

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В.Ломоносова

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи  
УДК 533.6.013.42

**Веденеев Василий Владимирович**

**КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ  
УПРУГИХ ПЛАСТИН В СВЕРХЗВУКОВОМ  
ПОТОКЕ ГАЗА**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук



Москва 2006 г.

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: академик РАН,  
профессор А.Г. Куликовский

Научный консультант: доктор технических наук  
М.Е. Колотников

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор И.А. Кийко  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
С.В. Гувернюк

Ведущая организация: ЦАГИ им. профессора Н.Е. Жуковского

Защита состоится 27 октября 2006 г. в 16 часов 20 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, Воробьёвы горы, главное здание МГУ, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ (Москва, Ломоносовский проспект, 27).

Автореферат разослан «\_\_\_» сентября 2006 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета Д.501.001.89,  
доктор физико-математических наук



А.Н. Осипов

# 1. Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Задача об устойчивости упругой пластины, обтекаемой потоком газа, представляет собой математическое описание условий возникновения панельного флаттера — интенсивных вибраций панелей обшивки самолётов и ракет, возбуждаемых набегающим потоком воздуха. Если скорость движения летательного аппарата не очень велика, то энергия возникающих малых колебаний панелей рассеивается в потоке, однако, при превышении некоторой критической скорости (как правило, сверхзвуковой) возникает обратный приток энергии от воздуха к обшивке, возникающие малые колебания «раскачиваются» потоком, и положение панелей становится неустойчивым. В результате амплитуды колебаний быстро нарастают и достигают значений, приводящих к катастрофическому или усталостному разрушению обшивки.

Следствием этих разрушений является снижение характеристик летательного аппарата и частичная или полная потеря управляемости. Известны случаи крушений самолётов и ракет, происходивших из-за возникновения панельного флаттера и разрушения обшивки.

Таким образом, в настоящее время тема панельного флаттера весьма актуальна, а в будущем её актуальность, по-видимому, будет только увеличиваться. Совершенствование характеристик как военных, так и гражданских самолётов неизбежно требует уменьшения их массы, а следовательно и жёсткости обшивки, что повышает возможность возникновения этого явления. Активно обсуждаются концепции создания самолётов с изменяемой формой, что также неизбежно приводит к уменьшению толщины обшивки. Наконец, использование новых материалов и, в частности, композитов меняет физические свойства панелей и также может привести к возникновению панельного флаттера.

**Цель работы.** Теоретическое исследование линейной устойчивости плоских упругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, определение критериев устойчивости, выяснение механизмов возникновения растущих колебаний и влияния на них параметров задачи.

## Научная новизна:

- Показано, что безграничная упругая пластина, обтекаемая с одной стороны потоком газа при наличии с другой стороны покоящегося газа, всегда неустойчива. Проанализировано поведение возмущений с различными длинами волн и выяснен физический механизм их усиления.
- В двумерной постановке исследована устойчивость пластины, имеющей форму полосы. Обнаружены два типа неустойчивости: низкочастотный и высокочастотный флаттер. Первый является классическим и хорошо изученным типом флаттера. Потеря устойчивости при нём происходит из-за взаимодействия двух собственных колебаний пластины и возможна лишь при достаточно большой плотности обтекающего газа. Второй тип флаттера обнаружен впервые. В этом случае потеря устойчивости происходит без взаимодействия между собственными формами колебаний и может иметь место при сколь угодно малой плотности потока. Получены критерии устойчивости обоих типов флаттера и частоты, при которых происходит наибольшее усиление колебаний. Выявлены физические механизмы усиления колебаний и исследовано влияние параметров задачи.
- Исследована устойчивость пластины, имеющей форму прямоугольника, по отношению к высокочастотным возмущениям. Получен критерий устойчивости, позволяющий для каждой собственной формы колебаний пластины определить, усиливается она в потоке или затухает. Исследованы возможные искажения флаттерных форм колебаний по сравнению с собственными колебаниями в вакууме. Проведены конкретные расчёты и показано, что при определённых условиях критическое число Маха для высокочастотного флаттера может быть существенно меньше критического числа Маха для низкочастотного флаттера.
- Рассмотрено влияние демпфирования пластины на высокочастотный флаттер. Показано, что в определённом диапазоне чи-

сел Маха инкремент усиления колебаний под действием потока существенно превосходит декремент затухания, вызванного рассеянием энергии в материале пластины. Конструкционное демпфирование может быть сделано сколь угодно малым выбором пластины подходящих размеров или её надёжным закреплением, так что в результате высокочастотные флаттерные колебания будут происходить и при учёте демпфирования пластины.

**Практическая ценность работы.** Результаты работы могут быть использованы при проектировании обшивок самолётов, ракет и других летательных аппаратов, движущихся со сверхзвуковой скоростью, а также конструкций, взаимодействующих со сверхзвуковыми потоками газа.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре кафедры гидромеханики механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора А.А. Бармина и профессора В.П. Карликова, на семинаре Института механики МГУ под руководством профессора С.Я. Герценштейна, на XII школе-семинаре «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Туапсе, 2004 г.), на 1-й Европейской конференции по аэрокосмическим наукам (Москва, 2005 г.), на 6-й Европейской конференции по механике твёрдого тела (Будапешт, 2006 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 84 наименований. Работа содержит 210 страниц, включая 38 рисунков и 2 таблицы.

## 2. Содержание работы

### Введение и обзор литературы

Во введении описано явление панельного флаттера, обоснована актуальность его исследования и показано место этого явления среди

других видов аэроупругой неустойчивости. Приведён краткий обзор литературы, изложена структура диссертации и основные вопросы, рассматриваемые в ней.

## Первая глава

Первая глава посвящена исследованию устойчивости безграничной по всем направлениям упругой изотропно растянутой пластины, обтекаемой с одной стороны однородным плоскопараллельным потоком газа, с другой стороны от которой находится покоящийся газ, в общем случае отличный от движущегося.

