alpha_2). \end{cases}$$

(Напомним, что каждое порядковое число α можно представить в виде суммы $\alpha = \lambda(\alpha) + n(\alpha)$, где $\lambda(\alpha)$ - предельное число или 0, а $n(\alpha)$ целое число ≥ 0.)

Однако это неравенство не является, как будет показано, рабочим, а значит удовлетворительным.

Данная работа основана на новой теореме сложения для размерностной функции $\mathcal{P}$-trind в классе регулярных T_1-пространств, предлагающей верхнюю оценку для функции $\mathcal{P}$-trind от объединения двух замкнутых подмножеств более эффективную, чем оценка Хараламбуса (Charalambous) (оказывается слагаемое $\min\{n(\alpha_1), n(\alpha_2)\}$ в приведенной выше формуле может быть отброшено).

Теорема получена путем аккуратного выбора перегородок между точками и замкнутыми множествами, их не содержащими, с последующей комбинацией свойств монотоности размерностной функции $\mathcal{P}$-trind с теоремой сложения для открытых подмножеств.

Частные случаи этой теоремы для размерностей ind (*trind*), cmp (trcmp) хорошо согласуется с упомянутыми выше примерами (2)-(4).

От случая двух слагаемых можно перейти к случаю любого конечного числа слагаемых. Причем для получении рабочей формулы нужно действовать не общепринятым способом поочередного суммирования слагаемых, а использовать предлагаемый в диссертации метод попарного суммирования.

Эти утверждения широко применяются в диссертации при доказательствах различных теорем сложения (для указанных размерностных функций), произведения (случай размерности ind (trind)), а также для построения пространств с различающимися размерностными функциями trind и trInd , cmp и Cmp .

[13] J. de Groot and T. Nishiura, Inductive compactness as a generalization of semicompactness, Fund. Math. 58 (1966) 201-218

Цель работы.

Целью работы является изучение топологических инвариантов, определяемых индуктивно через перегородки. В том числе поведение таких инвариантов на объединениях множеств и произведениях пространств.

Рассмотрение в этой связи ряда вопросов, касающихся совпадения основных трансфинитных размерностных функций, а также основных топологических инвариантов из теории компактификаций в классах хороших пространств и на конкретных их представителях.

Методика исследования.

В диссертации используются методы аккуратного выбора перегородок, специальных A- и B-разложений, а также оптимальной разложимости пространств в смысле топологических инвариантов.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них следующие:

- Доказана конечная теорема сложения для малой индуктивной размерности по модулю класса P $\mathcal{P}\text{-trind}$ в регулярных T_1-пространств, предлагающая новую эффективную неулучшаемую многофункциональную верхнюю оценку для функции $\mathcal{P}\text{-trind}$ от конечного объединения замкнутых множеств в терминах функции $\mathcal{P}\text{-trind}$ от каждого участвующего в объединении множества.

- Найден ряд новых размерностных свойства компактов Смирнова. В частности, получена оценка для размерности trind от каждого компакта Смирнова, существенно улучшающая известную оценку Люксембурга; а также определена и доказана оптимальная разложимость компактов Смирнова в смысле размерности trInd, позволяющая строить многочисленные примеры компактов с различающимися трансфинитными размерностями trind, trInd и D.

- Решена проблема де Гроота (de Groot) о совпадении функций cmp и def на последовательности конечномерных кубов, у каждого их которых удалена комбинаторная внутренность одной из граней.

- Решена проблема Аартса (Aarts) и Нишиуры (Nishiura) о взаимоотношениях между функциями cmp и $\operatorname{def}(\operatorname{Cmp})$ в сепарабельных метризуемых пространствах.

- Разработаны методы специальных и оптимальных разложений.

Теоретическая и практическая значимость.

Предлагаемая работа носит теоретический характер. Развитые в работе подходы могут быть применены в конечной и бесконечной теории размерности, а также теории компактификаций.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

МГУ, механико-математический факультет: семинар под руководством профессоров В.В. Федорчука, Б.А. Пасынкова, В.И. Пономарева и В.В. Филиппова;

Варшавского университета (Warsaw University, Poland): семинар под руководством профессоров Р. Энгелькинга (R. Engelking), Х. Торунчика (H. Torunczyk);

Университета Шимане (Shimane University, Japan): семинар под руководством профессора Y. Hattori.

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях:

Международная конференция по топологии (Workshop on topology in Stefan Banach International Mathematical Center) (Варшава, декабрь 1998) - приглашенный лектор; Международная конференция по топологии и ее приложениям (International Conference on Topology and its Applications) (Йокогама, 23-27 августа 1999) - приглашенный участник; Международная конференция по топологии и ее приложениям (2000 Summer Conference on Topology and its Applications) (Оксфорд, 26-29 июль, 2000); Международный симпозиум по топологии (IX Prague Topological Simposium) (Прага, 19-25 августа, 2001); Международная конференция по топологии в Матсуе (International Conference on Topology in Matsue), (Матсуе, 24-28 июня 2002 г.) - приглашенный лектор; Международная конференция по геометрической топологии (Geometric topology II) (Дубровник, 29 сентября - 5 октября, 2002); Международная конференция по общей топологии и ее приложениям (V Iberoamerican conference on General Topology and its Applications) (Лорка, 10-14 июня, 2003); Международный симпозиум в честь профессора Я. Аартса (Simposium of Professor Jan Aarts), (Дельфт, 23-25 июня, 2003) - приглашенный участник; Международная конференция по геометрической топологии (Geometric Topology: Infinite-Dimensional Topology, Absolut Extensors, Applications) (Львов, 26-30 мая, 2004) - приглашенный лектор; Международная конференция по топологии и ее приложениям (2006 Internatioanl Conference on Topology and its Application) (Аегеон, 23-26 июня, 2006) - приглашенный участник;

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-22].

