МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.543+512.543.76

Каган Дмитрий Зиновьевич

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПСЕВДОХАРАКТЕРЫ НА ГРУППАХ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент А.А. Клячко

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Д.И. Молдаванский

кандидат физико-математических наук, доцент Г.С. Дерябина

Ведущая организация: Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого

Защита диссертации состоится 18 мая 2007г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 апреля 2007г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84 в МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор

В.Н.Чубариков

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

В этой работе исследуются нетривиальные псевдохарактеры на группах, возможность построения таких псевдохарактеров на тех или иных классах групп, их свойства и связи с другими характеристиками групп. Вопросы о том на каких типах групп существуют нетривиальные псевдохарактеры и их свойства рассматривались во многих работах. Существование нетривиальных псевдохарактеров связано с устойчивостью функциональных уравнений на группах, с ограниченными когомологиями групп и с шириной вербальных подгрупп.

Понятие псевдохарактеров введено А.И. Штерном в докладе "Устойчивость представлений и псевдохарактеры"в 1983 году. Вещественным квазихарактером, или просто квазихарактером, называется отображение из группы G в пространство действительных чисел R, удовлетворяющее следующему неравенству $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ для любых элементов x, y группы G и некоторого $\varepsilon > 0$. Псевдохарактером на группе G называется квазихарактер f, для которого выполняется $f(x^n) = nf(x)$ для любого элемента $x \in G$ и любого целого числа n. Аддитивным характером группы называется отображение из группы G в R, для которого $f(ab) = f(a) + f(b)$ при любых $a, b \in G$. Нетривиальным называется псевдохарактер f, отличный от аддитивного характера, т.е. для него существуют такие $a, b \in G$, что $f(ab) \neq f(a) + f(b)$. А.И. Штерном доказана лемма о том, что для любого квазихарактера f на произвольной группе G функция $\varphi(g) = lim_{n\to\infty} 1/nf(g^n)$ является псевдохарактером на той же группе G.

Понятие нетривиальных псевдохарактеров появилось как алгебраическое обоснование вопроса об устойчивости уравнений. С. Уламом[1] в списке нерешенных задач был поставлен вопрос о том, при каких условиях решения функционального неравенства $||f(xy) - f(x) - f(y)|| \leq \varepsilon$, будут близки к решениям соответствующего функционального уравнения $f(xy) - f(x) - f(y) = 0$. Д. Хайерсом[2] было доказано, что отображение f из одного банахова пространства в другое, удовлетворяющее следующему свойству $||f(xy) - f(x) - f(y)|| \leq \varepsilon$, является $\varepsilon-$близким к некоторому аддитивному отображению l, для которого $l(xy) - l(x) - l(y) = 0$. Отображение f из группы G считается $\varepsilon-$близким к отображению l из той же группы G, если для любого элемента g группы G выполняется

[1] *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М., Наука, 1964г.

[2] *Hyers D.H.* On the stability of the linear functional equations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1941, V.27 N2, 222-224.

неравенство $||f(g)-l(g)||\leq\varepsilon$. В работах Бейкера, Лоуренса и Зорцитто[3], А.И. Штерна[4] и Лоуренса[5] изучается вопрос об условиях совпадения решений функционального неравенства $||f(xy)-f(x)-f(y)||\leq c$ с решением соответствующего функционального уравнения. В работе[6] для любого числа n строится пример отображения f дискретной группы G, удовлетворяющего неравенству $||f(xy)-f(x)-f(y)||<1/n$, но не являющегося $\varepsilon-$близким ни к какому представлению группы G.

Рассмотрение понятия нетривиального псевдохарактера позволяет ответить на многие вопросы об устойчивости уравнений на группах и о существовании отображений из групп, "близких"к представлениям, но не являющихся ни представлениями, ни $\varepsilon-$близкими к представлениям. В работе В.А. Файзиева[7] вводится определение $(G,T)-$устойчивости для произвольной группы G и банахова пространства T.

Уравнение $f(xy)-f(x)-f(y)=0$ называется $(G,T)-$ устойчивым для произвольной группы G и некоторого банахова пространства T, если для любого отображения $f:G\to T$ такого, что для некоторого положительного ε и любых $x,y\in G$ выполняется неравенство: $||f(xy)-f(x)-f(y)||\leq\varepsilon$, существует отображение $l:G\to T$ такое, что для некоторого положительного δ и любых элементов x,y группы G выполняются неравенства: $||f(x)-l(x)||\leq\delta$ и $l(xy)-l(x)-l(y)=0$. В диссертации показано, что из существования нетривиальных псевдохарактеров на некоторой группе G следует, что уравнение $f(xy)-f(x)-f(y)=0$ не является $(G,T)-$ устойчивым для произвольного банахова пространства T.

Можно рассматривать квазихарактеры и псевдохарактеры из группы G в произвольное банахово пространство. При этом, в определении квазихарактера неравенство $|f(xy)-f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$ заменяется на неравенство $||\varphi(xy)-\varphi(x)-\varphi(y)||\leq\varepsilon$ для некоторого положительного ε и для любых элементов $x,y\in G$. В диссертации, в развитие работ А.И. Штерна и В.А. Файзиева, также доказывается, что, если на группе G существует вещественный нетривиальный псевдохарактер, то и для любого банахова пространства E существует нетривиальный псевдохарактер из G в E.

Также к понятию нетривиального псевдохарактера на группах приводит исследование когомологий. Множество псевдохарактеров на произвольной группе G образует вещественное линейное пространство, обозначаемое

---

[3] *Baker Y., Lawrence Y., Zorzitto f.* The stability of equation $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, 74, N2, P.242-246.

