Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.214.8

Румянцева Екатерина Владимировна

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫСОКИХ ВЫБРОСОВ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор В.И. Питербарг.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Круглов В. М.,
кандидат физико-математических наук, ст. н. с. Иванов Р. В.

Ведущая организация:

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Защита диссертации состоится 18 мая 2007г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан 18 апреля 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ
доктор физико-математических
наук, профессор Т.П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Изучение вероятностей высоких выбросов случайных процессов и полей представляет собой важную область в теории вероятностей. В настоящее время наибольшее развитие получила теория экстремумов гауссовских процессов (см. монографии и обзорные статьи: [1] ,[2], [3], [4]).

Разработан целый ряд общих методов для исследования больших уклонений гауссовских процессов: метод сравнений [1]; основанный на формуле Райса метод моментов [1]; метод двойных сумм [1], [5], базирующийся на лемме Пикандса и принципе локализации — выделении малого подмножества в области определения процесса, которое вносит основной вклад в асимптотику. Эти методы позволили получить достаточно полную картину асимптотического поведения вероятностей высоких выбросов для гауссовских стационарных процессов.

В то же время в многочисленных задачах математической статистики, теории надежности, теории приближения случайных процессов и ряде других областей помимо стационарных гауссовских процессов и полей возникают в каком-то смысле близкие к ним нестационарные. В работе [6] В.И. Питербарг и В.П. Присяжнюк изучили вероятности высоких выбросов нестационарного гауссовского процесса, дисперсия которого достигает абсолютного максимума в конечном числе точек, а процесс является локально стационарным в том смысле, что в окрестностях этих точек корреляционная функция процесса близка к корреляционной функции некоторого стационарного процесса. В работе [7] найдена асимптотика ве-

---

[1] *Piterbarg V.I.* Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields.— Transl. Math. Monogr., AMS, Providence, Rhode Island, 1996.

[2] *Питербарг В.И., Фаталов В.Р.* Точные асимптотики для вероятностей больших уклонений некоторых используемых в статистике гауссовских полей.— Вероятностно-статистические методы исследования/ ред. И.Г.Журбенко, А.Н.Колмогоров. М.: изд-во МГУ, 1983, 124-143.

[3] *Лифшиц М.А.* Вычисление точной асимптотики некоторых гауссовских больших уклонений.— Записки научных семинаров ЛОМИ. **184**, 1990, 189-199.

[4] *Albeverio S., Piterbarg V.* Mathematical methods and concepts for the analysis of extreme events.— Extreme Events in Nature and Society. Springer Berlin Heidelberg, I, 2006, 47-68.

[5] *J. Pickands* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc. 145, 1969, 51—73.

[6] *В.И. Питербарг, В. Присяжнюк* Асимптотическое поведение вероятности большого выброса для нестационарного гауссовского процесса. Теория вер. и мат. статист., **18**, 121–133, 1978.

[7] *Piterbarg V.I., Stamatovich S.* On maximum of Gaussian non-centered fields indexed on smooth manifolds. Weierstrass -Institut für Angewandte Analysis und Stochastik. Preprint No. 449, Berlin 1998, 1-13.

роятностей высоких экстремумов гауссовского локально-стационарного процесса, математическое ожидание которого есть непрерывная функция, достигающая максимума в единственной точке и ведущая себя регулярно в ее окрестности.

Характерным свойством множества высоких экстремумов гауссовского процесса является отсутствие памяти: их величины вместе с расположением асимптотически независимы друг от друга. Это обстоятельство уменьшает сферу приложений гауссовских моделей, в частности, чисто гауссовские модели не позволяют прогнозировать высокие экстремумы (например, в случае финансовых временных рядов, которые, как правило, трудно прогнозируемы). Известен эффект Тейлора, когда включение в модель, описывающей высокочастотное движение цен, случайной волатильности (дисперсии), существенно повышает прогнозируемость (см. [8], [9]).