Структура и объём работы.

Диссертация занимает 182 страницы текста и состоит из введения, пяти глав, разбитых на семнадцать разделов и списка литературы, включающего 88 наименований. Нумерация утверждений тройная - номер главы, номер раздела и собственный номер, например, лемма 3.2.1 - лемма 1 второго раздела третьей главы.

Основное содержание работы

Первая глава. Основными результатами здесь являются теорема сложения для $\mathcal{P}$-trind и вытекающее из нее следствие.

Теорема 1.2.1 *Пусть $X = X_1 \cup X_2$ есть регулярное T_1-пространство, являющееся объединением двух своих замкнутых подмножеств $X_i, i = 1, 2$.*

(i) Если n есть целое число ≥ 0 и $\mathcal{P}\text{-}ind\, X_i \leq n$ для каждого $i = 1, 2$, тогда $\mathcal{P}\text{-}ind\, X \leq n + 1$.

(ii) Если α_1, α_2 есть ординальные числа ≥ 0 и $\mathcal{P}\text{-}trind\, X_i \leq \alpha_i$ для каждого $i = 1, 2$, тогда

$$\mathcal{P}\text{-}trind\, X \leq \begin{cases} \max\{\alpha_1, \alpha_2\} & , \text{ если } \lambda(\alpha_1) \neq \lambda(\alpha_2), \\ \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1 & , \text{ если } \lambda(\alpha_1) = \lambda(\alpha_2). \end{cases}$$

Следствие 1.2.1 *Пусть $X = \cup_{k=1}^{n+1} X_k$ есть регулярное T_1-пространство, являющееся объединением своих замкнутых подмножеств $X_i, i = 1, .., n+1$, $n \geq 0$, и m такое целое число, что $n \leq 2^m - 1$.*

(i) Если q есть целое число ≥ 0 и $\max\{\mathcal{P}\text{-}ind\, X_k\} \leq q$, тогда $\mathcal{P}\text{-}ind\, X \leq q + m$.

(ii) Если α есть ординальное число $\geq \omega_0$ и $\max\{\mathcal{P}\text{-}trind\, X_k\} \leq \alpha$, тогда $\mathcal{P}\text{-}trind\, X \leq \alpha + m$.

Теоремы сложения для замкнутых множеств для размерностей ind (trind) и cmp (trcmp), а также других частных случаев получаются простой заменой $\mathcal{P}$-ind ($\mathcal{P}$-trind) в сформулированных выше утверждениях на соответствующую пару.

Мотивацией присутствия произвольного ординального числа α в теореме сложения для замкнутых множеств для размерности trind является существование пространств (даже метризуемых) размерности $\operatorname{trind} = \alpha$ (доказано независимо Пасынковым[14] и Хаттори (Hattori)[15]).

Следующее утверждение из главы 1 усиливает этот результат и одновременно дает аналогичную мотивацию для функций trcmp и tricd (частный случай $\mathcal{P}$-trind , когда $\mathcal{P}$ - класс пространств метризуемых полной метрикой).

Теорема 1.3.1 *Для всякого порядкового числа α существует такие метризуемые пространства Y_α и Z_α, что*

$$\operatorname{trcmp} Y_\alpha = \operatorname{tricd} Z_\alpha = \alpha, \text{ а } \operatorname{trind} Y_\alpha \neq \infty, \operatorname{trind} Z_\alpha \neq \infty.$$

Заметим, что неравенства $\operatorname{tricd} X \leq \operatorname{trcmp} X \leq \operatorname{trind} X$ верны для любого метризуемого пространства X.

Вторая глава.

Здесь обсуждаются приложения Теоремы 1.2.1 для размерности ind (trind) при доказательствах различных теорем сложения и умножения в общих пространствах.

Хорошо известно, что

(5) *$ind(X_1 \cup X_2) \leq ind X_1 + ind X_2 + 1$, если пространство $X_1 \cup X_2$ наследственно нормально.*

(Заметим, что утверждение (5) не имеет аналога для функции cmp .)

Естественно спросить, что можно сказать о размерности ind от объединения $X_1 \cup X_2$, не являющегося наследственно нормальным пространством.

Пусть d - размерностная функция, монотонная по замкнутым подмножествам. Говорят, что в пространстве X имеет место *конечная теорема суммы для* d *в размерности* $k \geq 0$ (кратко, КТС(d , k)), если для любой пары замкнутых подмножеств F_1, F_2 пространства X с $\mathrm{d}\, F_1, \mathrm{d}\, F_2 \leq k$ справедливо неравенство $\mathrm{d}\,(F_1 \cup F_2) \leq k$.

Если в пространстве X КТС(d, k) имеет место для каждого $k \geq 0$, тогда говорят, что в X имеет место конечная теорема суммы для размерности d (кратко, КТС(d)).

Одной из теорем сложения, имеющей также трансфинитный аналог, является

Теорема 2.1.1 *Пусть регулярное T_1-пространство X есть объединение двух непустых множеств X_1 и X_2 с $Ind X_1 = n$ и $Ind X_2 = m$, где n, m есть целые числа ≥ 0. Тогда*

[14] Б. А. Пасынков, О трансфинитных размерностях, Ленинградская Международная Топологическая Конференция, 1982, Тезисы, 123

[15] Y. Hattori, Solutions to problems concerning transfinite dimension, Ques. Ans. Gen. Topology 1 (1983), 128-134

(i) $\mathrm{ind}\, X \leq 2(n+m+1)$; *и более того,*

(ii) $\mathrm{ind}\, X \leq n+m+1$, *если в пространстве* X *имеет место КТС(ind).*

Пока не известно можно ли заменить в указанном выше результате у слагаемых X_1 и X_2 размерность Ind на размерность ind.