[4] *Штерн А. И.* Об устойчивости гомоморфизмов в группу R^*, Вестник МГУ, 1982, N3., с.29-32.

[5] *Lawrence Y.* The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras I. Aequat Math. 1985, v28, N11,2, P.94-101.

[6] *Kazhdan D.* On $\varepsilon-$ representations. Israel J. Math., 1982, v.43, N4, p.315-321

[7] *Файзиев В. А.* Об устойчивости одного функционального уравнения на группах. УМН, 1993,48,N1,193-194.

через $PX(G)$. Подпространство аддитивных характеров обозначается через $X(G)$. В работе Р.И. Григорчука[8] доказано, что выполняется изоморфизм пространств $H_{b,2}^{(2)}(G) \cong PX(G)/X(G)$, где $H_{b,2}^{(n)}(G)$ — ядро естественного отображения $\Theta : H_b^{(n)}(G) \to H^{(n)}(G, R)$, названное в работе[8] сингулярной частью группы $H_b^{(n)}(G)$. Таким образом факторпространство пространства псевдохарактеров по аддитивным характерам вкладывается во вторую группу ограниченных когомологий $H_b^{(2)}(G)$. Если на группе G существует нетривиальный псевдохарактер, то вторая группа ограниченных когомологий G нетривиальна. Если факторпространство всех псевдохарактеров по аддитивным характерам $PX(G)/X(G)$ имеет бесконечную размерность, то и $dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$

В серии работ В.А. Файзиева[7,9,10,11,12], посвященных исследованию нетривиальных псевдохарактеров, доказано существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях неединичных групп, за исключением $Z_2 * Z_2$. Также в статьях В.А. Файзиева исследуются пространства нетривиальных псевдохарактеров на свободных группах и полугруппах. Построены пространства нетривиальных псевдохарактеров свободных произведений групп и полугрупп, а также рассмотрены нетривиальные псевдохарактеры полупрямых произведениях групп. Кроме того, исследуются матричные отображения групп и их связи с нетривиальными псевдохарактерами на рассматриваемых группах.

В работах Р.И. Григорчука[8,13] доказывается существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой $G = A *_V B$ при условии, что объединяемая подгруппа является собственной в A и B и для одного из множителей, например, для A выполняется $|A :: V| \geq 3$. Там же доказывается существование нетривиальных псевдохарактеров на HNN-расширении $G =< G_0, t | tAt^{-1} = B >$ при условии, что группы A и B являются собственными подгруппами в G_0. В этих работах показано, что на таких типах групп, при вышеизложенных условиях, $dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$ Из вышеизложенных результатов следует, что группы с одним определяющим соотношением и не менее, чем тремя образующими, также обладают нетривиальными псевдохарактерами и для них также выполняется $dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$ В диссертации доказаны утверждения,

[8] *Grigorchuk R.I.* Some results an bounded cohomology// Combinatorial and Geometric Group Theory. Edinburg,1993;// London Math. Soc. Lecture Notes Ser.. V.284. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, P.111-163.

[9] *Файзиев В. А.* Двумерные вещественные треугольные квазипредставления групп. Фундаментальная и прикладная математика. 1995, 1, N4, 1129-1132.

[10] *Файзиев В. А.* Псевдохарактеры на свободных группах и некоторых групповых конструкциях.// УМН. 1988, Т.43, N5, С.225-226

[11] *Файзиев В. А.* Псевдохарактеры на свободных группах. Рук. Деп. в ВИНИТИ 6.02.1987, N877-В87,

[12] *Файзиев В. А.* Псевдохарактеры на полупрямых произведениях групп. Матем. заметки. 1993, Т.53, N2, С.132-139

[13] *Григорчук Р. И.* Ограниченные когомологии групповых конструкций. Математические заметки. 1996. 59, N4. 546-550.

которые, в некотором смысле, обобщают данный результат. В частности, установлено существование нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях, где один из множителей - бесконечная циклическая группа. Также установлено существование нетривиальных псевдохарактеров на аномальном произведении локально индикабельных групп при выполнении определенных условий.

В работе Р.И. Григорчука ставится вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и двумя образующими. В связи с этим, также ставится вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров свободной группы, инвариантных относительно некоторого ее эндоморфизма. Ответ на эти вопросы, затрагивающий большинство таких групп, дается в данной диссертации. Также в диссертации полностью решен вопрос о условиях существования нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром.

В работе В.Г. Бардакова[14] квазихарактеры используются при нахождении ширины различных вербальных подгрупп $V(G)$ относительно множества V. В работе[14] доказывается бесконечность ширины собственных (т.е. $V(F_2) \neq F_2, V(F_2) \neq e$) вербальных подгрупп $V(G)$ относительно конечного множества слов V для HNN-расширений, свободных произведений с объединением и групп с одним определяющим соотношением. В данной диссертации доказано, что если на группе G существуют нетривиальные псевдохарактеры, ширина любой собственной коммутаторной подгруппы (т.е. порожденной элементами, принадлежащими коммутанту G') $V(G)$, содержащей коммутант G', относительно конечного множества слов из коммутанта V является бесконечной.

Цель работы

Целью настоящей работы является разрешение вопроса о существовании нетривиальных псевдохарактеров на различных типах групп, таких, как аномальные произведения с бесконечной циклической группой, аномальные произведения локально индикабельных групп, группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими, группы с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Кроме того, одной из целей работы также является получение следствий о вторых группах когомологий рассматриваемых групп и ширине их коммутаторных вербальных подгрупп.

[14] *В.Г. Бардаков.* О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций. Алгебра и логика. 1997. 36, N5. 494-517.

Методы исследования.