В **разделе 1.1** приведена постановка задачи и показано, что возмущения обоих газов для исследования устойчивости достаточно считать потенциальными.

Общий вид рассматриваемой системы показан на рис. 1.

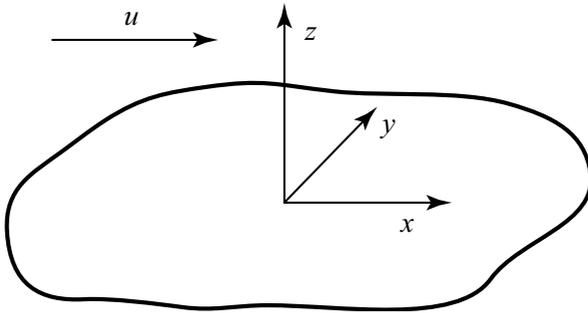


Рис. 1. Общий вид и система координат.

Толщина пластины  $h$ , плотность материала  $\rho_m$ , растягивающее напряжение  $\sigma$  и изгибная жёсткость  $Eh^3/12(1 - \nu^2)$  ( $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона) считаются постоянными. Газы считаются невязкими и совершенными с плотностями  $\rho_1, \rho_2$  (индекс «1» соответствует движущемуся газу, «2» — покоящемуся) и скоростями звука  $a_1$  и  $a_2$ ; течение считается адиабатическим. Массовые силы отсутствуют.

Декартова система координат  $xuz$  выбирается так, что оси  $x$  и  $u$

лежат в плоскости невозмущённой пластины, причём ось  $x$  направлена вдоль вектора скорости газа  $u$ , а ось  $z$  перпендикулярна пластине и направлена в сторону движущегося газа (рис. 1).

**Раздел 1.2** посвящён выводу уравнений движения, записанных относительно возмущений. Обозначим потенциалы возмущения газов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а прогиб пластины —  $w$ . Тогда замкнутая система уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + 2M \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 0 \\
 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} &= 0, \quad z < 0 \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = M \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = 0 \\
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = 0 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + M \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \\
 + M_w^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right), \quad z = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Безразмерные параметры, входящие в (1), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M = \frac{u}{a_1}, \quad D = \frac{E}{12(1 - \nu^2)a_1^2 \rho_m}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a_1}, \\
 \mu_1 = \frac{\rho_1}{\rho_m}, \quad \mu_2 = \frac{\rho_2}{\rho_m}, \quad \chi = \frac{a_2}{a_1}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $M$  — число Маха движущегося газа,  $D$  — безразмерная изгибная жёсткость пластины,  $M_w$  — параметр, характеризующий натяжение пластины,  $\mu_1, \mu_2$  — отношения плотностей газов к плотности материала пластины,  $\chi$  — отношение скорости звука покоящегося газа к скорости звука движущегося.

Первые два уравнения в (1) представляют собой волновые уравнения для движущегося и покоящегося газов, третье и четвертое —

условия непротекания, пятое — уравнение движения пластины. Для выделения однозначно определённого решения эта система должна быть дополнена условиями достаточно быстрого затухания возмущений при  $x, y, z \rightarrow \pm\infty$  и гладкими начальными условиями.

В **разделе 1.3** доказано, что решение системы (1) с указанными граничными и начальными условиями существует и единственно. В рассматриваемом классе возмущений (включающим в себя локализованные возмущения) пластина устойчива тогда и только тогда, когда она устойчива в классе возмущений типа бегущих волн. Последние имеют вид  $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ , где  $k_x, k_y \in \mathbb{R}$ . Подставляя их в систему уравнений, получаем дисперсионное уравнение — связь между волновым вектором  $\{k_x; k_y\}$  и частотой колебаний  $\omega$ . После перехода от  $k_x, k_y$  к  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  и  $\alpha = \arccos(k_x / \sqrt{k_x^2 + k_y^2})$  ( $k$  — длина волнового вектора,  $\alpha$  — угол между ним и осью  $x$ ) оно принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k, \alpha, \omega) = & (Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \\ & - \mu_1 \frac{(\omega - Mk \cos \alpha)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk \cos \alpha)^2}} - \mu_2 \frac{\chi \omega^2}{\sqrt{\chi^2 k^2 - \omega^2}} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Первое слагаемое выражает вклад пластины, второе и третье — соответственно движущегося и покоящегося газов.

Таким образом, исследование устойчивости сводится к исследованию корней дисперсионного уравнения: система устойчива тогда и только тогда, когда для любых вещественных  $k, \alpha$  величина  $\text{Im } \omega(k, \alpha) \leq 0$ .

Для дальнейшего анализа удобно вместо частоты  $\omega$  использовать фазовую скорость  $c = \omega/k$ . Дисперсионное уравнение тогда запишется в виде

$$k(Dk^2 + M_w^2 - c^2) - \mu_1 \frac{(c - M \cos \alpha)^2}{\sqrt{1 - (c - M \cos \alpha)^2}} - \mu_2 \frac{\chi c^2}{\sqrt{\chi^2 - c^2}} = 0 \quad (4)$$

Очевидно, что критерий устойчивости для  $c$  такой же, как и для  $\omega$ .

В **разделах 1.4 – 1.6** исследуется устойчивость рассматриваемой системы, а также два частных случая: отсутствие пластины (тангенциальный разрыв между двумя слоями газа) и отсутствие

покоящегося газа. В этих случаях дисперсионные уравнения получаются из (3) и (4) отбрасыванием соответственно первого и третьего слагаемых.

