

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.747

Борисюк Антон Романович

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРИИ
НЕЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ НА БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА**

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений

Механико-математического факультета

Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич

Официальные оппоненты: член-корр. РАН,
профессор Трещев Дмитрий Валерьевич;
доктор физико-математических наук,
профессор Гринес Вячеслав Зигмундович

Ведущая организация: Институт Математических Проблем Биологии РАН,
(г. Пущино)

Защита диссертации состоится « 18 » ___мая___ 2007 г. В 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан « 18 » ___апреля___ 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

Т. П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Теория бифуркаций динамических систем описывает качественные, скачкообразные изменения фазовых портретов дифференциальных уравнений при непрерывном, плавном изменении параметров.

Наиболее полно изучены так называемые локальные бифуркации, когда топологические перестройки фазового портрета происходят в малой окрестности особой точки или предельного цикла. Современный этап теории локальных бифуркаций связан с работами В. И. Арнольда и его учеников. Теория нелокальных бифуркаций является более сложной и менее изученной, поскольку при изучении нелокальных бифуркаций необходимо рассматривать перестройки фазового портрета динамической системы в значительной области фазового пространства. Основы теории нелокальных бифуркаций заложены Л. П. Шильниковым и его школой и представлены в монографии: Ильяшенко Ю.С., Ли Вейгу (1999) Нелокальные бифуркации, Москва, МЦНМО ЧЕРО.

В работе изучаются нелокальные бифуркации седло-узлового цикла, гомоклинические траектории которого заполняют поверхность, диффеоморфную бутылке Клейна. Полученные результаты дают полное описание бифуркационного сценария вблизи критического значения параметра. Этот сценарий включает возникновение предельного цикла у которого длина и период неограниченно возрастают при приближении к критическому значению (бифуркация "катастрофа голубого неба"). В целом, описанный сценарий представляет большой интерес для математического моделирования.

Цель работы

Диссертационная работа посвящена изучению глобальных бифуркаций седло-узлового предельного цикла, гомоклинические траектории которого, вместе с самим циклом, образуют бутылку Клейна. Этот фазовый портрет соответствует критическому значению параметра в типичном однопараметрическом семействе. При бифуркации инвариантная поверхность, диффеоморфная бутылке Клейна, сохраняется. Докритическим значениям параметра соответствует система с двумя

гиперболическими циклами на бутылке Клейна, которые при стремлении параметра к критическому значению сливаются и образуют седлоузловой цикл. При переходе параметра в закритическую область седлоузловой цикл исчезает и возникает глобальное отображение Пуанкаре. Мы исследуем бифуркации в закритической области.

Исследование основано на описании глобального отображения Пуанкаре, которое позволяет свести задачу к изучению семейства диффеоморфизмов, меняющих ориентацию окружности:

$$f_a : x \rightarrow -x + a + h_a(x). \quad (1)$$

Здесь x – точка окружности, a – параметр семейства. Цель работы состоит в том, чтобы построить полный бифуркационный сценарий глобальных бифуркаций вблизи критического значения параметра.

Научная новизна

Впервые получено полное описание бифуркационного сценария нелокальных бифуркаций гомоклинических орбит седлоузловой цикла на бутылке Клейна.

При любом значении параметра семейства диффеоморфизмов существуют два предельных цикла на бутылке Клейна, которые мы назовем основными. В работе показано, что при изменении параметра могут происходить бифуркации следующих четырех типов:

- Первый тип: один из основных циклов меняет устойчивость и при этом рождается предельный цикл удвоенного периода.
- Второй тип: возникает пара предельных циклов удвоенного периода (устойчивый и неустойчивый).
- Третий тип: пара циклов удвоенного периода сливается и исчезает.
- Четвертый тип: основной цикл сливается с циклом удвоенного периода, при этом меняется устойчивость основного цикла.

В работе показано как для заданной функции $h_a(x)$ построить соответствующий бифуркационный сценарий. По заданной функции $h_a(x)$ строится специальное разбиение отрезка $[0; 2\pi]$ на подотрезки $\{\omega_k\}$ и на каждом из них определяется несколько морсовских функций окружности, так называемых "функций циклов"

$p_{kj}(x)$. Значения параметра a , равные какому-нибудь критическому значению одной из функций циклов, и только они, являются бифуркационными. Показано, что каждый бифуркационный сценарий однозначно определяется специальной подстановкой, которая строится по множеству критических значений функции циклов.