Отметим, что для "родственницы" размерности ind, индуктивной размерности ind_0, введенной независимо Филипповым (см. [16]) и Хараламбусом (Charalambous)[17] и совпадающей с размерностью ind в классе совершенно нормальных пространств, строится такое компактное и наследственно нормальное пространство S, что $\mathrm{ind}_0 S = \infty$, и одновременно пространство S есть объединение двух всюду плотных дизъюнктных подмножеств с $\mathrm{ind}_0 = 0$ (Следствие 2.4.5).

Заметим также, что для размерности ind подобный результат невозможен, так как имеет место

Теорема 2.1.4 *Если регулярное* T_1*-пространство* X *есть объединение* $X_1 \cup ... \cup X_{n+1}$, *где для каждого* $i = 1, ..., n+1$ *подмножество* X_i *или всюду плотно в пространстве* X *и имеет размерность* $\mathrm{ind}\, X_i = 0$, *или дискретно в себе, тогда* $\mathrm{ind}\, X \leq n$.

Напомним также, что Церетели[18] построил пример вполне регулярного, ненормального пространства T с $\mathrm{Ind}\, T \geq 2$, являющегося объединением двух своих подмножеств T_1, T_2 с $\mathrm{Ind}\, T_i = 0$ для каждого $i = 1, 2$. Причем множество T_1 всюду плотно в T, а множество T_2 дискретно в себе.

Хорошо известно, что

(6) *если в пространствах* X *и* Y *имеет место КТС(ind), тогда*

$$\mathrm{ind}(X \times Y) \leq \mathrm{ind}\, X + \mathrm{ind}\, Y$$

(доказано Пасынковым[19] *для вполне регулярных пространств и Басмановым*[20] *для регулярных* T_1*-пространств)*

Положим для каждого пространства X

$$\mathrm{KTC}(d, X) = \begin{cases} \infty, \text{ если KTC(d)} & \text{имеет место в пространстве } X; \\ \min\{k \geq 0 : \mathrm{KTC}(\mathrm{d}, k) & \text{не имеет места в } X\}, \text{иначе.} \end{cases}$$

[16] А. В. Иванов, О размерности не совершенно нормальных пространств, Вестник МГУ, сер. Мат. Мех. 31: 4 (1976) 21-27

[17] M.G. Charalambous, Uniform dimension functions, Ph. D. thesis, University of London, 1971

[18] I. Tsereteli, Counterexamples in dimension theory, Q & A in General Topology, 20 (2002) 139-159

[19] Б.А. Пасынков, Об индуктивных размерностях, ДАН СССР 189 (1969) 254-257

[20] В. Н. Басманов, Об индуктивных размерностях произведений пространств, Вестник МГУ, сер. Мат. Мех. 36: 1 (1981) 17-20

Имеет место следующая

Теорема 2.2.2 *Пусть X и Y - непустые топологические пространства с $ind X = n$ и $ind Y = m$. Пусть также $KTC(ind, X)$, $KTC(ind, Y) \geq k$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots$ или ∞. Тогда*

$$ind(X \times Y) \leq \begin{cases} n + m, & \text{если } n = 0, \text{или } m = 0, \text{ или } n, m \leq k, \\ 2(n+m) - k - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что для $k = 0$ имеем случай общих пространств (утверждение имеет трансфинитный аналог), $k = 1$ покрывает ситуацию, когда сомножители являются компактами (в этом случае утверждение хорошо согласуется с известным примером Филиппова[21] двух компактов: один одномерен, второй двумерен в смысле размерности ind , а их произведение имеет ind $= 4$), $k = \infty$ соответствует утверждению (6).

Далее обсуждается вопрос, когда выполнение KTC(ind) в пространстве гарантирует совпадение размерностей ind и Ind .

Хорошо известно, что для всякого сепарабельного метризуемого пространства X имеем $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$. Заметим, что $X \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$, где $\mathcal{L}$ - класс линделёфовых пространств, а $\mathcal{M}$ класс метризуемых пространств. Дальнейшие усиления этого утверждения были связаны с расширениями классов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$. Так Мизоками (Mizokami)[22] доказал совпадение ind и Ind для пары: (порядково тотально паракомпактные пространства и тотально нормальные пространства), а Энгелькинг (Engelking)[23] для пары: (σ-тотально паракомпактные пространства и сильно наследственно нормальные пространства).

Напомним, что σ-тотально паракомпактные пространства являются порядково тотально паракомпактными, а тотально нормальные пространства являются сильно наследственно нормальными.

Естественно возникает вопрос (поставлен Энгелькингом (Engelking)) о равенстве $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$ для всякого порядково тотально паракомпактного сильно наследственно нормального пространства X. Следствие 2.3.4 отвечает на него положительно.

Третья глава.

Здесь рассматривается поведение размерности trind в классе сепарабельных метризуемых пространств, при этом в доказательствах утверждений наряду с Теоремой 1.2.1 используются развитые в этой главе методы специальных и оптимальных разложений.