В диссертации используются методы и результаты комбинаторной теории групп, в том числе исследования свободных произведений с объединением, HNN-расширений и групп с одним определяющим соотношением. Особенностью методов исследования во второй главе настоящей диссертации является сведение различных групп к свободным произведениям с объединением или HNN-расширениям. В третьей главе используется метод подсчета функций, задаваемых на группе с помощью введенных в работе терминов, таких, как защищенные фрагменты и степенные ряды одного элемента группы в другом.

Научная новизна

Основные результаты,полученные в данной работе, являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано существование нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп, в которых один из множителей является бесконечной циклической группой, а другой не является нормальным замыканием никакого своего элемента, и для которого выполняется теорема о свободе, при некоторых условиях, накладываемых на аномалию.

2. Доказано существование нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях локально индикабельных групп при различных условиях, накладываемых на эти группы.

3. Доказано существование нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и двумя образующими при некоторых условиях на определяющее соотношение.

4. Установлены условия существования нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром.

5. Найдены условия на инъективные эндоморфизмы свободных групп, при которых существуют нетривиальные псевдохарактеры свободной группы, инвариантные относительно этих эндоморфизмов.

6. Получены результаты о размерности вторых групп когомологий исследуемых групп.

7. Показано, что ширина любой собственной коммутаторной вербальной подгруппы $V(G)$, содержащей коммутант G', относительно конечного порождающего множества слов V в исследуемых группах является бесконечной.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы исследований могут быть применены в различных областях теории групп, теории когомологий и в исследованиях об устойчивости уравнений.

Апробация диссертации.

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре "Теория групп"под руководством профессоров А.Л. Шмелькина, А.Ю. Ольшанского и доцента А.А. Клячко (2000г., 2003г., 2004г., 2005г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры на механико - математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова (2007г.), а также на Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 2004г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, список которых приводится в конце автореферата[1-4].

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, разделенных на 12 параграфов и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 127 страниц. Библиография включает 37 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введении отражена история вопроса, приведены основные результаты, связанные с темой диссертации. Также приводятся основные результаты диссертации и краткие идеи их доказательств.

В главе 1 приводятся основные свойства псевдохарактеров, а также утверждения, связывающие существование на группе нетривиальных псевдохарактеров с другими важными характеристиками групп, о некоторых из которых уже говорилось в первом разделе автореферата. Также приводятся различные варианты доказательства существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединенной подгруппой и HNN-расширений. В параграфе 1.1 даются некоторые общие утверждения о псевдохарактерах. Доказано, что, если на группе существует вещественный нетривиальный псевдохарактер, то на этой группе существуют нетривиальные псевдохарактеры в любое банахово пространство. Доказано, что существование нетривиальных псевдохарактеров на некоторой группе G влечет за собой $(G,T)-$неустойчивость уравнения $f(xy)-f(x)-f(y)=0$. Рассмотрена связь нетривиальных псевдохарактеров с шириной вербальных подгрупп. В параграфе 1.2 дается доказательство существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединенной подгруппой, несколько отличное от доказательства Р.И. Григорчука. В параграфе 1.3 приводятся два способа построения нетривиальных псевдохарактеров на HNN-расширениях. Псевдохарактеры HNN-расширений можно строить, используя определенные фрагменты в нормальных записях элементов, или используя только сигнатуры элементов: $\sigma(g)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, где $g=ht^{\varepsilon_1}h_1\ldots t^{\varepsilon_n}h_n$.

В главе 2 рассматриваются аномальные произведения, приводятся теоремы и утверждения о существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях различных групп. Аномальным произведением A_wB групп A и B называется фактор-группа свободного произведения $A*B$ по нормальному замыканию некоторого своего элемента w, который называется аномалией. В параграфе 2.1 приводится конструкция С. Д. Бродского[15], которая играет важную роль при доказательстве многих утверждений этой главы. В этом параграфе вводятся функции B^n и B^k на группе $H-$ нормальном замыкании группы B в свободном произведении $F=A*B$. Значениями этих функций являются элементы группы B. Также в параграфе 2.1 рассматриваются ситуации, когда аномалия имеет минимальную длину, т.е. $w=a_1b_1$.

Утверждение 2.1.1 *Пусть* $G=A*B/<<w>>, w=a_1b_1$. *Пусть также для групп* A *и* B *выполняются соотношения* $|A::<a_1>|\geq 3, B\neq<b_1>$. *Тогда на группе* G *существуют нетривиальные псевдохарактеры.*

В параграфе 2.2 рассматриваются аномальные произведения бесконечной циклической группы $A=<x>$ с группой B, для которой выполняется теорема о свободе. Под теоремой о свободе понимается выполнение следующего свойства для группы B : пусть $C=B*B*\ldots*B/<<w>>$ — свободное произведение нескольких изоморфных копий группы B, на которое наложено одно дополнительное соотношение w, которое мы считаем циклически несократимым, тогда подгруппа, порожденная всеми копиями B, за исключением одной, элемент из которой входит в циклически несократимую запись w, является просто свободным произведением этих копий. В частности, теорема о свободе выполняется для ло-

[15] *Бродский С. Д.* Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением. Сибирский математический журнал. 1984. 25, N2. 84-103.

кально индикабельных групп. Локально индикабельной называется группа, в которой любая конечно порожденная подгруппа обладает гомоморфизмом на бесконечную циклическую группу. В параграфе 2.2 приводятся доказательства утверждений о том, что при условиях: произведение всех элементов группы $A =< x >$, входящих в запись аномалии w, равно 1, и выполняются некоторые условия для значений $B^n(w)$ и $B^k(w)$ на группе $G = A_w B$ существуют нетривиальные псевдохарактеры. Из этих утверждений вытекает основная теорема данного параграфа.