Кроме того, доказана теорема о реализации, утверждающая, для предписанной последовательности бифуркаций существует функция $h_a(x)$, для которой эта последовательность бифуркаций реализуется в семействе (1). При доказательстве теоремы используется конструкция специального графа, характеризующего разбиение $\{\omega_k\}$. Тем самым в диссертационной работе охарактеризованы все возможные бифуркационные сценарии, которые могут реализоваться при произвольно заданной функции $h_a(x)$.

Исследование нелокальных бифуркаций проводится в два этапа. Сначала рассматривается унимодальная функция $h_a(x)$, и для этого случая изучаются задачи о бифуркационных сценариях. Эти результаты изложены в главе 3 диссертации. В главе 4 рассматривается общий случай, когда функция $h_a(x)$ имеет произвольное количество максимумов и аналогичные задачи решаются для произвольной функции.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории динамических систем (гиперболическая теория, нормальные формы, глобальное отображение Пуанкаре) и нелокальных бифуркаций. Для классификации бифуркационных сценариев использованы методы комбинаторики (updown подстановки, определенные В.И. Арнольдом).

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её методы и результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании теории нелокальных бифуркаций.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, август 2000).
- Шведско-Российской конференции “Комбинаторика, Динамика, Вероятность” (Стокгольм, октябрь 2000).
- Международной конференции “Прогресс в нелинейных науках”, посвященной 100-летию со дня рождения А.А. Андронова (Нижний Новгород, июль 2001).
- Неоднократно на заседаниях научного семинара по динамическим системам (руководители проф. Ю.С.Ильяшенко, А.С.Городецкий) и заседании кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (1999, 2003, 2005).
- Заседании семинара по динамическим системам Корнельского университета (США) под руководством проф. Дж.Гукенхаймера (John Guckenheimer).

Публикации

По результатам диссертации опубликованы две статьи в математических журналах и тезисы двух докладов, представленных на международных конференциях, см. [1-4].

Объём и структура диссертации

Работа изложена на 79 страницах и содержит 12 рисунков. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 24 наименования.

Основное содержание работы

Глава 1 Гомоклиническая бутылка Клейна

Нелокальные бифуркации, изучаемые в данной диссертации, встречаются в типичных однопараметрических семействах, пересекающих границу множества систем Морса-Смейла. В первой главе описано множество систем Морса-Смейла и приведены их основные свойства. Кроме того, приведена формулировка и схема доказательства теоремы о сохранении гомоклинической бутылки Клейна.

Глава 2 Глобальное отображение Пуанкаре

В этой главе излагаются сведения гиперболической теории, необходимые для дальнейшего исследования. Одним из основных инструментов исследования является глобальное отображение Пуанкаре, позволяющее свести задачу к изучению бифуркаций одномерного семейства отображений окружности, меняющих ориентацию. В параграфе 3 этой главы приведена конструкция глобального отображения Пуанкаре для семейства векторных полей на бутылке Клейна. В заключение главы приведены известные результаты по теме исследования данной диссертации.

Глава 3 Бифуркационный сценарий для случая унимодальной функции отображения Пуанкаре

Третья глава посвящена построению бифуркационного сценария в случае, когда отображение Пуанкаре задается унимодальной функцией. Также проведена классификация бифуркационных сценариев, показывающая, какие из них могут быть реализованы в унимодальном случае.

Рассмотрим частный случай отображения (1), когда семейство функций $h_a(x)$ не зависит от параметра a .

$$f_a : x \rightarrow -x + a + h(x); \quad h' < 1. \quad (2)$$

В этой главе сначала решена задача для семейства (2), а затем показано, что результаты остаются верными и в случае семейства (1).

Для описания бифуркационного сценария надо задать все пары точек (x, a) , где x - точка 2-цикла семейства $f_a : x \rightarrow -x + a + h(x)$ при значении параметра a . Как будет показано ниже, эти точки (и только они) принадлежат графику функции циклов $a = p(x) = x + i(x) - h(x)$. Функция i задается следующим определением.