В этой связи приобретает значение класс случайных процессов, называемых условно-гауссовскими, к которым, с одной стороны, применима хорошо развитая техника гауссовских процессов, а с другой стороны, в рамках этого класса можно учесть модели с зависимыми экстремумами. Условно-гауссовскими называют процессы вида $X(t,\theta(t))$, $t\in\mathbb{R}$, где $\theta(t)$— случайный, возможно векторный, процесс такой, что распределение $X(\cdot,\theta(\cdot))$ в соответствующем функциональном пространстве при фиксированном $\theta(\cdot)$ является гауссовским. В настоящей работе рассматриваются условно-гауссовские процессы вида $X(t)\eta(t)+\zeta(t)$, где $X(t)$ и $\theta(t)=(\eta(t),\zeta(t))$ независимы, $X(t)$— гауссовский процесс с нулевым средним и $\eta(t)\geq 0$. Наиболее известным примером условно-гауссовских процессов является так называемый субгауссовский процесс [10] $\xi(t)\sqrt{W}$, где $\xi(t)$— центрированный гауссовский случайный процесс, а W— не зависящая от $\xi(t)$ положительная $\alpha/2$-устойчивая случайная величина $(0<\alpha<2)$ с параметрами $\sigma=(\cos\pi\alpha/4)^{2/\alpha}$, $\beta=1,\mu=0$, которую можно трактовать как случайную среду. Адлер, Самородницкий и Гадрич [11] оценили среднее число пересечений фиксированного уровня субгаус-

[8] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты и модели. Москва, Фазис, 1998.

[9] *Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P.* Modeling and forecasting volatility, Econometrica 71, 2003, 579-625.

[10] *G.Samorodnitsky, M.S.Taqqu* Stable non-Gaussian Random processes.– Chapman & Hall, N.Y., London, 1994.

[11] *J.Adler, G.Samorodnitsky, T.Gadrich* The expected number of level crossings for stationary, harmonizable, symmetric, stable processes. The Annals of Applied Probability, 1993, **3**, No. 2, 553- 575.

совским процессом и изучили асимптотическое поведение этой величины при возрастании уровня. Результат указанной работы заключается в том, что асимптотическое поведение числа пересечений высокого уровня u имеет порядок $u^{-\alpha}$. Используя гауссовскую технику, в диссертации получена асимптотика вероятностей высоких экстремумов субгауссовского процесса, порядок которой также составляет $u^{-\alpha}$.

Указанные процессы в случайной среде оказываются полезными моделями стохастических процессов с предсказуемыми экстремумами. Предсказумая случайная среда (например, случайная дисперсия) позволяет моделировать экстремумы процессов и другие редкие события. Прогнозируя значения дисперсии (волатильности), можно делать выводы о вероятной высоте экстремумов процесса, основываясь на замечании, что высокие экстремумы гауссовского процесса наиболее вероятны в окрестности точек больших значений дисперсии. Это обстоятельство реабилитирует гауссовскую модель и может служить стимулом для дальнейшего развития асимптотических методов в теории гауссовских случайных процессов.

Цель работы.

Целью настоящей работы является нахождение точной асимптотики вероятностей высоких экстремумов условно-гауссовских процессов со случайными параметрами: средним и дисперсией.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Найдены точные асимптотики вероятностей высоких экстремумов условно-гауссовских процессов со случайными постоянными параметрами.

   (а) Доказано, что в случае, когда случайные параметры имеют степенные хвосты распределений, искомая асимптотика имеет степенной порядок;

   (б) Доказано, что в случае, когда правые хвосты распределений случайных параметров зануляются, искомая асимптотика имеет порядок, определяемый поведением на бесконечности максимума п.н. ограниченного гауссовского случайного процесса.

2. Получены точные асимптотики вероятностей высоких экстремумов условно-гауссовских процессов, образованных из гауссовских домножением (или сложением) на случайную квадратичную или линейную функцию.

3. Найдены точные асимптотики вероятностей высоких экстремумов суммы и произведения двух случайных процессов: стационарного гауссовского и процесса, удовлетворяющего определенным условиям регулярности.

Методы исследования.

В работе используются метод двойных сумм для гауссовских процессов и полей, асимптотический метод Лапласа и его модификации, а также методы точечных случайных процессов.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории случайных процессов и теории рисков.