Теорема 2.2.3. *Пусть $G = A_w B$ — аномальное произведение групп A и B, где $A =< x >$; B — группа, которая не является нормальным замыканием никакого своего элемента, и для которой выполнена теорема о свободе; и $w = x^{k_1} b_1 \dots x^{k_l} b_l$ — элемент свободного произведения $F = A * B$. Пусть также сумма всех степеней элемента x, с которыми он входит в слово w, равна нулю: $\sum_{i=1}^{l} k_i = 0$. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Эта теорема является, в некотором смысле, обобщением результата Р.И. Григорчука о существование нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и не менее, чем тремя образующими(см. ссылку 13). Из этой теоремы и предшествующих ей утверждений вытекают следствия о группе с одним определяющим соотношением и двумя образующими, рассматриваемой как аномальное произведение двух бесконечных циклических групп, и аномальном произведении локально индикабельных групп.

Следствие 2.2.4. *Пусть $G =< x, y | r = 1 >$, $r = x^{k_1} y^{r_1} \dots x^{k_l} y^{r_l}$ и $\sum_{i=1}^{l} k_i = 0$. Если $B^n(r) \neq y^{\pm 1}$ и $B^k(r) \neq y^{\pm 1}$, то на группе G существуют нетривиальные псевдохарактеры.*

Следствие 2.2.5. *Пусть группа $G = A_w B$ — аномальное произведение, где A и B — локально индикабельные группы, A — конечно-порожденная, и B не является нормальным замыканием одного своего элемента, $w = a_1 b_1 \dots a_l b_l$. Пусть $a_1 \dots a_l \in \tilde{A}$, где $A = \widetilde{A} \lambda < x >$. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Следствие 2.2.6. *Пусть G — аномальное произведение групп, удовлетворяющее всем условиям теоремы 2.2.3 или следствий. Тогда $dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$*

Также для всех групп, удовлетворяющих теореме или следствиям параграфа 2.2, ширина вербальных подгрупп $V(G)$, содержащих коммутант G', и определенных конечными собственными коммутаторными множествами слов V, бесконечна, а сами эти группы являются неаменабельными.

В параграфе 2.3 приводятся утверждения о аномальных произведениях локально индикабельных групп и их доказательства. Доказывается, что аномальное произведение двух локально индикабельных групп, одна из которых не является конечно порожденной, а другая не является циклической, обладает нетривиальными псевдохарактерами. В главной теореме этого параграфа показано, что аномальное произведение бесконечной циклической группы $A =< x >$ и локально индикабельной группы, которая не является циклической, обладает нетривиальными псевдохарактерами при условии, что сумма всех показателей степеней, с которыми x входит в запись w, равна 0. Также рассматриваются аномальные произведения локально индикабельных групп, в которых одна из групп - конечно порожденная. При доказательстве утверждений этого параграфа используются две леммы, одна из которых содержится в работе M.Cohen и C.Rourke[16], а другая следует из работы А.А. Клячко [17].

Утверждение 2.3.1. *Пусть $G = A_wB$ - аномальное произведение двух локально индикабельных групп A и B, где A не является конечно порожденной, B не является циклической и элемент w не лежит в группах A или B и не сопряжен с элементами из этих групп. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Утверждение 2.3.2. *Пусть $G = A_wB$ - аномальное произведение бесконечной циклической группы $A =< x >$ и группы $B-$ без кручения, на которой существует нетривиальный псевдохарактер, и, которая не является конечно порожденной. Тогда на группе G также существует нетривиальный псевдохарактер.*

Теорема 2.3.3. *Пусть $G = A_wB$ - аномальное произведение группы $A =< x >$ и локально индикабельной группы B, причем B не является циклической группой, и элемент w не сопряжен с элементами из групп A или B. Пусть сумма всех p_i из формулы $w = x^{p_1}b_1 \dots x^{p_l}b_l$ равняется 0: $\sum p_i = 0$. Тогда на группе G существуют нетривиальные псевдохарактеры.*

Утверждение 2.3.4. *Пусть $G = A_wB$ - аномальное произведение двух локально индикабельных групп A и B, где B не является циклической группой и элемент $w = a_1b_1 \dots a_lb_l$ не сопряжен с элементами из A или B. Пусть A - конечно порожденная группа. Пусть также произведение всех a_i лежит в $\tilde{A}$: $a_1 \dots a_l \in \tilde{A}$, где группа $\widetilde{A}$ получается из разложения $A = \widetilde{A}\lambda < x >$. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Для групп, удовлетворяющих утверждениям и теоремам данного

[16] *Cohen M. M., Rourke C.* The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5 P.127-142.

[17] *Клячко А. А.* Гипотеза Кервера-Лауденбаха и копредставления простых групп. Алгебра и логика, Т.44(2005), N4, с.399-437.

параграфа, выполняются условия на вторую группу их когомологий, а также свойства неаменабельности и бесконечной ширины собственных вербальных коммутаторных подгрупп, содержащих коммутант группы.