Определение. Зависимость $i(x)$ называется инволюцией отрезка $[0; 2\pi]$ порожденной унимодальной функцией $h(x)$, если i задается равенством $h(i(x)) = h(x)$.

Замечание. Определение корректно, то есть $i(x)$ - функция, $i(i(x)) = x$.

Предположение типичности функции h : Функция циклов P - морсовская на интервале $(-\delta; \delta + x_1)$, где x_1 - точка максимума функции h , $\delta > 0$ - достаточно малая величина.

По определению, $p(i(x)) = p(x)$. Следовательно, неподвижные точки инволюции i (они же критические точки функции h) являются критическими точками функции циклов. Критические точки функции циклов разбиваются на пары $(x_k; i(x_k))$, соответствующие одинаковым критическим значениям. Исключения составляют критические точки, совпадающие с неподвижными точками отображения f_a , то есть критические точки функции h .

Теорема. (Теорема 6 в тексте диссертации) В семействе $f_a(x) = -x + a + h(x)$ с унимодальной функцией h , удовлетворяющей требованиям типичности, происходят следующие бифуркации:

- 1) При прохождении параметра a через локальный минимум функции циклов P , не соответствующий критической точке функции h , происходит рождение двух периодических орбит периода 2: одна устойчивая, другая неустойчивая (рождение и расщепление седлоузловой периодической орбиты).
- 2) При прохождении параметра a через локальный максимум функции циклов P , не соответствующий критической точке функции h , исчезают две периодические орбиты периода 2: одна устойчивая, другая неустойчивая.
- 3) При прохождении параметра через локальный минимум функции циклов, соответствующий критическому значению функции h , происходит бифуркация удвоения периода: неподвижная точка отображения f_a теряет устойчивость, при этом рождается устойчивая периодическая орбита периода 2.
- 4) При прохождении параметра через локальный максимум функции циклов, соответствующий критическому значению функции h , происходит бифуркация, обратная к бифуркации удвоения периода: неподвижная точка отображения f_a становится устойчивой, при этом исчезает устойчивая периодическая орбита периода 2.

Результаты классификации бифуркационных сценариев в случае унимодальной функции сформулированы в следующих ниже двух теоремах.

Предложение. Поворотом окружности на угол и линейной заменой параметра a семейство диффеоморфизмов окружности (2) с унимодальной функцией h можно преобразовать в семейство аналогичного вида, в котором функция h имеет минимум в точке 0 , причем $h(0) = 0$; $h'(0) = 0 < h''(0)$. (3)

Без ограничения общности можно считать, что точка максимума функции h (обозначим ее x_1) не больше π , так как иначе мы можем сменить ориентацию окружности.

Лемма. Пусть $p(x)$ функция циклов семейства $f_a(x)$, x_1 - точка максимума функции h , причем $x_1 \leq \pi$. Тогда $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям (*):

1) $p(0) = 2\pi$; $x_1 < p(x_1) < 2x_1$; 2) $p'(0) = p'(x_1) = 0$; $p'(x) < 1$ при $x \in (0; x_1)$;

3) Пусть $p'_-(x) = \begin{cases} p'(x), p'(x) < 0 \\ 0, p'(x) \geq 0 \end{cases}$, $x \in [0; x_1]$; и $A_- = \left| \int_0^{x_1} p'_-(x) dx \right|$. Тогда

$A_- \leq 2\pi - x_1$.

Теорема. (Теорема 7 в тексте диссертации) Любая функция $p(x)$, $x \in [0; x_1]$, удовлетворяющая (*) на отрезке $[0; x_1]$, продолжается на $[0; 2\pi]$ как функция циклов некоторого семейства f_a .

Определение. Пусть f - морсовская функция, $x^1 < x^2 < \dots < x^n$ критические точки этой функции. Упорядочим критические значения $f(x^1), \dots, f(x^n)$ по возрастанию $y_1 < \dots < y_n$. Подстановку σ_n назовем характеристической подстановкой морсовской функции f , если $\sigma_n(i) = j$; $y_j = f(x^i)$.

Определение. (В.И. Арнольд) Updown подстановка - это подстановка, у которой каждый элемент либо меньше двух соседних, либо больше двух соседних.