Апробация диссертации.

Основные результаты настоящей диссертации докладывались на семинаре "Асимптотический анализ случайных процессов и полей"под руководством проф. Булинского А.В., проф. Питербарга В.И., к. ф.-м.н Шашкина А.П. в 2004 г., на Ломоносовских чтениях в МГУ им. М.В. Ломоносова в 2006 г., на международной конференции "Statistical Extremes and Environmental Risk", Лиссабон, Португалия, 2007, на Большом Кафедральном семинаре в 2007 г., на семинаре под руководством проф. Минлоса Р. А. в ИППИ РАН в 2007 г. Тематика работы была поддержана грантом РФФИ 04-01-00700.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 3-х работах автора, из которых в соавторстве написана одна. Их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 97 страниц. Список литературы включает 44 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении изложены основные результаты диссертации, дается обзор результатов других авторов по данной проблематике, обосновывается актуальность выбранной темы и проводится обзор методов теории экстремумов гауссовских процессов и полей.

В первой главе найдены точные асимптотики вероятностей высоких экстремумов условно-гауссовских процессов со случайными постоянными параметрами.

Пусть $\xi(t), t \in T$– п.н. ограниченный гауссовский случайный процесс с нулевым средним, заданный на произвольном параметрическом множестве T. Для таких процессов справедливо неравенство [12]

$$P(\max_{t\in T} |\xi(t)| > u) \leq ce^{-\varepsilon u^2},$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\max_{t\in T} E\xi^2(t)}$ и $c = c(\varepsilon) > 0$.

Пусть φ, η— независимые случайные величины и пара (φ, η) не зависит от процесса $\xi(t)$.

В диссертации найдены точные асимптотики вероятностей :

$$P(\max_{t\in T} \xi(t) + \eta > u),\ P(\max_{t\in T} \xi(t)\varphi > u),\ P(\max_{t\in T} \varphi\xi(t) + \eta > u) \qquad (1)$$

при $u \to \infty$.

Случай степенных хвостов распределения случайных параметров.

Введем обозначения: $x_+ = \max\{x; 0\}$ и $x_- = -\min\{x; 0\}$.

Предложение 1.2. *Предположим, что*

$$\lim_{u\to\infty} u^\alpha P(\varphi > u) = A, \quad \lim_{u\to\infty} u^\alpha P(\varphi < -u) = B, \qquad (2)$$

[12] *X.Fernique* Regularite des trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes. Ecole d'Ete des Probablites de Saint-Flour,IV-1974, Lecture Notes in Math., Vol 480, Springer, Berlin, 1975, pg 1-96.

где A и B– постоянные величины, $\alpha > 0$. Тогда при $u \to \infty$ верно

$$P(\max_{t\in T}\xi(t)\varphi > u) = \frac{AE(\max_{t\in T}\xi(t))_+^{\alpha} + BE(\max_{t\in T}\xi(t))_-^{\alpha}}{u^{\alpha}}(1+o(1)),$$

где $E(\max_{t\in T}\xi(t))_+^{\alpha} < \infty$ и $E(\max_{t\in T}\xi(t))_-^{\alpha} < \infty$.

Для указанного выше субгауссовского процесса получаем в качестве следствия следующую асимптотику при $u \to \infty$:

$$P(\max_{t\in T}\xi(t)\sqrt{W} > u) = \frac{E(\max_{t\in T}\xi(t))_+^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha/2)}u^{-\alpha}(1+o(1)),$$

где $\Gamma(\cdot)$— гамма функция. Тот же порядок асимптотики сохраняется и для среднего числа пересечений уровня (см. ранее упоминавшуюся работу [9]).