---

[21] В. В. Филиппов, Об индуктивной размерности произведений бикомпактов, ДАН СССР 202 (1972) 1016-1019

[22] T. Mizokami, The equality of large and small inductive dimensions, J. London Math. Soc. (2), 20 (1979) 541-543

[23] R. Engelking, Theory of dimensions, finite and infinite, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995, p. 165

Хорошо известно, что для всякого порядкового числа $\alpha < \omega_1$ существуют метризуемые компакты $X_\alpha = \cup_{i=1}^{\infty} X_{\alpha,i}$, $Y_\alpha = \cup_{i=1}^{\infty} Y_{\alpha,i}$ с $\operatorname{trind} X_\alpha = \operatorname{trInd} Y_\alpha = \alpha$, где все подмножества $X_{\alpha,i}, Y_{\alpha,i}$ компактны и конечномерны.

Это утверждение показывает, что для трансфинитных размерностей trind и trInd в классе метризуемых компактов в общем случае нет счетной теоремы сложения для замкнутых множеств.

Однако когда счетные объединения замкнутых множеств имеют особый вид, удовлетворительные счетные теоремы сложения для размерностей trind и trInd существуют.

Разложение $X = F \cup \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ метрического пространства X на дизъюнктные множества называется *A-специальным (B-специальным),* если множества E_i открыто-замкнуты в пространстве X (E_i открыто-замкнуты в X и $\lim_{n\to\infty} \delta(E_i) = 0$, где $\delta(A)$ есть диаметер множества A).

Первая теорема сложения для B-специальных разложений для размерностей trind и trInd звучит так.

Теорема 3.1.1 *Пусть α - ординальное число ≥ 0, а $X = F \cup \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ B-специальное разложение метрического пространства X. Тогда*

(i) $trind X \leq \alpha$, если $\sup\{trind F, trind E_i\} \leq \alpha$;

(ii) $trInd X \leq \alpha$, если $\sup\{trInd F, trInd E_i\} \leq \alpha$, а пространство X есть метрический компакт.

Следующее утверждение связывает A-, B-разложения.

Лемма 3.1.1 *Пусть X - компактное метрическое пространство, и $X = F \cup \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ A-специальное разложение пространства X на дизъюнктные непустые подмножества, причем $dim F = n \geq 0$. Тогда $X = \cup_{k=1}^{n+1} Z_k$, где каждое множество Z_k замкнуто в пространстве X и допускает B-специальное разложение $Z_k = F \cup \cup_{j=1}^{\infty} E_j^k$ с условием: включение $E_j^k \subset E_i$ имеет место лишь для конечного числа индексов j при каждом i.*

Теорема 3.1.1 вместе с Леммой 3.1.1 и Теоремой 1.2.1 позволяет доказать следующую теорему сложения для A-специальных разложений для размерности trind .

Теорема 3.1.2 *Пусть X - компактное метрическое пространство, и α ординальное число $\geq \omega_0$. Тогда справедливо следующее.*

(i) Если $X = F \cup \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ - такое A-специальное разложение пространства X, что $\dim F = n \geq 0$, $\sup\{trind E_i\} \leq \alpha$ и $n \leq 2^m - 1$ для некоторого целого числа m, тогда $trind X \leq \alpha + m$.

(ii) *Если F есть такое замкнутое подмножество пространства X, что $\dim F = n \geq 0$, $\sup\{trind_x X : x \in X \setminus F\} \leq \alpha$ и $n \leq 2^m - 1$ для некоторого целого числа m, тогда $trind X \leq \alpha + m + 1$.*

Приведенные выше теоремы сложения для специальных объединений можно использовать при построении примеров пространств с различающимися размерностями trind, trInd и D (размерность Хендерсона (Hendersson)[24]), а также для доказательства любопытных теорем произведения.

Например, хорошо известно, что $\dim(X \times I^k) = \dim X + k$ для всякого нормального пространства X. Однако для трансфинитной размерности trind, как было впервые показано Люксембургом[25] на примере пространства $S^{\omega_0+3} = S^{\omega_0+2} \times I$ (определение см. ниже), такого равенства быть не может. (Напомним, что $\mathrm{trind}\, S^{\omega_0+3} = \mathrm{trind}\, S^{\omega_0+2} = \omega_0 + 2$.)

В диссертации предлагается более сильный результат.

Теорема 3.2.2 *Пусть X - компактное метризуемое пространство, и $trind X = \alpha \geq \omega_0$. Пусть также множество $F = X \setminus \{x \in X :$ существует такая открытая окрестность Ox точки x, что $trind Ox < \lambda(\alpha)\}$ конечномерно. Тогда найдется такое целое число $k(\dim F)$, что*

$$trind(X \times Y) < trind X + \dim Y$$

для всякого конечномерного сепарабельного метризуемого пространства Y с $\dim Y \geq k(\dim F)$.

Другим приложением специальных теорем сложения являются результаты о размерностных свойствах хорошо известных компактов из ранее цитированной работы Смирнова, являющихся источником многих примеров в трансфинитной теории размерности.

Напомним, что *компакты Смирнова* $S^0, S^1, ..., S^\alpha, ..., \alpha < \omega_1$, определяются следующим образом трансфинитной индукцией:

(i) S^0 есть одноточечное пространство,

(ii) $S^\alpha = S^\beta \times I$, если $\alpha = \beta + 1$, и

(iii) если α есть предельное порядковое число $\geq \omega_0$, тогда

$$S^\alpha = \{*_\alpha\} \cup \oplus_{\beta<\alpha} S^\beta$$

есть одноточечная компактификация свободной суммы всех предшествующих компактов Смирнова S^β, $\beta < \alpha$, где $*_\alpha$ есть компактифицирующая точка.