Теорема. (Теорема 8 в тексте диссертации) А. Рассмотрим два семейства диффеоморфизмов окружности вида (2). Бифуркационные сценарии данных семейств эквивалентны тогда и только тогда, когда характеристические подстановки функций циклов этих семейств совпадают. Б. Любая updown

подстановка реализуется как характеристическая подстановка функции циклов для некоторого семейства (2) с унимодальной функцией h .

Случай добавочной функции, зависящей от параметра

В тексте диссертации (Глава 3, Теорема 10) доказано, что если рассматривать семейство диффеоморфизмов $\tilde{f}_a: x \rightarrow -x + a + h_a(x), h'_a(x) < 1$ и семейство $f_a: x \rightarrow -x + a + h(x), h'(x) < 1$, с функцией h , предельной для семейства функций h_a при $a \rightarrow \infty$, то бифуркационные сценарии этих семейств одинаковы, то есть последовательности бифуркаций совпадают при возрастании параметра a от $x_1(a) + 2\pi k$ до $x_1(a) + 2\pi(k+1)$ при больших k , где $x_1(a)$ - точка максимума функции $h_a(x)$.

Глава 4 Бифуркационный сценарий для общего случая

В этой главе приводятся теоремы и их доказательства, представляющие основные результаты исследования бифуркаций в общем случае. Рассматривается случай общего семейства меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности (глобальное отображение Пуанкаре). Результаты предыдущей главы, полученные для унимодальной функции в отображении Пуанкаре, переносятся на случай произвольной функции, для которой получено полное описание бифуркационного сценария.

Как и прежде, рассматривается глобальное отображение Пуанкаре, преобразованное к виду:

$$\tilde{f}_a: x \rightarrow -x + a + h_a(x),$$

(4)

где $x \in S^1$, а семейство функций h_a сходится к некоторой функции h_0 при $a \rightarrow \infty$ в норме пространства C^3 . Отображение (4) - диффеоморфизм если и только если

$$h'_a(x) < 1$$

(5)

Поставленная задача сначала будет решена для частного случая глобального отображения Пуанкаре, когда $h_a \equiv h$:

$$f_a: x \rightarrow -x + a + h(x),$$

(6)

а затем показано, что результаты остаются верными и в случае семейства (4).

Сформулируем требования общности положения на рассматриваемые функции h_a .

1. При любом фиксированном значении параметра a , функция h_a 2π -периодическая.
2. При любом фиксированном значении параметра a , функция h_a морсовская с $n+1$ экстремумом на своём периоде $[0; 2\pi)$, где n - нечётное число.

Покажем, что семейство функций h_a может быть нормировано. Далее все рассуждения проводятся для нормированного семейства.

Предложение. Рассмотрим семейство диффеоморфизмов окружности (4) с функциями h_a , стремящимися к функции h по норме пространства C^3 при $a \rightarrow \infty$. Тогда поворотом окружности на угол $\xi(a)$, стремящийся к пределу при $a \rightarrow \infty$, и заменой параметра a семейство (4) можно преобразовать в семейство аналогичного вида с функциями h_a , удовлетворяющими следующим условиям: $h_a(0) = h_a(2\pi) = 0$; $h'_a(0) = h'_a(2\pi) = 0$; $h_a(x) > 0$ при $x \in (0; 2\pi)$.

Для того, чтобы сформулировать последние два требования, введём ряд определений.

Определение. Рассмотрим функцию h , удовлетворяющую условию (5), требованиям типичности 1 - 2 и условиям нормировки. Определим разбиение $\Omega = \{\omega_i\}$ отрезка $[0; 2\pi]$, порожденное функцией h , так, что точки разбиения являются прообразами критических значений функции h .

Данное определение проиллюстрировано на рисунке 1. Изображенная там функция h будет использована ниже для иллюстрации основных утверждений.

Предложение. Число отрезков разбиения Ω , порожденного нормированной функцией h с n экстремумами на интервале $(0; 2\pi)$ (n -нечётно), может принимать любое значение из множества

$$A(n) = \left\{ 3n - 1 + 4k \mid k = 0, 1, \dots, \frac{(n-1)(n-3)}{8} \right\}.$$

Определение. Два отрезка разбиения Ω называются эквивалентными, если их h -образы совпадают.

Это определение задаёт отношение эквивалентности, и, следовательно, разбиает множество отрезков разбиения Ω на классы эквивалентности.