Теорема 1.1. *Пусть распределение φ удовлетворяет условию (2), а распределение случайной величины η удовлетворяет условию: $\lim_{u\to\infty} u^{\beta}P(\eta > u) = C$, где C — постоянная величина, $\beta > 0$. Тогда*

(i) *если $\beta > \alpha$, то при $u \to \infty$ имеем соотношение*

$$P(\max_{t\in T}\varphi\xi(t)+\eta > u) = \frac{AE(\max_{t\in T}\xi(t))_+^{\alpha} + BE(\max_{t\in T}\xi(t))_-^{\alpha}}{u^{\alpha}}(1+o(1)).$$

(ii) *если $\beta < \alpha$, то при $u \to \infty$ имеем соотношение*

$$P(\max_{t\in T}\varphi\xi(t)+\eta > u) = Cu^{-\beta}(1+o(1)).$$

(iii) *если $\beta = \alpha$, то при $u \to \infty$ имеем соотношение*

$$P(\max_{t\in T}\varphi\xi(t)+\eta > u) = \\ = \frac{AE(\max_{t\in T}\xi(t))_+^{\alpha} + BE(\max_{t\in T}\xi(t))_-^{\alpha} + C}{u^{\alpha}}(1+o(1)).$$

Случай правых легких хвостов распределения случайных параметров.

Пусть $f_{\eta}(x)$— плотность случайной величины η и $\sigma_1 = \sup\{x : f_{\eta}(x) > 0\}$. Предположим, что $\sigma_1 < \infty$.

Пусть φ— неотрицательная случайная величина с плотностью $f_{\varphi}(x)$ и $\sigma_2 = \sup\{x : f_{\varphi}(x) > 0\} < \infty$. Для довольно широкого класса гауссовских случайных процессов и полей (см. [1]) известна асимптотика:

$$P(\max_{t\in T}\xi(t) > u) = hu^{a}e^{-bu^2}(1+o(1)), \quad u \to \infty, \tag{3}$$

где $h > 0, a$— некоторые константы, $b = \frac{1}{2\max_{t\in T} E\xi^2(t)}$.

В диссертации доказано, что при сделанных предположениях асимптотики вероятностей (1) имеют тот же характер (3).

Теорема 1.2. *Пусть для некоторого $k = 0, 1, 2...$ плотность $f_\eta(x)$ k раз непрерывно дифференцируема слева в точке $x = \sigma_1$, причем $f_1^{(k)}(\sigma_1) \neq 0$, а при $i < k$: $f_1^{(i)}(\sigma_1) = 0$. Пусть для некоторого $l = 0, 1, 2...$ плотность $f_\varphi(x)$ l раз непрерывно дифференцируема слева в точке $x = \sigma_2$, причем $f_2^{(l)}(\sigma_2) \neq 0$, а при $i < l$: $f_2^{(i)}(\sigma_2) = 0$. Тогда верна асимптотика:*

$$P(\max_{t\in T} \varphi\xi(t) + \eta > u) = Ku^{a-k-2l-3}e^{-\frac{b(u-\sigma_1)^2}{\sigma_2{}^2}}(1 + o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $K = (-1)^{k+l}hf_\eta^{(k)}(\sigma_1)f_\varphi^{(l)}(\sigma_2)(2b)^{-k-l-2}\sigma_2{}^{2k+3l+5-a}$.

Доказательство утверждений первой главы проводится с помощью асимптотического метода Лапласа [13] и его модификаций.

Во второй главе изучаются высокие экстремумы условно-гауссовских процессов, представимых в виде произведения и суммы стационарного гауссовского и случайных квадратичной или линейной функций.

Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$— стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $r(t)$ такой, что для $0 < \alpha \leq 2$ имеем $r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$ при $t \to 0$ и $r(t) < 1$, $\forall t > 0$.

Пусть η и $\zeta \geq 0$— случайные величины, не зависящие в совокупности от процесса $\xi(t)$. Пусть $f(y, x) = f_{\zeta,\eta}(y, x)$— совместная плотность случайных величин, а $f_{\zeta|\eta}(y|x) = f_{\zeta,\eta}(y, x)/f_\eta(x)$— условная плотность.