После умножения дисперсионного уравнения на произведение входящих в него радикалов поведение его корней изучается с помощью принципа аргумента. Рассмотрим на комплексной плоскости  $s$  замкнутую кривую  $\mathcal{L}$ , состоящую из отрезка вещественной оси и полуокружности бесконечно большого радиуса (рис. 2, а). Построим образ  $\mathcal{L}$  под действием левой части дисперсионного уравнения. Тогда число его корней  $s(k, \alpha)$ , лежащих внутри  $\mathcal{L}$  (а значит, во всей верхней полуплоскости), будет равно числу оборотов, совершаемых образом  $\mathcal{L}$  вокруг точки 0. Таким образом, для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы этот образ не совершал ни одного обхода.

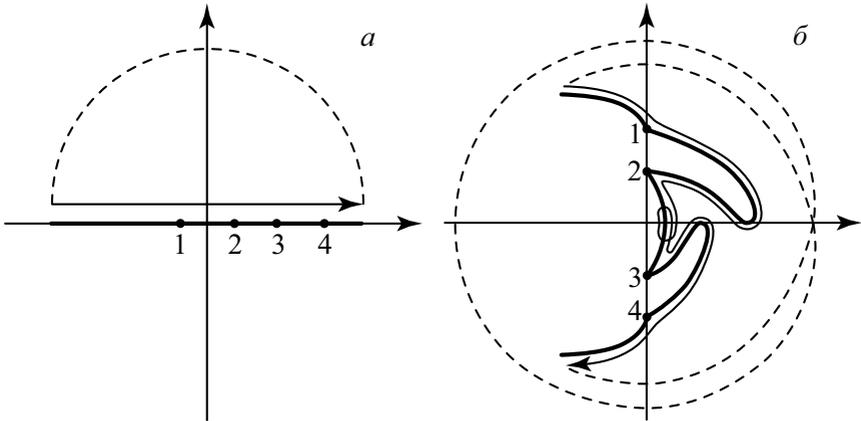


Рис. 2. Кривая  $\mathcal{L}$  на комплексной плоскости  $s$ , расположение точек 1 – 4 показано условно (а). Возможный образ  $\mathcal{L}$  под действием левой части (4) (б). Линией со стрелкой показано направление обхода.

Образ  $\mathcal{L}$  строится следующим способом. Для получения образа полуокружности достаточно выделить в дисперсионном уравнении старший член, после чего будет видно, что образ не лежит в окрестности точки 0 и оборачивается вокруг неё на угол  $n\pi/2$ , где  $n$  —

показатель степени старшего члена.

Для получения образа отрезка вещественной оси отметим на нём точки 1–4, соответствующие точкам ветвления левой части (4):  $c = \pm\chi$ ,  $c = M \cos \alpha \pm 1$  (рис. 2, а). Тогда на каждом из пяти интервалов, на которые разбивается вещественная ось этими точками, значения радикалов, а значит, и каждого слагаемого в дисперсионном уравнении, вещественные или чисто мнимые. Качественное расположение образа на каждом интервале легко получить, пользуясь последовательно правилами преобразования комплексной плоскости при арифметических действиях и возведении в степень, комбинируя которые, можно получить отображение под действием всей левой части дисперсионного уравнения.

Пример построения образа  $\mathcal{L}$  показан на рис. 2, б в одном из возможных случаев. Видно, что он совершает 1 обход вокруг нуля, и система в этом случае неустойчива.

В разделе 1.4 изучается частный случай — устойчивость тангенциального разрыва. Эта задача, во-первых, представляет самостоятельный интерес, а во-вторых, является первым этапом исследования общего случая. Исследование проведено в предположении  $\chi \leq 1$ , что не ограничивает общности (в противном случае нужно перейти в систему координат, в которой движущийся газ покоится и заново провести обезразмеривание). Кроме того, введён безразмерный параметр

$$\varkappa = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

после чего в задаче остаются лишь три независимых параметра —  $M$ ,  $\chi$ ,  $\varkappa$ .

Результатом исследования являются следующие достаточные условия устойчивости и неустойчивости:

- Условия неустойчивости:

$$M < 1 + \sqrt{2} \frac{\sqrt{\sqrt{1 - \varkappa^2 \chi^4} + 1}}{\varkappa \chi}, \quad \varkappa \chi^2 \leq 1$$

$$\sqrt{2}\chi + \sqrt{2} \leq M < \chi + \sqrt{2\varkappa\chi} \sqrt{\sqrt{\varkappa^2 \chi^4 - 1} + \varkappa \chi^2}, \quad \varkappa \chi^2 > 1$$

$$M \leq \sqrt{2}\chi + 1, \quad \varkappa\chi^2 > 1$$

- Условия устойчивости:

$$M \geq \sqrt{2} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{\sqrt{1 - \varkappa^2\chi^4} + 1}}{\varkappa\chi}, \quad \varkappa\chi^2 \leq 1 \quad (5)$$

$$M \geq \sqrt{2}\chi + \sqrt{2\varkappa\chi} \sqrt{\sqrt{\varkappa^2\chi^4 - 1} + \varkappa\chi^2}, \quad \varkappa\chi^2 > 1 \quad (6)$$

При  $\varkappa\chi^2 > 1$  в интервале  $\sqrt{2}\chi + 1 < M < \sqrt{2}\chi + \sqrt{2}$  может существовать область устойчивости, не связанная с областью (6). При этом в трёхмерном пространстве параметров  $(M, \chi, \varkappa)$  обе эти области связаны с областью устойчивости (5), то есть вся область устойчивости односвязна.

В случае  $\varkappa\chi^2 = 1$  дисперсионное уравнение решается в явном виде и приводит к классическому критерию устойчивости  $M \geq (1 + \chi^{2/3})^{3/2}$ , полученному Л.Д. Ландау.