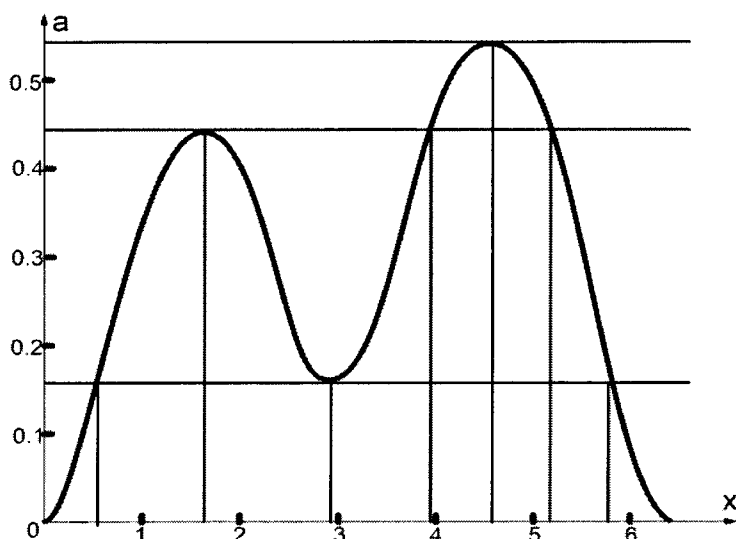


Рис. 1: Пример добавочной функции h

Определение. Базисным отрезком в классе эквивалентности отрезков разбиения назовём левый (с наименьшими координатами концов) отрезок данного класса.

Определение. Любым двум эквивалентным отрезкам разбиения ω_k и ω_j поставим в соответствие функции i_{kj} и i_{jk} по следующему правилу: $i_{kj}: \omega_k \rightarrow \omega_j$ так, что $h(x) = h(i_{kj}(x))$, функция i_{jk} строится аналогично на отрезке ω_j . Функции i_{kj} для всех возможных номеров k, j назовем инволютивными функциями.

Определение мотивировано тем, что $\omega_k \xrightarrow{i_{kj}} \omega_j \xrightarrow{i_{jk}} \omega_k$, причём $i_{jk}(i_{kj}(x)) = x, x \in \omega_k$.

Определение. Функции $p_{kj}(x)$, принадлежащие набору $\{a = p_{kj}(x) = x + i_{kj}(x) - h(x), x \in \omega_k\}$ называются функциями циклов семейства (б).

Теперь мы можем сформулировать условия типичности, которые накладываются на функцию h , задающую семейство (6) (в дополнение к сформулированным выше предположениям 1-2, предполагаемым выполненными).

3. Функция циклов $p_{kj}(x)$, $x \in \omega_k$, для любых k и j является морсовской.

4. Любые две функции циклов $p_{k_1k_2}; p_{k_3k_4}$ (за исключением случая, когда $k_1 = k_4; k_2 = k_3$) не имеют одинаковых критических значений.

Бифуркационный сценарий

Для описания полного бифуркационного сценария надо задать все пары точек (x, a) , где x - точка 2-цикла семейства $f_a: x \rightarrow -x + a + h(x)$ при значении параметра a . Мы предполагаем, что функция h нормированная и удовлетворяет требованиям типичности 1-4.

Предложение. Рассмотрим семейство (6) и разбиение отрезка $[0; 2\pi]$, порождённое функцией h . Пусть $\{i_{kj}\}$ - набор инволютивных функций, где номера (k, j) пробегают номера всех пар эквивалентных отрезков. Рассмотрим набор функций $\{a = p_{kj}(x) = x + i_{kj}(x) - h(x), x \in \omega_k\}$. Множество точек (x, a) , принадлежащих графикам функций набора $\{p_{kj}\}$, совпадает с множеством пар (x, a) , где x - точка 2-цикла семейства f_a .

Теорема. (Теорема 10 в тексте диссертации) В семействе (6) с функцией h , удовлетворяющей требованиям типичности, с возрастанием параметра a происходят следующие бифуркации (Рис. 2).

1) При прохождении параметра через локальный минимум (максимум) одной из функций циклов набора p_{kj} , не соответствующий критическому значению функции h , происходит рождение (исчезновение) двух периодических орбит периода 2: одной устойчивой и одной неустойчивой.