Для случайной величины η с плотностью f_η обозначим $\sigma = \sup\{x : f_\eta(x) > 0\}$, а для случайной величины ζ с плотностью f_ζ обозначим $\sigma_\zeta = \sup\{x : f_\zeta(x) > 0\}$. Пусть $\sigma_\zeta < \infty$. Пусть $\sigma < \infty$ и для некоторого $k = 0, 1, 2, ...$ плотность $f_\eta(x)$ k раз непрерывно дифференцируема слева в точке σ, причем $f_\eta^{(l)}(\sigma) = 0$ для $l = 0, ..., k - 1$ и $f_\eta^{(k)}(\sigma) \neq 0$.

Введем обозначение $f_{\zeta|\eta}(y|\sigma) := \lim_{x\to\sigma-} f_{\zeta|\eta}(y|x)$.

Асимптотика вероятностей высоких экстремумов условно-гауссовских процессов со случайной дисперсией.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ случайная величина $\eta \geq \varepsilon$ п.н. Положим

$$P_{u,2} = P(\max_{t\in[-a,a]} \xi(t)(\zeta - \frac{1}{2}\eta t^2) > u), \ P_{u,1} = P(\max_{t\in[0,a]} \xi(t)(\zeta - \eta t) > u),$$

[13] *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды.М.: Наука, 1977.

где $a < \sqrt{2\varepsilon/\sigma_\zeta}$ в первом случае и $a < \varepsilon/\sigma_\zeta$— во втором.

Введем обозначение $\Psi(u) = (1/\sqrt{2\pi})\int_u^\infty e^{-x^2/2}dx$. Как известно, $\Psi(u) \sim 1/\sqrt{2\pi}u^{-1}e^{-u^2/2}$ при $u \to \infty$. Здесь и далее мы считаем, что $a(u) \sim b(u)$ при $u \to \infty$, если функции $a(u)$ и $b(u)$ такие, что $\lim_{u\to\infty} a(u)/b(u) = 1$.

Теорема 2.1. *Предположим, что функция $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ непрерывна слева в точке $x = \sigma$ для любого $y \in [0,\sigma_\zeta]$ и существует функция $c(y)$ такая что $y^{-1/2}f_{\zeta|\eta}(y|x) \le c(y)$ и $\int_0^{\sigma_\zeta} c(y)dy < \infty$.*

1. *Пусть $\alpha < 2$. Тогда*

$$P_{u,2} \sim (-1)^k\sqrt{2\pi}H_\alpha E_2(\sigma)\sigma^{-2/\alpha+3k+9/2}f_\eta^{(k)}(\sigma)u^{2/\alpha-3-2k}\Psi(u/\sigma), \quad u \to \infty,$$

где $E_2(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} y^{-1/2}f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\,dy$.

2. Пусть $\alpha = 2$. Тогда

$$P_{u,2} \sim (-1)^k\sigma^{3k+3}f_\eta^{(k)}(\sigma)\widetilde{E}_2(\sigma)u^{-2-2k}\Psi(u/\sigma), \quad u \to \infty,$$

где $\widetilde{E}_2(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} \sqrt{(2\sigma+y)/y}f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\,dy$.

Теорема 2.2. ***1.*** *Пусть $\alpha > 1$. Предположим, что существует $\epsilon > 0$, такое, что плотность $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ ограничена на $[0,\sigma_\zeta]\times[\sigma-\epsilon,\sigma]$. Тогда при $u \to \infty$*

$$P_{u,1} \sim (-1)^k\sigma^{3k+3}f_\eta^{(k)}(\sigma)u^{-2-2k}\Psi(u/\sigma).$$

2a. *Пусть $\alpha < 1$. Предположим, что функция $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ непрерывна слева в точке $x = \sigma$ для любого $y \in [0,\sigma_\zeta]$ и существует функция $c(y)$ такая что $y^{-1}f_{\zeta|\eta}(y|x) \le c(y)$ и $\int_0^{\sigma_\zeta} c(y)dy < \infty$. Тогда*

$$P_{u,1} \sim (-1)^kH_\alpha\sigma^{6+3k-2/\alpha}E_1(\sigma)f_\eta^{(k)}(\sigma)u^{2/\alpha-4-2k}\Psi(u/\sigma),\ u \to \infty,$$

где $E_1(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} y^{-1}f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\,dy$.