[24] D. W. Hendersson, D-dimension, I: A new transfinite dimension, Pacific J. Math. 26 (1968) 91-107

[25] Л. А. Люксембург, О компактах с несовпадающими транстфинитными размерностями, ДАН СССР 212 (1973) 1297-1300

Очевидно, каждый компакт Смирнова S^α, где $\alpha \geq \omega_0$, допускает такое А-специальное разложение $S^\alpha = F \cup \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, что $\dim F = n(\alpha) \geq 0$ и для каждого значения индекса i множество E_i гомеоморфно компакту S^β при некотором $\beta < \lambda(\alpha)$.

Хорошо известно, что $\operatorname{trInd} S^\alpha = \alpha$ для любого ординального числа $\alpha < \omega_1$ и $\sup\{\operatorname{trind} S^\alpha : \alpha < \omega_1\} = \omega_1$.

Однако чему равно точное значение $\operatorname{trind} S^\alpha$ для всякого числа $\alpha < \omega_1$ до сих пор неизвестно.

В [26] Люксембург доказал, что для каждого $\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$ с $n(\alpha) \geq 3$ имеет место неравенство

$$\operatorname{trind} S^\alpha \leq \lambda(\alpha) + [\frac{n(\alpha)+2}{2}] < \alpha,$$

где $[x]$ обозначает целую часть действительного числа x.

В частности, $\operatorname{trind} S^{\omega_0+3} = \omega_0 + 2$.

Последний результат интересен тем, что это был первый пример метризуемого компакта с различающимися трансфинитными индуктивными размерностями trind и trInd. (Напомним, что $\operatorname{trind} S^{\omega_0+i} = \omega_0 + i$, где $i = 0, 1, 2$.)

Следующее утверждение, полученное с помощью Теоремы 3.1.2, существенно усиливает результат Люксембурга.

Теорема 3.4.1 *Пусть α - ординальное число $\geq \omega_0$. Тогда $\operatorname{trind} S^\alpha \leq \lambda(\alpha)+m$, где m - любое целое число, удовлетворяющее неравенству $n(\alpha) \leq 2^m - 1$.*

Напомним теорему из ранее цитированной работы Хаттори (Hattori), утверждающую, что

(7) *для всякого нормального T_1-пространства X, являющегося объединением двух своих замкнутых подмножеств X_1 и X_2 с $\operatorname{trInd} X_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2$, и $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$, справедливо неравенство*

$$\operatorname{trInd} X \leq \begin{cases} \alpha_2 & \text{, если } \lambda(\alpha_1) < \lambda(\alpha_2), \\ \alpha_2 + n(\alpha_1) + 1 & \text{, если } \lambda(\alpha_1) = \lambda(\alpha_2). \end{cases}$$

Это утверждение мотивирует следующее определение.

Пространство X с $\operatorname{trInd} X = \alpha \geq \omega_0$ назовем *оптимально $\lambda(\alpha)$-разложимым в смысле размерности trInd*, если $X = \cup_{i=1}^{n(\alpha)+1} X_i$, где для каждого значения индекса i множество X_i замкнуто в пространстве X и $\operatorname{trInd} X_i = \lambda(\alpha)$.

[26] L. Luxemburg, On compact metric spaces with noncoinciding transfinite dimensions, Pacific J. Math. 93 (1981) 339-386

Воспользовавшись Следствием 1.2.1, получаем

Предложение 3.4.2 *Пусть X есть оптимально $\lambda(\alpha)$-разложимое в смысле функции trInd пространство с* $\operatorname{trInd} X = \alpha \geq \omega_0$. *Тогда* $\operatorname{trind} X \leq \lambda(\alpha) + m$, *где m есть любое целое число, удовлетворяющее условию:* $0 \leq n(\alpha) \leq 2^m - 1$.

В частности, $\operatorname{trind} X < \operatorname{trInd} X$ *для всякого целого* $n(\alpha) \geq 3$.

Следующее утверждение является источником примеров метризуемых компактов с различающимися размерностями trind, trInd и D.

Теорема 3.4.4 *Для всякого порядкового числа $\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$ компакт Смирнова S^α оптимально $\lambda(\alpha)$-разложим в смысле размерности trInd, то есть $S^\alpha = \cup_{i=1}^{n(\alpha)+1} Z_i$, где для каждого значения индекса i множество Z_i замкнуто в компакте S^α и* $\operatorname{trInd} Z_i = \lambda(\alpha)$.

На примере оптимального разложения компакта Смирнова

$$S^{\omega_0+3} = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$$

легко увидеть преимущество Теоремы 1.2.1 над упомянутой ранее оценкой Хараламбуса (Charalambous).

Действительно, положим $Y_1 = X_1 \cup X_2$ и $Y_2 = X_3 \cup X_4$. Заметим, что $\operatorname{trind} Y_i = \operatorname{trInd} Y_i = \omega + 1$ для каждого i. Применяя теперь частный случай Теоремы 1.2.1 для размерности trind, получаем результат Люксембурга:

$$\operatorname{trind} S^{\omega_0+3} \leq (\omega_0 + 1) + 1 \leq \omega_0 + 2.$$

Оценка же Хараламбуса (Charalambous) не дает ничего нового:

$$\operatorname{trind} S^{\omega+3} \leq \omega_0 + 1 + 1 + 1 \leq \omega_0 + 3 = \operatorname{trInd} S^{\omega_0+3}.$$

Наконец в Следствии 3.3.2 с помощью понятия *ординального произведения*, обобщающего конструкцию компактов Смирнова, доказывается, что

(i) $\mathrm{d}\,(S^\alpha \times S^\beta) = \alpha \oplus \beta$, где d есть trInd, D;

(ii) $\operatorname{trind}(S^\alpha \times S^\beta) = \operatorname{trind} S^{\alpha\oplus\beta}$

(здесь $\alpha \oplus \beta$ есть натуральная сумма ординальных чисел α, β).