Утверждение 2.3.5. *Если для группы G выполняются условия утверждений 2.3.1, 2.3.4, или теоремы 2.3.3, то $dim H^{(2)}_{b,2}(G) = \infty$ Если G удовлетворяет условиям утверждения 2.3.2, то $dim H^{(2)}_{b,2}(G) \neq 0$.*

В главе 3 осуществлена попытка установить при каких условиях на группах с одним определяющим соотношением и двумя образующими существуют нетривиальные псевдохарактеры. Для этого исследуются эндоморфизмы свободной группы. Рассмотрим группу с двумя образующими и одним определяющим соотношением $G =< t, a | r(t,a) = 1 >$. С помощью различных преобразований, в том числе преобразований Тице, можно добиться того, чтобы один из порождающих, например t, входил в определяющее соотношение в суммарной нулевой степени. Группу с одним определяющим соотношением, в которой один из порождающих входит в определяющее соотношение в суммарной нулевой степени, можно представить в виде HNN-расширения[18,19,20]. Рассматриваемая группа $G =< t, a | r(t,a) = 1 >$ имеет представление в виде HNN-расширения $< t, a_k, \ldots, a_n | s(a_k, \ldots, a_n) = 1, t a_i t^{-1} = a_{i+1}, i = k, k+1, \ldots, n-1 >$ с базой $< a_k, \ldots, a_n | s(a_k, \ldots, a_n) = 1 >$ и изоморфными свободными подгруппами $< a_k, \ldots, a_{n-1} >$ и $< a_{k+1}, \ldots, a_n >$.

Согласно теореме о существовании нетривиальных псевдохарактеров на HNN-расширениях(см. ссылку 13), достаточным условием для этого является то, что обе изоморфные подгруппы — собственные. Можно показать(см. ссылку 18), что обратное выполняется только, если определяющее соотношение $s = 1$ представляется в виде $a_n = U(a_k, \ldots, a_{n-1})$ или $a_k = U(a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Будем, не нарушая общности рассуждений, рассматривать вариант, когда $a_n = U_0(a_k, \ldots, a_{n-1})$. В дальнейшем, для удобства записи, будем считать, что $k = 0$.

В этом случае группа G имеет следующее представление: $G =< a_0, \ldots, a_{n-1}, t | t a_{i-1} t^{-1} = a_i, i = 1, \ldots, n-1,\ t a_{n-1} t^{-1} = U_0 >$. Тогда группа G является HNN-расширением, в котором база совпадает с одной из изоморфных подгрупп. Базой такого HNN-расширения будет свободная группа $< a_0, \ldots, a_{n-1} >$, а сопряжение этой группы с помощью проходной буквы t будет задавать эндоморфизм свободной группы, при котором $a_0 \to a_1, \ldots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to U_0(a_k, \ldots, a_{n-1})$. Этот

[18] *Молдованский Д.И.* О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением. Сиб. матем. журнал, 1967, 6, N6, с.1370-1384

[19] *Магнус В., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука,1974.

[20] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир,1980.

эндоморфизм является мономорфизмом. Рассмотрим ситуацию, когда в произвольном HNN-расширении одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой: $G_1 = HNN(G, t|tGt^{-1} = B)$, с изоморфизмом $q : G \to B$, тогда любой элемент группы G_1 представляется в виде $h = t^{-p}gt^k, g \in G, p, k \geq 0$. Если на группе G задан квазихарактер $f, |f(g_1g_2) - f(g_1) - f(g_2)| \leq \varepsilon$, инвариантный относительно отображения $G \to B$, то зададим функцию φ на группе G_1 следующим образом: для произвольного элемента $h = t^{-p}gt^k$ положим $\varphi(h) = f(g)$. В диссертации доказано, что в этом случае функция φ является квазихарактером на группе G_1. Согласно приведенной выше лемме, доказанной А.И. Штерном, функция $f_1(g) = lim_{n\to\infty}\varphi(g^n)/n, g \in G$ является псевдохарактером на группе G_1.

Таким образом, вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и двумя образующими сводится к вопросу о существовании нетривиальных псевдохарактеров свободной группы F_n, инвариантных относительно определенного эндоморфизма. При этом считаем, что $n > 1$. В противном случае, свободная группа является циклической, и нетривиальных псевдохарактеров на ней не существует. В диссертации найдены некоторые условия, при выполнении которых вышеописанный псевдохарактер существует. В параграфе 3.2 исследуются вышеописанные эндоморфизмы свободных групп и вводятся некоторые понятия, связанные с ними. При этом элементы свободной группы, и несократимые слова в алфавите $a_0, \ldots, a_{n-1}$, выражающие эти элементы, не различаются. Для произвольного элемента $v \in F_n$ обозначим через v_1 элемент, в который при рассматриваемом эндоморфизме переходит v, через v_2 - элемент, в который переходит v_1, и так далее. Само слово v можно обозначать также, как v_0. Если элемент v является образом некоторого элемента, то этот элемент обозначается, как v_{-1} и называется откаткой элемента v. Например, $U_{0,-1} = a_{n-1}$. Под следом $v_{ir}(v_j), j > i$ буквы v_{ir} слова v_i в слове v_j будем понимать фрагмент v_j, который является образом буквы v_{ir}. В диссертации доказывается, что в слове v_{i+1} однозначно определены следы каждой буквы слова v_i для любых $v \in F_n, i \geq 0$. Слово U_0 разбивается на части $U_0 \equiv U_{01}U_{00}U_{02}$. Обозначим через U_{00} часть слова U_0, которая содержит все буквы $a_0^{\pm 1}$, лежащие в U_0 и ограничена ими, через U_{01} обозначим часть U_0, лежащую слева от U_{00}, а через U_{02} часть U_0, лежащую справа от U_{00}. В утверждениях и теоремах главы 3 элемент U_{00} считается циклически несократимым.

Основным результатом третьей главы является теорема о том, что если U_{00} содержит $a_{n-1}^{\pm 1}$ или U_0 содержит $a_{n-1}^{\pm 2}$ при дополнительном условии циклической несократимости U_0, то на группе $F_n, n > 1$ существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно рассматриваемого эндоморфизма.