Все приведённые выше результаты относятся к плоским возмущениям, параллельным потоку ( $\alpha = 0$ ). Учитывая, что при малых  $M$  тангенциальный разрыв неустойчив, а в дисперсионное уравнение  $M$  и  $\alpha$  входят в комбинации  $M \cos \alpha$ , получаем, что по отношению к произвольно ориентированным возмущениям разрыв неустойчив при любых параметрах задачи.

В разделе 1.5 изучается устойчивость в общем случае. Доказывается, что влияние первого слагаемого в (4) при малых  $k$  приводит к появлению обходов образа  $\mathcal{L}$  вокруг нуля, то есть длинноволновые возмущения всегда неустойчивы. Если  $M \cos \alpha - 1 < \chi$ , то коротковолновые возмущения устойчивы, если же  $M \cos \alpha - 1 > \chi$ , то и они являются растущими.

Рассмотрен случай малых  $\mu_j$  (для реальных систем они имеют порядок  $10^{-4}$ ). В этом случае при не слишком большой длине волны можно отделить волны, порождённые пластиной, от волн, порождённых покоящимся и движущимся газами. Показано, что волны, порождённые пластиной, могут усиливаться только если  $c_0 < M \cos \alpha - 1$ , где  $c_0$  — фазовая скорость волны, бегущей по пластине. Описан физический механизм усиления таких волн.

В разделе 1.6 рассматривается случай одностороннего обтекания. Критерием устойчивости является условие  $M \leq M_w$ , причём растущими являются длинные волны. Короткие волны всегда затухают. При  $\mu_1 \ll 1$  критерием усиления не слишком длинных волн является неравенство  $c_0 < M \cos \alpha - 1$ , причём в случае неустойчивости растущими являются волны, порождённые пластиной.

В разделе 1.7 кратко сформулированы результаты главы 1.

## Вторая глава

В этой главе в двумерной постановке проводится исследование устойчивости пластины, имеющей форму широкой полосы бесконечного размаха, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа при постоянном давлении с другой (рис. 3). Для решения задачи на собственные значения применяется асимптотический метод глобальной неустойчивости.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и уравнения для возмущений, аналогичные (1). Отличие состоит в том, что покоящийся газ отсутствует, рассматриваются плоские возмущения, размеры пластины ограничены, а вне неё поверхность  $z = 0$  считается абсолютно жёсткой. В этой и следующей главах число Маха вычисляется для скорости, спроектированной на ось  $x$ :  $M = u \cos \theta / a_1$ . Кроме того, переобозначено  $\mu \equiv \mu_1$ . Параметры  $D$ ,  $M_w$  совпадают с (2).

В разделе 2.2 описывается общий асимптотический метод, развитый А.Г. Куликовским, с помощью которого решается задача на собственные значения. При достаточно больших размерах системы её собственные функции можно разбить на два типа.

Первые, односторонние собственные функции, определяются граничными условиями, заданными на одной из кромок пластины, и близки к собственным функциям полубесконечной в одном из направлений системы.

Вторые, глобальные собственные функции, слабо зависят от граничных условий и определяются только свойствами системы внутри рассматриваемой области. Соответствующие собственные частоты на комплексной плоскости лежат в окрестности некоторой кривой  $\Omega$ , тем ближе к ней и тем плотнее заполняя эту окрестность, чем

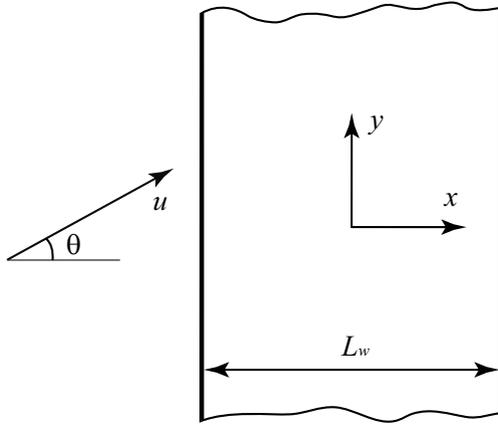


Рис. 3. Общий вид и система координат.

больше протяжённость системы. Эта кривая определяется следующим образом. Рассмотрим дисперсионное уравнение безграничной системы  $\mathcal{D}(k, \omega) = 0$ . При больших  $\text{Im } \omega$  его решения  $k_j(\omega)$  можно разбить на две группы:  $\text{Im } k_j > 0$  и  $\text{Im } k_j < 0$ . При уменьшении  $\text{Im } \omega$  в определённый момент мнимая часть одного из решений, лежащего в первой группе, совпадёт с мнимой частью одного из решений, лежащего во второй группе. Такие  $\omega$  и составляют кривую  $\Omega$ . Физический механизм возбуждения глобальных собственных функций состоит в циклических отражениях и взаимных превращениях двух бегущих в противоположные стороны волн.

Таким образом, критерием устойчивости является следующее условие: во-первых, все частоты односторонних собственных функций должны лежать в нижней полуплоскости, а во-вторых, кривая  $\Omega$  должна также целиком лежать в нижней полуплоскости.

В **разделе 2.3** исследуются свойства дисперсионного уравнения. Доказано, что только четыре ветви его решений  $k_j(\omega)$ , порождённые пластиной, являются физическими, и только они должны использоваться при построении решений задачи на собственные значения.

В **разделе 2.4** изучается глобальная неустойчивость высокочастотных возмущений, когда  $|k| \gg \mu$ ,  $|\omega| \gg \mu$ . Аналитически полу-

чено условие неустойчивости (флаттера):  $M > M_w + 1$ . Построена часть кривой  $\Omega$ , лежащая в высокочастотной области и найдена частота  $\omega_{\max} = (M - 1)\sqrt{((M - 1)^2 - M_w^2)/D}$ , которой соответствует наибольший рост возмущения. Для примера на рис. 4 показана часть кривой  $\Omega$  для параметров

$$M = 1.5, \quad M_w = 0, \quad D = 23.9, \quad \mu = 1.2 \cdot 10^{-4}, \quad (7)$$

соответствующих обтеканию стальной пластины потоком воздуха при нормальных условиях.