Четвёртая глава.

Здесь исследуется поведение функции cmp в конечномерных сепарабельных меризуемых пространствах. В доказательствах утверждений используется Теорема 1.2.1, а также методы специальных и оптимальных разложений из главы 3.

Напомним, что сразу после определения функций $\mathrm{cmp}, \mathrm{Cmp}, \mathrm{def}$ де Гроот (de Groot) высказал гипотезу об их совпадении для всякого сепарабельного метризуемого пространства.

В 1982 году эта гипотеза была опровергнута Р. Полем (R. Pol)[27], построившим пространство $P \subset I^4$, для которого $\mathrm{cmp}\, P = 1$, а $\mathrm{def}\, P = \mathrm{Cmp}\, P = 2$. Позднее Кимура (Kimura)[28] предложил пример пространства $K \subset \mathcal{R}^4$ с $\mathrm{Cmp}\, K = 1$, а $\mathrm{def}\, K = 2$ или 3. Этот результат был улучшен Левиным (Levin) и Сигалом (Segal) [29], относительно недавно построившим пространство $E \subset R^3$, для которого $\mathrm{Cmp}\, E = 1$, а $\mathrm{def}\, E = 2$.

Однако задолго до этого (в 1960 году) де Гроот (de Groot) сам предложил последовательность пространств Z_n, $n \geq 1$, в качестве источника возможных контрпримеров к своей гипотезе:
Z_n получается из замкнутого $(n+1)$-мерного куба I^{n+1} выбрасыванием комбинаторной внутренности одной из его n-мерных граней.

Почти сразу же было доказано, что $\mathrm{def}\, Z_n = \mathrm{Cmp}\, Z_n = n$ для всех $n \geq 1$, и $\mathrm{cmp}\, Z_n = n$ для $n \leq 2$. Поэтому де Гроот (de Groot) поставил вопрос о справедливости равенства $\mathrm{cmp}\, Z_n = n$ для всякого $n \geq 3$.

Этот вопрос был повторен другими топологами, в частности, Исбэллом (Isbell)[30] и Р. Полем (R. Pol) [31].

Глава 4 начинается с доказательства теоремы сложения для функции Cmp для замкнутых множеств.

Теорема 4.1.1 *Пусть $X = X_1 \cup X_2$ есть нормальное пространство, являющееся объединением двух своих замкнутых подмножеств $X_i, i = 1,2$. Тогда $\mathit{Cmp}\, X \leq \mathit{Cmp}\, X_1 + \mathit{Cmp}\, X_2 + 1$.*

По аналогии с главой 3 эта теорема мотивирует следующее определение.

Пространство X с $\mathrm{Cmp}\, X = k \geq 0$ назовем *оптимально* 0*-разложимым в смысле функции* Cmp, если $X = \cup_{i=1}^{k+1} X_i$, где для каждого индекса i множество X_i замкнуто в пространстве X и $\mathrm{Cmp}\, X_i = 0$.

Воспользовавшись Следствием 1.2.1 для функции cmp, получаем

Предложение 4.1.1 *Пусть X есть оптимально 0-разложимое в смысле функции Cmp пространство с $\mathit{Cmp}\, X = n \geq 0$. Тогда $\mathit{cmp}\, X \leq m$, где m есть любое целое число, удовлетворяющее условию: $n \leq 2^m - 1$.*

В частности, $\mathit{cmp}\, X < \mathit{Cmp}\, X$ для всякого целого $n \geq 3$.

---

[27] R. Pol, A counterexample to J. de Groot's conjecture $\mathrm{cmp} = \mathrm{def}$, Bull. Acad. Polon. Sci. 30 (1982) 461-464

[28] T. Kimura, A separable metrizable space X for which $\mathrm{Cmp}\, X \neq \mathrm{def}\, X$, Bull. Acad. Polon. Sci. 37 (1989) 487-495

[29] M. Levin, J. Segal, A subspace of R^3 for which $\mathrm{Cmp} \neq \mathrm{def}$, Topol. Appl. 95 (1999) 165-168

[30] J. R. Isbell, Uniform spaces, Mathematical Surveys, vol. 12, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1964

[31] R. Pol, Questions in dimension theory, in: J. van Mill and G.M. Reed (eds.), Open Problems in Topology, North-Holland, Amsterdam, 1990, 279-291

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть такая последовательность действительных чисел, что $0 < x_{i+1} < x_i \le 1$ для всех i и $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$.

Положим

$$C^n = (\operatorname{Bd} I^n \times \{0\}) \cup \cup_{i=1}^{\infty}(I^n \times [x_{2i}, x_{2i-1}]) \subset I^{n+1},\ n \ge 1.$$

Методом специальных разложений, разработанным в главе 3, доказывается

Теорема 4.1.2 *Для всякого целого числа $n \ge 1$ справедливо следующее:*

(i) существуют такие замкнутые подмножества $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$ пространства C^n, что $C^n = \cup_{k=1}^{n+1} X_k$ и $\mathit{Cmp}\, X_k = 0$ для всякого k;

(ii) $$\mathit{Cmp}\, C^n = n,$$

то есть пространство C^n является оптимально 0-разложимым в смысле функции Cmp.

Эта теорема вместе с Предложением 4.1.1 предлагает последовательность относительно несложных пространств с несовпадающими функциями cmp и Cmp, на которой разность (Cmp − cmp) стремится к бесконечности.

Легко видеть, что для всякого $n \ge 1$ пространство Z_n можно представить в виде объединения двух замкнутых подпространств гомеоморфных пространству C_n.