Каждая буква $a_i, i = 0, 1, \ldots, n-1$ в произвольном образе $v_j, j > 0$ некоторого слова v может получиться или из буквы a_{i-1} элемента v_{j-1} или из буквы a_{n-1} в составе слова U_0. Буква a_0 может появиться только вторым способом. В данном параграфе исследуются возможные сокращения букв при переходах $v_i \to v_{i+1}$. Сокращения при таком переходе возможны только в двух случаях: или когда в слове v_{i+1} две одинаковых буквы с противоположным знакам получаются разными способами, одно - прямым переходом, другое - в составе слова $U_0^{\pm 1}$, и эти буквы оказываются рядом или, если элемент U_0 является циклически сократимым, а элемент v_i содержит фрагменты, равные $a_{n-1}^{\pm 2}$.

Метод доказательства основной теоремы данной главы состоит в нахождении некоторого слова $v \in F_n$, с помощью которого можно задать набор функций на F_n, одна из которых будет инвариантна относительно рассматриваемого эндоморфизма, и с ее помощью можно построить искомый нетривиальный псевдохарактер. Для того, чтобы можно было построить набор функций, связанный с произвольным элементом свободной группы, вводятся некоторые технические понятия. Степенным рядом некоторого слова v_i в произвольном слове w_j мы будем называть некоторое пересечение слова w_j и произвольной степени v_i^p, обладающее свойством максимальности, или некоторый максимальный фрагмент слова v_i^p, лежащий также в слове w_j. Под v_i^p подразумевается сколь угодно большая степень элемента v_i. Таким образом, степенной ряд v_i в w_j имеет вид $v_{i,end} v_i^q v_{i,begin}$, где $v_{i,end}$ и $v_{i,begin}$ - произвольные конец и начало слова v_i.

Далее в параграфе 3.2 рассматривается, как при множественном применении рассматриваемого эндоморфизма, могут меняться, расширяться или сокращаться различные степенные ряды. В лемме 1 показано, что если $v_i, i \geq 0$ содержит букву a_{n-1}, то степенной ряд v_i в w_j при переходе $w_j \to w_{j+1}$ не может расшириться на целую степень v_{i+1} слева или справа. Однако, это свойство обеспечивает относительную "неизменяемость"степенного ряда лишь при одном переходе. Нужно найти элемент $v \in F_n$, такой, чтобы степенные ряды v_i в произвольном слове w_j при любом числе переходов не могли расшириться или сократиться на целые степени v_i. Для этого вводятся понятия защищенного и вполне защищенного фрагмента.

Будем называть защищенным фрагментом V_{close} произвольного слова v_{i+1} любой фрагмент, ограниченный буквами $a_0^{\pm 1}$, т. е. начинающийся и кончающийся на букву $a_0^{\pm 1}$. Вполне защищенным фрагментом слова $v_i \in F_n$

будем называть защищенный фрагмент некоторого слова v_i, который при преобразовании $v_i \to v_{i+1}$ переходит в такой фрагмент слова v_{i+1}, который сам содержит аналогичный защищенный фрагмент. Следовательно, вполне защищенный фрагмент v_i при преобразованиях, вызываемых сопряжением t, порождает новый, но идентичный себе вполне защищенный фрагмент в v_{i+1}. Таким образом, любой вполне защищенный фрагмент некоторого слова v_i порождает целую систему вполне защищенных фрагментов во всех последующих $v_j, j > i$, причем каждое v_j содержит, как минимум, один вполне защищенной фрагмент из этой системы. Если слово v_i содержит вполне защищенный фрагмент, то степенной ряд слова v_{i+c} в слове w_{j+c} не может расшириться или сократиться на целые степени v_{i+c} по сравнению со степенным рядом v_i в w_j для любых $w \in F_n, j, c \geq 0$.

Также рассматриваются возможные примеры вполне защищенных фрагментов, которые играют главную роль в определении условий основной теоремы данной главы. В частности, если слово U_{00} содержит букву $a_{n-1}^{\pm 1}$, то $U_{00}^{\pm 1}$ само по себе является вполне защищенным фрагментом. Если элемент U_0 содержит в любой части своей записи $a_{n-1}^{\pm 2}$, то фрагмент произвольного слова, графически равный части U_0^2, а именно фрагмент, графически равный $U_{00}U_{01}U_{02}U_{00}$, является вполне защищенным фрагментом при условии циклической несократимости U_0.

Далее в диссертации для каждого элемента v свободной группы и для произвольного целого числа $i \geq 0$ строится набор слов $V[i]$. Для любого $i \geq 0$ существует элемент v_i. Рассмотрим минимальное слово вида $v_{i,end}v_i^{p-2}v_{i,begin}$, где p - заранее подобранное достаточно большое число, а отрезки $v_{i,end}$ и $v_{i,begin}$ содержат все вполне защищенные фрагменты, которые имеет v_i. В любом вполне защищенном фрагменте есть, по крайней мере, одна буква или слог, из которых получаются следующие, дальнейшие вполне защищенные фрагменты. Обозначим через $V[i]$ фрагмент рассматриваемого слова $v_{i,end}v_i^{p-2}v_{i,begin}$, ограниченный крайними левой и правой такими буквами или слогами. С помощью этого слова для каждого элемента свободной группы строится набор функций.