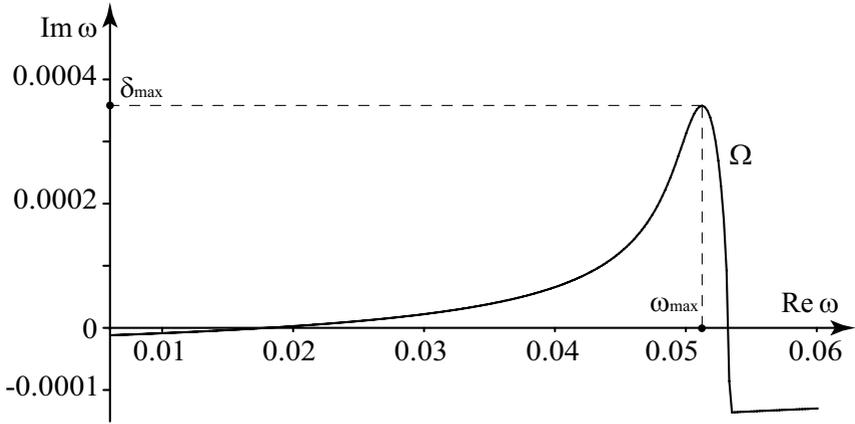


Рис. 4. Часть кривой  $\Omega$ , лежащая в области  $|\omega| \gg \mu$ , рассчитанная для параметров (7)

Возбуждение высокочастотных собственных функций происходит следующим образом. Пусть, например, на передней кромке возникает возмущение в виде бегущей волны. При достижении ею задней кромки она отражается от неё и порождает две волны, бегущие в противоположную сторону. Однако, одна из них быстро затухает, и только вторая волна возвращается к передней кромке. При отражении от последней она превращается в исходную волну и затухающую волну, амплитуда которой при подходе к задней кромке становится пренебрежимо малой. Циклическое повторение описанного процесса приводит к образованию собственной функции. Если усиление волны, бегущей по потоку, превысит затухание волны, бегущей против

потока, то после каждого цикла отражений амплитуда волн будет увеличиваться, и вся собственная функция будет растущей. Усиление волны, бегущей по потоку, происходит при  $c_0 < M - 1$ , где  $c_0$  — её фазовая скорость в отсутствии газа. В случае, когда  $c_0$  совпадает со скоростью распространения заднего фронта звукового возмущения в газе  $M - 1$  (это происходит при частоте  $\omega_{\max}$ ), возникает «резонанс» между волной в пластине и в газе, приводящий к наибольшему усилению волны и всей собственной функции, «составной частью» которой является эта волна.

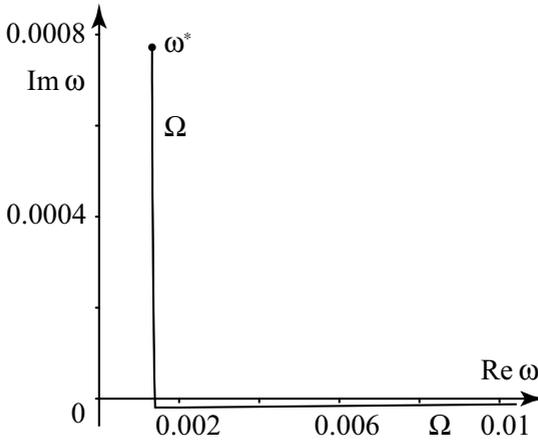


Рис. 5. Часть кривой  $\Omega$ , лежащая в области малых  $|\omega|$ , рассчитанная для параметров (7)

В **разделе 2.5** изучается глобальная неустойчивость низкочастотных возмущений. В этой области частот дисперсионное уравнение можно упростить, благодаря чему исследование также удаётся провести аналитически. Здесь также возможна неустойчивость (флаттер), но её тип отличен от высокочастотной. Получено условие неустойчивости и частота, соответствующая наибольшему усилению:

$$M_w < \left( \frac{\sqrt{54}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{\frac{1}{3}} D^{\frac{1}{6}}, \quad \omega = A \left( \mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{\frac{2}{3}} D^{-\frac{1}{6}},$$

здесь  $A$  зависит от параметров задачи и меняется в диапазоне  $0.433 \leq$

$A \leq 0.595$ . Вид кривой  $\Omega$  в низкочастотной области для случая неустойчивости показан на рис. 5.

В разделе 2.6 показано, что пластина, обтекаемая потоком газа, при используемых обычно граничных условиях заземления, шарнирного опирания и свободного края не имеет односторонних собственных функций.

В разделе 2.7 обсуждается физический смысл полученных результатов. Показано, что низкочастотный флаттер является флаттером связанного типа, при котором происходит взаимодействие двух собственных колебаний пластины (рис. 6, а). Он подробно исследован в литературе с помощью приближения поршневой теории. Указанное взаимодействие колебаний и переход к неустойчивости возможны лишь при достаточно большой плотности газа.

При высокочастотном флаттере потеря устойчивости происходит без взаимодействия между собственными формами колебаний (рис. 6, б). Этот тип флаттера обнаружен впервые и не может быть получен при использовании поршневой теории. Характерной особенностью высокочастотного флаттера является то, что он может иметь место при сколь угодно малой плотности обтекающего газа.