2b. *Пусть $\alpha < 1$. Предположим, что функция $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ непрерывна слева в точке $x = \sigma$ для любого $y \in [0,\sigma_\zeta]$ и условная плотность $f_{\zeta|\eta}(y|\eta = x)$ непрерывна в точке $y = 0$ равномерно по всем $x \in [\sigma-\epsilon,\sigma]$ для некоторого $\epsilon > 0$ и $f_{\zeta|\eta}(0|\sigma) > 0$. Тогда при $u \to \infty$*

$$P_{u,1} \sim 2(-1)^kH_\alpha\sigma^{5+3k-2/\alpha}f_{\zeta|\eta}(0|\sigma)f_\eta^{(k)}(\sigma)u^{2/\alpha-4-2k}\log u\Psi(u/\sigma).$$

3a. *Пусть $\alpha = 1$. Предположим, что функция $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ непрерывна слева в точке $x = \sigma$ для любого $y \in [0,\sigma_\zeta]$ и существует функция $c(y)$ такая что $y^{-1}f_{\zeta|\eta}(y|x) \le c(y)$ и $\int_0^{\sigma_\zeta} c(y)dy < \infty$. Тогда при $u \to \infty$*

$$P_{u,1} \sim (-1)^k\sigma^{3k+3}f_\eta^{(k)}(\sigma)H_1(\sigma)\Psi(u/\sigma),$$

где $H_1(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} \exp\{\max\limits_{[0,\infty]}(\sqrt{2}B(t) - (1+y/\sigma)t)\} f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\, dy$, $0 < H_1(\sigma) < \infty$, $B(t)$ — *стандартное броуновское движение.*

3b. *Пусть* $\alpha = 1$. *Предположим, что функция* $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ *непрерывна слева в точке* $x = \sigma$ *для любого* $y \in [0, \sigma_\zeta]$ *и условная плотность* $f_{\zeta|\eta}(y|\eta = x)$ *непрерывна в точке* $y = 0$ *равномерно по всем* $x \in [\sigma - \epsilon, \sigma]$ *для некоторого* $\epsilon > 0$ *и* $f_{\zeta|\eta}(0|\sigma) > 0$. *Тогда при* $u \to \infty$

$$P_{u,1} \sim 2(-1)^k \sigma^{3+3k} f_\eta^{(k)}(\sigma) f_{\zeta|\eta}(0|\sigma) u^{-2-2k} \log u \Psi(u/\sigma).$$

Асимптотика вероятностей высоких экстремумов условно-гауссовских процессов со случайным средним.

Положим $P_{u,2}^+ = P(\max_{t\in[-a,a]} \xi(t) + \eta - \frac{1}{2}\zeta t^2 > u)$ и $P_{u,1}^+ = P(\max_{t\in[0,a]} \xi(t) + \eta - \zeta t > u)$.

Теорема 2.3. *Предположим, что функция* $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ *непрерывна слева в точке* $x = \sigma$ *для любого* $y \in [0, \sigma_\zeta]$ *и существует функция* $c(y)$ *такая что* $y^{-1/2} f_{\zeta|\eta}(y|x) \le c(y)$ *и* $\int_0^{\sigma_\zeta} c(y)dy < \infty$. *Тогда при* $0 < \alpha \le 2$

$$P_{u,2} \sim (-1)^k \sqrt{2\pi} H_\alpha E_2(\sigma) f_\eta^{(k)}(\sigma) u^{2/\alpha - 3/2 - k} \Psi(u - \sigma), \quad u \to \infty$$

где $E_2(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} y^{-1/2} f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\, dy$.

Теорема 2.4. *Предположим, что функция* $f_{\zeta,\eta}(y,x)$ *непрерывна слева в точке* $x = \sigma$ *для любого* $y \in [0, \sigma_\zeta]$.