Используя Теорему 1.2.1 для функции cmp и Предложение 4.1.1, получаем ответ на вопрос де Гроота (de Groot) для $n \ge 5$, а именно: $\operatorname{cmp} Z_n < n$.

Далее с помощью лебеговых замощений пространств R^n и упомянутого выше метода специальных разложений доказывается утверждение, закрывающее с помощью Предложения 4.1.1 случаи $n = 4$ (независимо доказано Нишиурой (Nishiura) [32]) и $n = 3$.

Теорема 4.2.2 *Для всякого целого числа $n \ge 1$ пространство Z_n оптимально 0-разложимо в смысле функции Cmp, а именно: $Z_n = \cup_{i=1}^{n+1} X_i$, где для каждого i множество X_i замкнуто в Z_n и $\mathit{Cmp}\, X_i \le 0$.*

Из этой теоремы вытекает, что $\operatorname{cmp} Z_4 < 4$ и $\operatorname{cmp} Z_3 = 2$.

Отметим, что точное значение $\operatorname{cmp} Z_n$ для $n \ge 4$ пока не известно.

В 1985 году Харт (Hart) [33] обобщил упомянутый ранее пример Р. Поля (R. Pol), построив для всякого целого числа $n \ge 3$ такое пространство $H_n \subset I^{2n}$, что $\operatorname{cmp} H_n = 1$, а $\operatorname{def} H_n \ge \operatorname{Cmp} H_n \ge n$.

[32] T. Nishiura, On the Chatyrko-Hattori solution of the de Groot's question, Topol. Appl. 152 (2005) 310-316

[33] K.P. Hart, A space X with $\operatorname{cmp} X = 1$ and $\operatorname{def} X = \infty$, preliminary report

Используя свои пространства, Харт (Hart) показал, что
разность (def − cmp) на сепарабельных метризуемых пространствах может быть произвольно большой.

Аналогичный результат независимо был получен Кимурой (Kimura)[34].

Глава 4 завершается следующим утверждением, предлагающим усиленную версию примеров Харта (Hart).

Теорема 4.3.1 *Для любой пары положительных целых чисел k и m с условием $k \leq m$ существует такое пространство $X(k, m)$, что*

$$\mathit{cmp}\, X(k,m) = k \text{ и } \mathit{Cmp}\, X(k,m) = \mathit{def}\, X(k,m) = m.$$

Эта теорема дает положительный ответ на проблему, поставленную Аартсом (Aarts) и Нишиурой (Nishiura) из их общей книги.

Отметим, что неметризуемые счетно компактные вполне регулярные пространства с размерностными свойствами как в Теореме 4.3.1 были впервые построены Кимурой (Kimura)[35].

Пятая глава.

Здесь обсуждается следующий общий вопрос.

Пусть размерность пространства известна, а само пространство можно представить в виде конечного объединения замкнутых подмножеств меньшей размерности. Что можно сказать о количестве элементов такого представления?

Далее d есть размерностная функция, а $\beta < \alpha$ порядковые числа.

Пространство X назовем *β-разложимым в смысле размерности* d, если его можно представить в виде конечного объединения замкнутых подмножеств размерности $\mathrm{d} \leq \beta$. Для такого пространства X определяется целое число

$$m(X, \mathrm{d}, \beta) = \min\{k : X = \cup_{i=1}^{k} X_i, \quad \textit{где для каждого значения индекса } i$$

$$\textit{множество } X_i \textit{ замкнуто в пространстве } X \textit{ и } \mathrm{d}\, X_i \leq \beta\}.$$

Пусть $\mathcal{K}$ - класс топологических пространств, тогда $\mathcal{K}(\mathrm{d}, \beta, \alpha)$ есть подкласс класса $\mathcal{K}$, состоящий из пространств размерности $\mathrm{d} = \alpha$, которые β-разложимыми в смысле размерности d.

Если $\mathcal{K}(\mathrm{d}, \beta, \alpha) \neq \emptyset$, тогда положим

$$m_{\mathcal{K}}(\mathrm{d}, \beta, \alpha) = \min\{m(X, \mathrm{d}, \beta) : X \in \mathcal{K}(\mathrm{d}, \beta, \alpha)\},$$

[34]T. Kimura, The gap between $\mathrm{cmp}\, X$ and $\mathrm{def}\, X$ can be arbitrarily large, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988) 1077-1080

[35]T. Kimura, Gaps between compactness degree and compactness deficiency for Tychonoff spaces, Tsukuba J. Math. 10, 2 (1986) 263-268

$$M_{\mathcal{K}}(\mathrm{d}\,,\beta,\alpha) = \sup\{m(X,\mathrm{d}\,,\beta) : X \in \mathcal{K}(\mathrm{d}\,,\beta,\alpha)\}.$$

Пусть $\mathcal{C}$ - класс метризуемых компактов, $\mathcal{P}$ класс сепарабельных метризуемых полной метрикой пространств, а

$$q_A(\beta,\alpha) = \min\{k \in \mathcal{Z} : k \geq \frac{n(\alpha)+1}{n(\beta)+1}\}$$

(здесь Z есть множество целых чисел).

В главе 5 изучается поведение функций $m_{\mathcal{K}}(\mathrm{d}\,,\beta,\alpha), M_{\mathcal{K}}(\mathrm{d}\,,\beta,\alpha)$.

Широко используются оптимально 0-разложимые в смысле функции Cmp пространства C_n с $\mathrm{Cmp}\, C_n = n$, $n \geq 1$, из главы 4, а также оптимально $\lambda(\alpha)$-разложимые в смысле функции trInd компакты S^α с $\mathrm{trInd}\, S^\alpha = \alpha$, $\alpha \geq \omega_0$, из главы 3.