Этот набор функций строится следующим образом. Введем следующие функции на F_n: $s_i^+(w)$ = количеству непересекающихся фрагментов слова $w \in F_n$, равных V_i^{+1}, $s_i^-(w)$ = количеству фрагментов слова $w \in F_n$, равных V_i^{-1}. Пусть функции

$$\theta^+(w) = \sum_i s_i^+(w), w \in F_n, i = 0, 1, \ldots$$

$$\psi^+(w) = lim_j(\sum_i s_i^+(w_j)) = lim_j \theta^+(w_j)$$

$$\theta^-(w) = \sum_i s_i^-(w), w \in F_n, i = 0, 1, \ldots$$

$$\psi^-(w) = lim_j(\sum_i s_i^-(w_j)) = lim_j \theta^-(w_j).$$

В диссертации доказано несколько утверждений о том, как влияет наличие у некоторого слова v вполне защищенных фрагментов на переходы $v_i \to v_{i+1}$. Показано, что если некоторый степенной ряд слова v_i в слове w_j содержит или не содержит буквы $a_{n-1}^{\pm 1}$ слова v_i, из которых получаются некоторые вполне защищенные фрагменты слова v_{i+1}, то степенной ряд v_{i+1} в w_{j+1}, соответственно, содержит или не содержит эти вполне защищенные фрагменты (лемма 1 параграфа 3.2). Далее доказывается, что слово $V[i+1]$ содержит в себе фрагмент, графически равный $tV[i]t^{-1}$, за исключением, возможно, нескольких букв по краям. В частности, $V[i+1]$ содержит все вполне защищенные фрагменты, которые лежат в $tV[i]t^{-1}$, за исключением, может быть, начала крайне левого и конца крайне правого такого фрагмента (утверждение 3.3.1). Отсюда следует утверждение 3.3.3.

Утверждение 3. 3. 3. *Пусть w, v - произвольные элементы группы $F_n =< a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} >$. Пусть для некоторого $q \geq 0$ слово v_q содержит вполне защищенный фрагмент. Если для некоторых $i > q, j > 0$ слово w_j содержит фрагмент, графически равный $V[i]$, то для любого $s > 0, s \leq i - q, s \leq j$, слово w_{j-s} содержит фрагмент, графически равный $V[i-s]$.*

Это утверждение позволяет получить различные неравенства с введенными функциями. Кроме этого утверждения также доказано, что если элемент w_{j+1} содержит в своей записи слово $V[q], q > 0$ а элемент v_q содержит вполне защищенный фрагмент, то слово w_j содержит в своей записи слово $V[q-1]$. Из этих утверждений получаются неравенства при условии, что элемент $v \in F_n$, отвечает вышеизложенным требованиям.

Теорема 3. 3. 5. *Пусть $v \in F_n$ и для некоторого $q \geq 0$ v_q содержит вполне защищенный фрагмент. Тогда для любого элемента $w \in F_n$ выполняются следующие неравенства:*

$$s_{i+1}^+(w_{j+1}) \leq s_i^+(w_j),$$

$$s_{i+1}^-(w_{j+1}) \leq s_i^-(w_j)$$

для любых $i \geq q-1, j \geq 0$.

Если в последней теореме взять $q = 1$, то из этой теоремы будет следовать, что $\theta^\pm(w_{i+1}) \leq \theta^\pm(w_i) + s_0^\pm(w_{i+1})$. Тогда для того, чтобы последовательности $\theta^\pm(w_i)$ были монотонно невозрастающими для любого элемента свободной группы w, достаточно, чтобы выполнялось равенство $s_0^\pm(w_{i+1}) = 0$ для любого числа $i \geq 0$. Этого можно добиться, если подобрать такой элемент

v, что слово $V[0]$ не может получиться в качестве фрагмента образа любого элемента при рассматриваемом эндоморфизме. Из этих соображений получается одна из основных теорем главы 3.

Теорема 3. 3. 8. *Пусть $U_{00} \neq a_0^{\pm 1}$. Пусть v - некоторый элемент F_n, содержащий фрагмент, равный достаточно большой степени a_0, причем в случае $U_{00} = a_0^q, q \neq \pm 1$, эта степень не делится на q. Пусть, кроме того, для слова v слово v_1 содержит вполне защищенный фрагмент. Тогда для любого $w \in F_n$ $\theta^+(w_{j+1}) \leq \theta^+(w_j)$, $\theta^-(w_{j+1}) \leq \theta^-(w_j)$ для любого $j \geq 0$, существуют пределы $lim_j \theta^+(w_j)$ и $lim_j \theta^-(w_j)$, и, таким образом, для любого $w \in F_n$ имеют смысл функции $\psi^+(w)$ и $\psi^-(w)$.*

Таким образом, при подходяще подобранном элементе v функции $\theta^{\pm}(w_i)$ образуют невозрастающую и неотрицательную последовательность для любого элемента $w \in F_n$, и, следовательно, при таком v для любого элемента $w \in F_n$ определены функции $\psi^+(w)$ и $\psi^-(w)$. При этом функции $\psi^+(w)$ и $\psi^-(w)$ будут инвариантны относительно рассматриваемого эндоморфизма в силу своего определения, как предела других функций при множественном применении к элементам этого эндоморфизма. Далее показано, что при условии: U_{00} - циклически несократимо и содержит букву $a_{n-1}^{\pm 1}$, или при условии: $a_{n-1}^{\pm 2} \in U_0$, и слова U_0, U_{00} являются циклически несократимыми, можно подобрать элемент v, удовлетворяющий всем условиям, которые излагались выше. Пусть $s = s^+ - s^-, \theta = \theta^+ - \theta^-, \psi = \psi^+ - \psi^-$. С помощью леммы 3 параграфа 3.4 доказывается, что функции $\theta(w_i)$ являются квазихарактерами на группе F_n, при условии, что все элементы $V[i]$ удовлетворяют условию $C'(1/2)$. В лемме 4 показано, что предел сходящейся последовательности квазихарактеров также является квазихарактером. Для того, чтобы найти такой элемент, для которого все слова $V[i]$ удовлетворяют условию $C'(1/2)$, используются тестовые элементы. Если тестовые элементы при эндоморфизме свободной группы переходят в сопряженные себе, то эндоморфизм является автоморфизмом свободной группы. Но это возможно только при условии $U_{00} = a_0^{\pm 1}$, которое противоречит нашим условиям, накладываемым на слово U_0.