1a. *Пусть* $\alpha < 2$ *и существует функция* $c(y)$ *такая что* $y^{-1} f_{\zeta|\eta}(y|x) \le c(y)$ *и* $\int_0^{\sigma_\zeta} c(y)dy < \infty$. *Тогда*

$$P_{u,1} \sim (-1)^k H_\alpha E_1(\sigma) f_\eta^{(k)}(\sigma) u^{2/\alpha - 2 - k} \Psi(u - \sigma), \quad u \to \infty,$$

где $E_1(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} y^{-1} f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\, dy$.

1b. *Пусть* $\alpha < 2$ *и существует* $\epsilon > 0$ *такое, что условная плотность* $f_{\zeta|\eta}(y|\eta = x)$ *непрерывна в точке* $y = 0$ *равномерно по всем* $x \in [\sigma - \epsilon, \sigma]$ *и* $f_{\zeta|\eta}(0|\sigma) > 0$. *Тогда при* $u \to \infty$

$$P_{u,1} \sim (-1)^k H_\alpha f_\zeta(0|\sigma) f_\eta^{(k)}(\sigma) u^{2/\alpha - 2 - k} \log u \Psi(u - \sigma).$$

2. *Пусть* $\alpha = 2$ *и существует функция* $c(y)$ *такая, что* $y^{-1} f_{\zeta|\eta}(y|x) \le c(y)$ *и* $\int_0^{\sigma_\zeta} c(y)dy < \infty$. *Тогда при* $u \to \infty$

$$P_{u,1} \sim (-1)^k f_\eta^{(k)}(\sigma) \widetilde{E}_1(\sigma) u^{-k-1} \Psi(u - \sigma),$$

где $\widetilde{E}_1(\sigma) = \int_0^{\sigma_\zeta} (\Phi(y/\sqrt{2}) + \frac{e^{-y^2/4}}{\sqrt{\pi} y}) f_{\zeta|\eta}(y|\sigma)\, dy$, *а* $\Phi(x) = P(\xi \le x)$, ξ — *стандартная нормальная случайная величина.*

Доказательства утверждений второй главы проводятся с помощью метода двойных сумм и асимптотического метода Лапласа и его обобщений.

Третья глава посвящена нахождению асимптотик вероятностей высоких выбросов суммы и произведения процессов: стационарного гауссовского и процесса, удовлетворяющего определенным условиям регулярности.

Пусть $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$— гауссовский стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $r(t)$, такой что $r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 2$ при $t \to 0$ и $r(t) < 1$ для всех $t > 0$.

Пусть $\eta(t)$, $t \in \mathbb{R}$— случайный процесс, не зависящий от $\xi(t)$.

Далее предполагаются выполненными нижеследующие условия $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

A. $\eta(t)$ — три раза п.н. непрерывно дифференцируемый и локально ограниченный вместе со своими производными процесс, т.е. для любого ограниченного B и неслучайного $C(B) < \infty$ п.н. имеет место

$$\sup_B(|\eta(t)| + |\eta'''(t)|) \leq C(B).$$

B. Для любого $t \in \mathbb{R}$ плотность распределения $f_t(x,y,z){:=}f_{\eta(t),\eta'(t),\eta''(t)}(x,y,z)$ вектора $(\eta(t), \eta'(t), \eta''(t))$ существует и для любого ограниченного $B \subset \mathbb{R}$ равномерно ограничена на $B \times \mathbb{R}^3$.

C. Для любого t и для любого x, таких что $f_{\eta(t)}(x) > 0$ имеет место $f_{\eta'(t)|\eta(t)}(0|x) > 0$.

Обозначим $\sigma(t) := \sup\{x : f_{\eta(t)}(x) > 0\}$ и $(\eta''(t))_- := -\min\{\eta''(t), 0\}$.