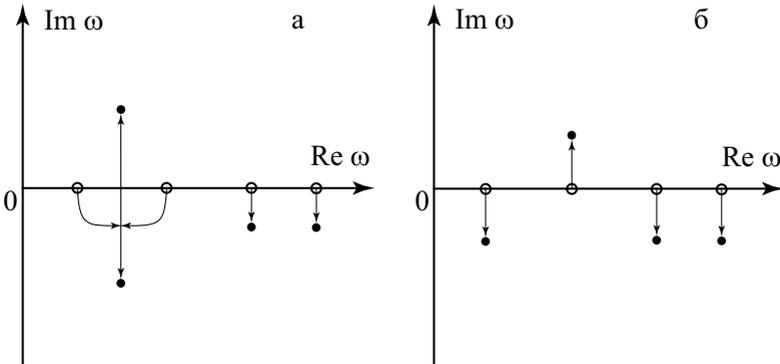


Рис. 6. Качественный вид траекторий движения собственных частот колебаний пластины при увеличении плотности газа и потеря устойчивости: при низкочастотном флаттере (а), при высокочастотном флаттере (б). Кругками показаны частоты в отсутствии газа, точками — при флаттере.

Объяснено известное в литературе отличие результатов исследования устойчивости безграничных пластин и конечных пластин, имеющих большую протяжённость в направлении потока.

В **разделе 2.8** обобщены и кратко сформулированы результаты главы 2.

## Третья глава

В третьей главе оценивается точность результатов главы 2, касающихся высокочастотного флаттера (низкочастотный флаттер не изучается, так как он подробно исследован в литературе). Рассмотрены четыре источника погрешности: неточность в определении давления, действующего на колеблющуюся пластину, использование метода глобальной неустойчивости при решении задачи на собственные значения, пренебрежение демпфированием колебаний пластины и наличием покоящегося газа со стороны пластины, противоположной обтекаемой.

В **разделе 3.1** показано, что неточность в определении давления, действующего на колеблющуюся пластину, пренебрежимо мала и не накладывает ограничений на её ширину.

В **разделе 3.2** получена оценка ширины пластины, при которой для исследования задачи на собственные значения можно применять теорию глобальной неустойчивости. Ей удовлетворяют практически все пластины, используемые в технике: минимальное отношение ширины пластины к её толщине имеет порядок нескольких десятков.

В **разделе 3.3** исследовано влияние рассеяния энергии в материале пластины и конструкционного демпфирования на собственные функции и получено условие их роста при учёте демпфирования. Достаточно большое рассеяние в материале предотвращает флаттер пластин любой ширины, в то время как конструкционное демпфирование при достаточно большой ширине может быть сделано сколь угодно малым и не может подавить флаттер. Приведены примеры обтекания стальных, титановых и алюминиевых пластин, для которых показатель усиления колебаний при высокочастотном флаттере в несколько раз больше, чем декремент затухания, вызванного рассеянием в материале.

В разделе 3.4 исследовано влияние покоящегося газа, находящегося около поверхности пластины, противоположной обтекаемой, и показано, что при  $M - 1 < \chi$  он не оказывает влияния на рост собственных функций, а при  $M - 1 > \chi$  он обладает демпфирующим действием и может частично или полностью подавить флаттер.

В разделе 3.5 кратко сформулированы результаты главы 3.

## Четвёртая глава

В четвёртой главе рассматривается задача об устойчивости прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, по отношению к высокочастотным возмущениям (рис. 7).

В разделе 4.1 приведена постановка задачи и система уравнений для возмущений. Она аналогична (1), за исключением того, что покоящийся газ заменён постоянным давлением, а вне пластины поверхность  $z = 0$  абсолютно жёсткая. Безразмерные параметры  $M$ ,  $D$ ,  $M_w$  совпадают с (2),  $\mu \equiv \mu_1$ .

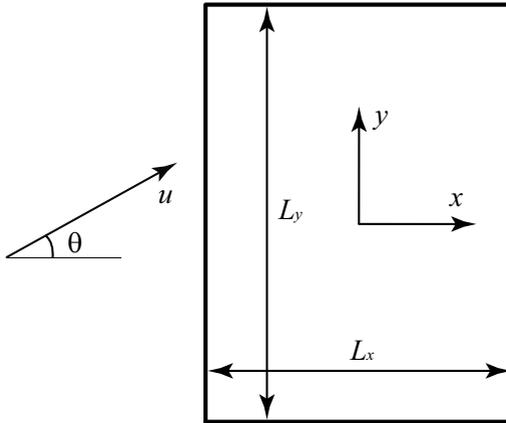


Рис. 7. Конфигурация рассматриваемой системы.

В разделе 4.2 получено условие усиления колебаний пластины в потоке. Пусть для рассматриваемой пластины справедлив динамический краевой эффект, то есть любое собственное колебание (имеющее

вид стоячей волны) вне окрестности кромок записывается в виде

$$w(x, y, t) = \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

Представим его в виде суперпозиции четырёх бегущих волн:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \\ &= \frac{1}{4} (e^{i\varphi_x} e^{ik_x x} + e^{-i\varphi_x} e^{-ik_x x}) (e^{i\varphi_y} e^{ik_y y} + e^{-i\varphi_y} e^{-ik_y y}) e^{-i\omega t} = \\ &= C_1 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + C_2 e^{i(k_x x - k_y y - \omega t)} + \\ &\quad + C_3 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)} + C_4 e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (9) \end{aligned}$$

Пронумеруем направления распространения волн соответственно номеру слагаемого в (9) (рис. 8). Тогда образование стоячей волны можно представить следующим образом. На одной из кромок возбуждается бегущая волна, движущаяся, например, в направлении 1. Последовательно отражаясь от четырёх кромок пластины, она превращается в волны, движущиеся в направлениях 2, 3, 4. При последнем отражении она превращается в исходную волну, после чего процесс циклически повторяется. После нескольких таких циклов движение четырёх указанных волн приобретает установившийся характер, а их наложение приводит к образованию стоячей волны (8).