В диссертации показано, что можно подобрать такой тестовый элемент v, который будет удовлетворять всем условиям теоремы 3.3.8, а также для которого все слова $V[i]$ удовлетворяют условию $C'(1/2)$. Кроме того, элемент v можно подобрать так, чтобы функция $\psi = \psi^+ - \psi^-$ принимала нулевые значения на всех степенях порождающих группы F_n. Таким образом, функция ψ является квазихарактером на F_n, инвариантным относительно рассматриваемого эндоморфизма. Как следует из предположения А.И. Штерна[21], для любого квазихарактера f на произвольной группе функция

[21] *Штерн А. И.* Квазипредставления и псевдопредствления. Функц. анализ и его прил. 1991. Т.25, N2. 70-73.

$\varphi(g) = lim_{n\to\infty} 1/nf(g^n)$ является псевдохарактером на этой группе. При этом данный псевдохарактер принимает нулевые значения на всех порождающих группы F_n, но не является тождественно равным 0 на всей группе F_n, что обеспечивает его нетривиальность. Этот псевдохарактер и является искомым.

Основная Теорема 3.4.2. *Пусть U_{00} - циклически несократимо. Пусть U_{00} содержит букву $a_{n-1}^{\pm 1}$, или U_0 содержит $a_{n-1}^{\pm 2}$ при дополнительных условиях $U_0 \neq a_0^{\pm 1}, U_0$ - циклически несократимо. Тогда на группе $F_n, n > 1$ существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно эндоморфизма этой группы $a_0 \to a_1, \dots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to U_0$.*

Значит, и на соответствующей группе с одним определяющим соотношением существует нетривиальный псевдохарактер. **В главе 3** также рассматриваются некоторые частные случаи групп с одним определяющим соотношением и двумя образующими. Доказательство существования на этих группах нетривиальных псевдохарактеров более просто и не требует использования вполне защищенных фрагментов и других введенных в части 3 понятий.

Получен результат о условиях существования нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. В диссертации приведены два различных доказательства этого. Этот случай рассмотрен полностью.

Теорема 3.6.2. *Пусть группа G - с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Тогда на группе G существуют нетривиальные псевдохарактеры, за исключением следующих случаев: группа G - циклическая; свободная абелева $G =< t, a | ta = at >$; G - метабелева, т.е. имеет представление вида $G =< t, a | tat^{-1} = a^p >$ или $G =< t, a | t^2 = a^2 >$.*

Заметим, что из теоремы следует: нетривиальные псевдохарактеры существуют на всех группах с одним определяющим соотношением, двумя образующими и нетривиальным центром, за исключением бесконечной циклической группы, свободной абелевой группы второго порядка и группы $G =< t, a | t^2 = a^2 >$. Последняя группа с помощью преобразования Тице $a = at$ предсталяется в виде $G =< t, a | tat^{-1} = a^{-1} >$. Метабелевы группы $G =< t, a | tat^{-1} = a^p >$ имеют нетривиальный центр только, если $p = \pm 1$.

Глава 3 имеет следующую структуру: параграф 3.1 посвящен постановке задачи и обоснованию перехода от групп с одним определяющим соотношением к свободным группам и их псевдохарактерам. В параграфе 3.2 вводятся понятия степенных рядов и защищенных фрагментов. Также в этом параграфе рассматривается, как влияет эндоморфизм F_n, заданный сопряжением буквой t, на различные элементы свободной группы. Параграф 3.3 посвящен рассмотрению наборов функций, связанных с произвольным элементом $v \in F_n$, и доказательству различных неравенств для этих функций при наложении определенных условий на v и слова U_0, U_{00}. В параграфе 3.4 подбирается удовлетворяющий всем условиям элемент v, и с его помощью доказывается главная теорема главы 3. Таким образом, в этом параграфе строится искомый нетривиальный псевдохарактер на F_n, инвариантный относительно рассматриваемого эндоморфизма этой группы. В параграфе 3.5 рассматриваются некоторые частные случаи групп с одним определяющим соотношением и двумя образующими. Также в этом параграфе задается нетривиальный псевдохарактер на свободном произведении произвольного числа бесконечных циклических групп и группы, на которой уже существует нетривиальный псевдохарактер. Доказывается, что этот псевдохарактер инвариантен относительно эндоморфизма вышеописанного произведения, в определенном смысле аналогичного эндоморфизму, рассматриваемому на свободных группах F_n. Параграф 3.6 посвящен рассмотрению групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром и полному описанию условий, при которых на них существует нетривиальный псевдохарактер.

Автор искренне благодарит своего научного руководителя, кандидата физико-математических наук, доцента кафедры высшей алгебры А.А. Клячко за постановку задачи, внимательное руководство научной работой и множество полезных идей.

Автор также выражает искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору А.Л. Шмелькину и доктору физико-математических наук, профессору А.Ю. Ольшанскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

Автор признателен заведующему кафедрой высшей алгебры доктору физико-математических наук, профессору В.Н. Латышеву и всем сотрудникам кафедры за поддержку.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] *Каган Д. З.* О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп. Вестник МГУ. 2004, N6, с.24-28

[2] *Каган Д. З.* Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп. Фундаментальная и прикладная математика. 2006, Т.12, выпуск 3, с.55-64.

[3] *Каган Д. З.* Псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением. Деп. в ВИНИТИ N1490-B2006, 29 страниц

[4] *Каган Д. З.* О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп. Тезисы Международной алгебраической конференции. Москва, 2004, с.60-62.