D. *Предположим, что* $\sigma(\eta(t)) \equiv \sigma$ *для всех* $t \in [-\gamma, T+\gamma]$, $\gamma > 0$. *Предположим, что точки локального максимума процесса* $\eta(t)$ *не вырождены в том смысле, что для некоторого* $\kappa > 0$ *условия* $\eta'(t) = 0$ *и* $\eta''(t) < 0$ *влекут* $\eta''(t) \leq -\kappa$. *Предположим также, что равномерно по всем* t *имеет место* $\lim_{x\to\sigma-} f_{\eta'(t)|\eta(t)}(0|x) =: f_{\eta'(t)|\eta(t)}(0|\sigma) > 0$ *(мы допускаем максимумы любой высоты). Пусть также равномерно по всем* t *функция*

$$E_t(x) := E(((\eta''(t))_-)^{1/2} \mid \eta(t) = x, \eta'(t) = 0)$$

непрерывна в точке σ *и* $E_t(\sigma) := \lim_{x\to\sigma-} E_t(x) > 0$. *Предположим, что для любого* t *и некоторого* $k = 0, 1, 2, ...,$ *плотность* $f_{\eta(t)}(x)$ *равномерно по всем* t k *раз непрерывно дифференцируема слева в точке* σ, *причем* $f^{(l)}_{\eta(t)}(\sigma) = 0$ *для* $l = 0, ..., k-1$ *и* $f^{(k)}_{\eta(t)}(\sigma) \neq 0$.

Теорема 3.1. *Если* $\eta(t)$*— п.н. положительный случайный процесс, то при* $\alpha < 2$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\max_{t\in[0,T]} \xi(t)\eta(t) > u)}{u^{2/\alpha-3-2k}\Psi(u/\sigma)\int_0^T (-1)^k f^{(k)}_{\eta(t)} f_{\eta'(t)|\eta(t)}(0|\sigma)E_t(\sigma)dt} = \sqrt{2\pi}H_\alpha \sigma^{3k+9/2-2/\alpha};$$

В случае $\alpha = 2$ при некоторых дополнительных условиях асимптотика имеет порядок $\mathcal{H}u^{-2-2k}\Psi(u/\sigma),\ 0 < \mathcal{H} < \infty$.

Теорема 3.2. *При* $0 < \alpha \le 2$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\max_{s\in[0,T]} \xi(s) + \eta(s) > u)}{u^{2/\alpha-3/2-k}\Psi(u-\sigma)\int_0^T (-1)^k f^{(k)}_{\eta(t)} f_{\eta'(t)|\eta(t)}(0|\sigma)E_t(\sigma)dt} = \sqrt{2\pi}H_\alpha.$$

Доказательства теорем 3.1, 3.2 проводятся с помощью методов теории точечных процессов (см. [1, 14]), метода двойных сумм, а также асимптотического метода Лапласа и его модификаций. Доказательство базируется на соображении, что случайный точечный процесс локальных максимумов $\{(t, \eta(t), \eta''(t)) : \eta'(t) = 0, \eta''(t)) < 0\}$ регулярный с интенсивностью

$$\nu(t, x, z) = |z|\mathbf{I}_{z<0} f_{\eta(t),\eta'(t),\eta''(t)}(x, 0, z).$$

и только бесконечно малые окрестности локальных максимумов вносят вклад в асимптотическое поведение вероятностей высоких экстремумов.

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Питербаргу Владимиру Ильичу за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Румянцева Е.В. Асимптотика вероятности больших уклонений условно-гауссовского процесса со случайной дисперсией. - Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 2004. № 5, с. 64-65.

2. Румянцева Е.В. Об асимптотике распределения максимума одного условно-гауссовского процесса. - Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 2006. № 3, с. 57-61.

3. Питербарг В.И., Румянцева Е.В. Экстремумы гауссовских процессов со случайными параметрами. - 44 с. - Рус.-Деп. в ВИНИТИ РАН. 2007. № 374-В2007.

[14] Robert J. Adler The Geometry of Random Fields.— John Wiley and Sons, 1981.

В статье "Экстремумы гауссовских процессов со случайными параметрами"Питербаргу В.И. принадлежит идея использования специальной теории точечных случайных процессов в доказательстве Теоремы 1, а также доказательство для случая $\alpha = 2$ в Теореме 2 и случая $\alpha \geq 1$ в Теореме 3. Остальные результаты, а именно Теорема 2 для $\alpha < 2$, Теорема 3 для $\alpha < 1$, а также Теоремы 4,5,6 доказаны Румянцевой Е.В.