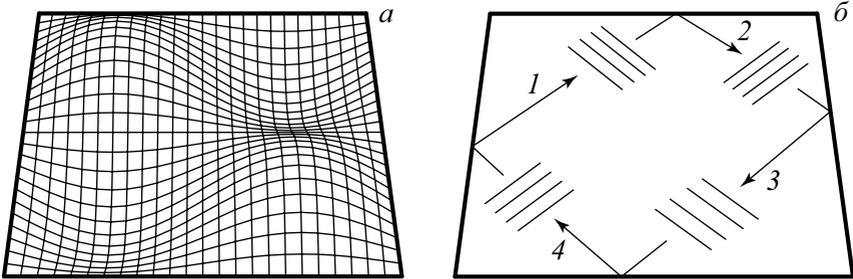


Рис. 8. Собственная форма колебаний пластины — стоячая волна (а) и её представление в виде суперпозиции четырёх бегущих волн (б). Цифрами обозначены направления распространения волн.

Пусть теперь пластина обтекается газом. Пренебрегая влиянием на него кромок пластины и зная его действие на бегущие волны, легко понять его действие и на собственное колебание в целом.

Действие газа на усиление волн исследовалось в главах 1, 2. Оно определяется фазовой скоростью волны в отсутствии потока  $c_0$  и углом  $\alpha$  между направлением её движения и направлением потока. Вектор скорости газа можно разложить на две компоненты: лежащую в плоскости волны  $M \cos \alpha$  и перпендикулярную ей  $M \sin \alpha$ . Тогда действие газа на бегущую по пластине волну определяется только первой компонентой: усиление волны происходит в том и только том случае, когда  $c_0 < M \cos \alpha - 1$ .

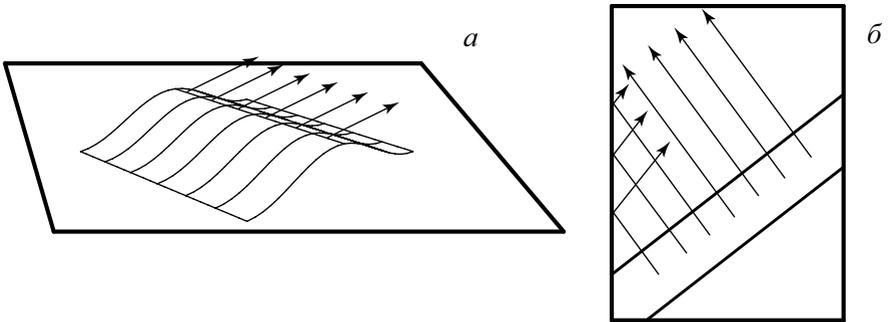


Рис. 9. Представление движения волны как движение её отдельных участков (а), начальные траектории движения этих участков (б).

Рассмотрим теперь действие газа на собственное колебание. Для этого удобно представлять движение волны как движение её отдельных участков (рис. 9). Траектории этих участков между кромками являются отрезками прямых линий, имеющих одно из четырёх направлений (рис. 8, б), а от кромок происходит зеркальное отражение. В зависимости от рассматриваемой формы колебаний траектории могут быть замкнутыми (рис. 10, а и б) и незамкнутыми (рис. 10, в). Замкнутая траектория является замкнутой ломаной, а незамкнутая траектория всюду плотна в прямоугольнике, очерчиваемом контуром пластины.

Будем называть циклом отражений участков волны период вре-

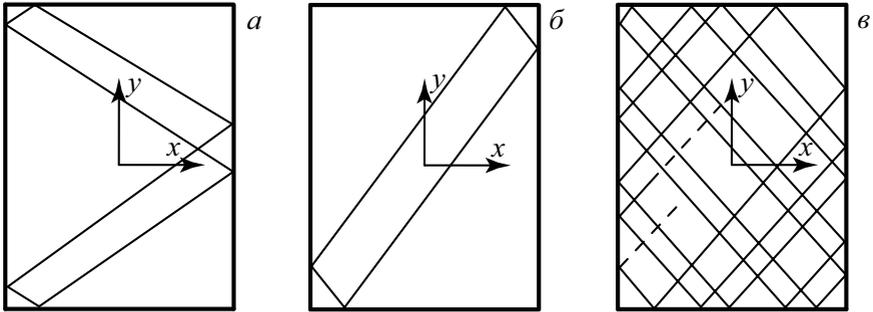


Рис. 10. Траектории движения участков волны. Замкнутая траектория, симметричная относительно одной из осей координат (а), замкнутая траектория, несимметричная относительно осей координат (б), незамкнутая траектория (в).

мени, за который их траектории вернутся в начальные точки (в случае замкнутой траектории) или близко к ним (в случае незамкнутой траектории). Вычисляя вдоль каждой траектории изменение амплитуды за такой цикл, мы найдем изменение амплитуды и для волны в целом, поскольку траектории покрывают всю поверхность пластины. Изменение амплитуды за цикл отражений происходит, во-первых, при движении волны от одной кромки до другой из-за наличия мнимой части волнового числа (движение вдоль звеньев траектории), и во-вторых, при отражениях на кромках пластины. Производя вычисления, получаем условие усиления колебания:

$$l_1 \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \operatorname{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4)) < 0 \quad (10)$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  — суммарные расстояния, проходимые траекторией в направлениях 1 и 2,  $\Delta(k)$  — приращение волнового числа, вызванное наличием газа и вычисляемое из дисперсионного уравнения.

Таким образом, условие (10) позволяет определить наличие или отсутствие роста амплитуды для каждой траектории заданной формы колебаний. Если такой рост будет происходить на всех траекториях, то и само колебание будет усиливаться, если же на всех траекториях амплитуда будет уменьшаться, то колебание будет затухать.

Если на части траекторий амплитуда увеличивается, а на части — уменьшается, то суммарное поведение будет определяться дифракцией волн, которой будем пренебрегать.