В частности, с помощью введенной операции удвоения пространства с модификациями доказываются следующие два утверждения.

Теорема 5.2.1

(i) Пусть $0 \leq m < k$ есть целые числа. Тогда

$$m_{\mathcal{P}}(Cmp\,, m, k) = q_A(m,k) \ \text{и}\ \ M_{\mathcal{P}}(Cmp\,, m, k) = \infty.$$

(ii) Пусть $\beta < \alpha$ есть бесконечные порядковые числа. Тогда

$$m_{\mathcal{C}}(trInd\,,\beta,\alpha) = \begin{cases} q_A(\beta,\alpha), & \text{если } \lambda(\beta) = \lambda(\alpha), \\ \text{не существует}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$M_{\mathcal{C}}(trInd\,,\beta,\alpha) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \lambda(\beta) = \lambda(\alpha), \\ \text{не существует}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема 5.3.1

(i) Пусть $0 \leq n < k$ есть целые числа. Тогда

$$m_{\mathcal{P}}(Cmp_{\cup}, n, k) = M_{\mathcal{P}}(Cmp_{\cup}, n, k) = q_A(n,k).$$

(ii) Пусть $\beta < \alpha$ есть порядковые числа. Тогда

$$m_{\mathcal{C}}(trInd_{\cup},\beta,\alpha) = M_{\mathcal{C}}(trInd_{\cup},\beta,\alpha) =$$
$$\begin{cases} q_A(\beta,\alpha), & \text{если } \lambda(\beta) = \lambda(\alpha), \\ \text{не существует}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $\mathrm{Cmp}_{\cup}$ и $\mathrm{trInd}_{\cup}$ есть две новые индуктивные размерностные функции, исследованием которых завершается глава 5.

Пользуясь случаем хочу выразить глубокую благодарность своему бывшему научному руководителю и нынешнему научному консультанту профессору Пасынкову Борису Алексеевичу, а также моим соавторам профессорам Федорчуку Виталию Витальевичу, Хаттори Ясунао, Хараламбусу Майклу, доценту Козлову Константину Леонидовичу за всевозможную помощь и сотрудничество.

Основные публикации автора по теме диссертации

(из официального Перечня ВАК)

1. Об индуктивных размерностях, Вестн. Моск. у-та, Сер. 1, Мат. Мех. 2 (1983) 7-10

2. О змеевидных бикомпактах, Вестн. Моск. у-та, Сер. 1, Мат. Мех. 4 (1984) 15-18

3. О змеевидных и однородных бикомпактах с несовпадающими размерностями, УМН 39 (3) (1984) 247-248

4. Аналоги канторовых многообразий для трансфинитных размерностей, Мат. Заметки, 42 (1) (1987) 115-119

5. Слабо бесконечномерные пространства, УМН 46:3 (1991) 162-177

6. О топологических произведениях и размерности, Вестн. Моск. у-та, Сер. 1, Мат. Мех. 3 (1993) 22-25 (соавтор Б.А. Пасынков)

7. Аксиоматика размерности D в классе слабо бесконечномерных пространств, Мат. замет. 60:6 (1996) 912-918

8. О размерности произведений бесконечномерных компактов, Сиб. мат. ж-л 38:4 (1997) 932-942

9. Об одном вопросе де Гроота, Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1, Мат. Мех. 6 (2004) 50-52 (соавтор В. В. Федорчук)

(прочие)

10. Некоторые достаточные условия змеевидности бикомпактов и их применение, Общая топология. Пространства и отображения, Под ред. В.В. Федорчука и др. - М.: Изд-во Моск. у-та (1989) 129-140

11. О бикомпактах с несовпадающими размерностями, Труды Моск. Мат. Общ. 53 (1990) 192-228

12. Ordinal products of topological spaces, Fund. Math. 144 (1994) 95-117

13. On finite sum theorems for transfinite inductive dimensions, Fund. Math. 162 (1999) 91-98

14. On (transfinite) small inductive dimension of products, Comment. Math. Univ. Carolinae 41,3 (2000) 597-603 (соавтор К. Л. Козлов)

15. On an approach to constructing compacta with different dimensions dim and ind , Topology Appl. 107 (2000) 39-55 (соавторы Б. А. Пасынков и К. Л. Козлов)

16. Estimations of small transfinite dimension in separable metrizable spaces, Tsukuba J. Math. 25, 2 (2001) 221-228 (соавтор Я. Хаттори (Y. Hattori))

17. On a question of de Groot and Nishiura, Fund. Math. 172(2002) 107-115 (соавтор Я. Хаттори (Y. Hattori))

18. On Dimensional Properties of Order Totally Paracompact Spaces, Bull. Pol. Acad. Sci. 50,3 (2002) 255 – 265 (соавтор Я. Хаттори (Y. Hattori))

19. Around the equality $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ towards to a unifying theorem, Topol. Appl. 131 (2003) 295-302 (соавтор Я. Хаттори (Y. Hattori))

20. The behavior of dimension functions on unions of closed subsets, J. Math. Soc. Japan 56 (2004) N 2, 489-501 (соавторы М. Хараламбус (M. Charalambous) и Я. Хаттори (Y. Hattori))

21. Some estimates of the inductive dimensions of the union of two sets, Topology Appl. 146-147 (2005) 227-238 (соавтор М. Хараламбус (M. Charalambous))

22. On the relationship between cmp and def for separable metrizable spaces, Topol. Appl. 152 (2005) 269-274