В **разделе 4.3** рассмотрен случай, когда поток направлен перпендикулярно одной из кромок пластины. В этом случае условие (10) не зависит от траектории и определяется только рассматриваемым собственным колебанием. Усиление колебания происходит равномерно по пластине, и оно под действием потока не искажается. Рассмотрено влияние параметров задачи на рост колебания. В частности, показано, что существует такое  $M_{\max}(D, M_w, \mu)$ , что при фиксированном  $M < M_{\max}$  и варьируемых размерах пластины быстрее всех будут расти собственные функции, имеющие одну полуволну в направлении, перпендикулярном потоку. При  $M > M_{\max}$  это, вообще говоря, не так.

В **разделе 4.4** исследован случай произвольного направления потока. Траектории различных собственных колебаний можно разделить на три группы — замкнутые траектории, симметричные относительно оси  $x$  или  $y$ , замкнутые траектории, несимметричные относительно осей  $x$  и  $y$  (в этом случае они симметричны относительно центра пластины), и незамкнутые траектории (рис. 10).

Показано, что в случае замкнутых симметричных траекторий искажения формы колебания не происходит, а в случае замкнутых несимметричных траекторий она изменяется. В случае незамкнутых траекторий искажение возможно только если траектория близка к замкнутой несимметричной, причём оно тем слабее, чем незамкнутая траектория больше отличается от замкнутой несимметричной.

В **разделе 4.5** оценено влияние покоящегося газа. Он не оказывает влияния на усиление колебаний при  $M < \chi + 1$  и может демпфировать их в противном случае.

**Раздел 4.6** посвящён обобщению полученных результатов и формулировке алгоритма расчёта высокочастотного флаттера пластины.

Проведён расчёт флаттера дюралюминиевой панели обшивки летательного аппарата размером  $220 \times 750 \times 1.5$  мм, расположенной широкой стороной поперёк потока. Выделены 15 потенциально опасных форм колебаний, которые должны быть подробно исследованы с

учётom экспериментально определённых демпфирующих свойств реальной конструкции. Высокочастотный флаттер по низшей форме возможен при  $1.18 < M < 1.47$ , в то время как расчёт низкочастотного флаттера по известному в литературе критерию даёт нижнюю оценку критического числа Маха  $M \geq 6.54$ .

Исследован флаттер пластины размером  $300 \times 540 \times 1$  мм, изготовленной из стали и помещённой в аэродинамическую трубу широкой стороной поперёк потока. Параметры течения соответствуют трубе А-8 Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Показано, что возбуждение низкочастотного флаттера в этом случае невозможно. Получены формы колебаний, по которым следует ожидать высокочастотного флаттера при  $M = 1.78$  и  $M = 2.25$  (режимы работы трубы).

В разделе 4.7 приведены основные результаты главы 4.

## **Заключение**

В заключении подведены итоги работы и сформулированы её основные результаты.

## **3. Основные результаты и выводы**

Исследована устойчивость пластины, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, в следующих постановках: безграничная пластина, пластина, имеющая форму полосы и пластина, имеющая форму прямоугольника. Во всех случаях с другой стороны от пластины поддерживается постоянное давление или находится покоящийся невязкий совершенный газ.

В случае безграничной пластины, когда со стороны, противоположной обтекаемой, поддерживается постоянное давление, получен критерий устойчивости и описан его физический смысл. Учёт покоящегося газа приводит к дестабилизации возмущений и неустойчивости системы при любых параметрах. Как предельный случай рассмотрена устойчивость тангенциального разрыва и найдены условия его устойчивости и неустойчивости.

Показано, что флаттер пластины, имеющей форму полосы, может быть одним из двух типов: низкочастотным и высокочастотным. Первый является «классическим» флаттером пластины и подробно исследован в литературе в приближении поршневой теории. Второй тип флаттера не описывается с помощью поршневой теории и был теоретически обнаружен впервые. Выяснены физические механизмы возбуждения обоих типов флаттера, получены критерии устойчивости и частоты, при которых происходит наиболее интенсивный рост колебаний. Исследована точность полученных результатов и показано, что они могут применяться к реальным пластинам, используемым в технике. Рассмотрено влияние внутреннего трения в материале пластины и конструкционного демпфирования и приведены примеры, когда они не могут подавить ни высокочастотный, ни низкочастотный флаттер.

Для прямоугольной пластины получен критерий, позволяющий для каждой высокочастотной формы колебаний пластины определить, является ли она растущей или затухающей. Исследовано искажение колебаний при флаттере по сравнению с собственными колебаниями пластины в вакууме. Сформулирован алгоритм расчёта высокочастотного флаттера пластины и проведены конкретные вычисления. Рассмотрены два случая: устойчивость дюралюминиевой панели летательного аппарата и устойчивость стальной пластины, испытываемой в аэродинамической трубе. Показано, что возможно возникновение высокочастотного флаттера при отсутствии низкочастотного.

## Публикации по теме диссертации

1. Веденеев В.В., Куликовский А.Г. Неустойчивость плоской упругой пластины, обтекаемой потоком газа// Тезисы докладов XII школы-семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики». Туапсе, 2004. М.: Издательство МГУ. С. 22.
2. Веденеев В.В. Неустойчивость безграничной упругой пластины, обтекаемой потоком газа// Известия РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 19-27.

3. Vedeneev V.V. Analytical investigation of plate flutter in supersonic gas flow// European conference for aerospace sciences (EUCASS). Moscow, 2005. CD paper.
4. Веденеев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа// Известия РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155-169.
5. Веденеев В.В. О высокочастотном флаттере пластины// Известия РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163-172.
6. Vedeneev V.V. High-frequency flutter of rectangular plates// 6<sup>th</sup> European solid mechanics conference (ESMC). Budapest, 2006. CD paper.
7. Веденеев В.В. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины// Известия РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 173-181.