2) При значениях параметра равных $a_j = 2x_j - h(x_j)$, где x_j - точка локального экстремума функции h , происходит бифуркация удвоения периода (при прохождении параметра через локальный минимум одной из функций циклов) или обратная к бифуркации удвоения периода (при прохождении через локальный максимум).

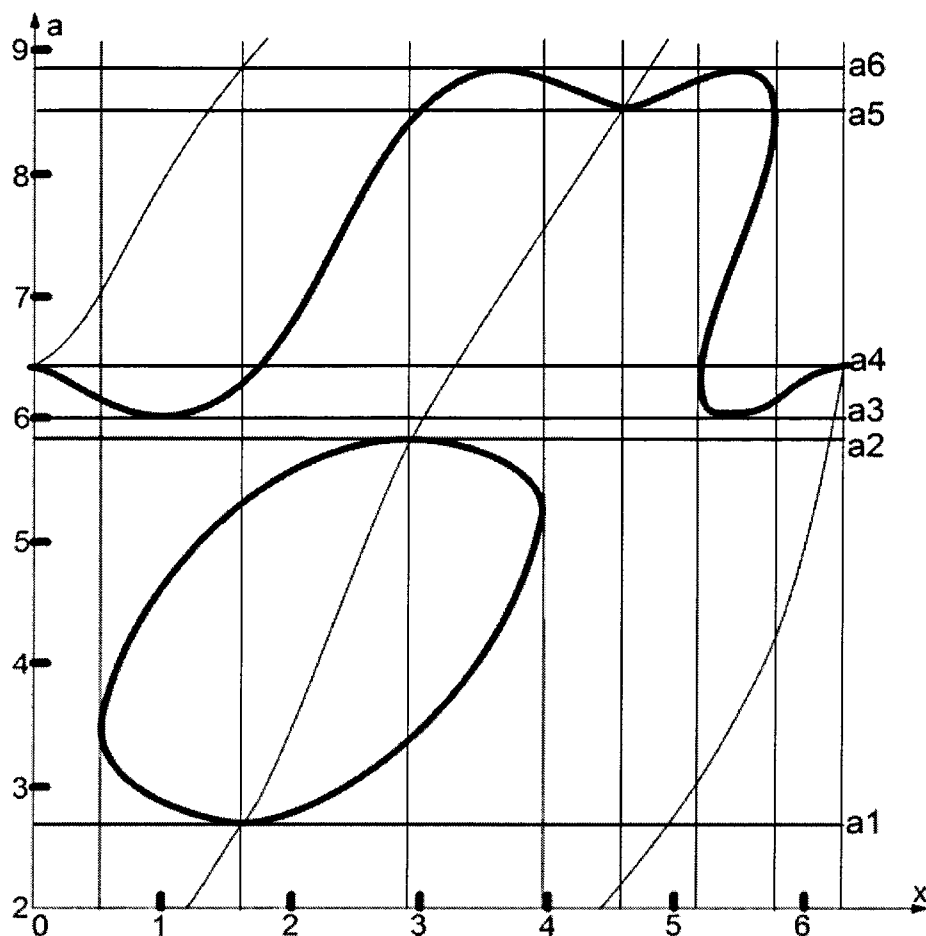


Рис. 2: Функции циклов и бифуркационный сценарий

Пояснения к рисунку 2

Ось абсцисс разделена на отрезки разбиения Ω , как это было показано ранее на рисунке 1. На каждом отрезке разбиения определены функции циклов. Опишем картину при фиксированных значениях параметра a .

1. Значение параметра $a = "a_0"$ (см. рис. 2) Как сказано выше, система имеет ровно две неподвижные точки при каждом значении параметра. Линия $a = "a_0"$ пересекает линии, соответствующие линиям неподвижных точек, и не пересекает функции циклов, а следовательно, система не имеет циклов периода два при этом значении параметра.

2. $a = "a_1"$ При этом значении параметра левая неподвижная точка меняет устойчивость и рождается цикл периода два (Случай 2 в Теореме).

3. Значение параметра $a = "a_2"$ Неподвижная точка меняет свою устойчивость, сливаясь с циклом периода два.

4. $a = a^3$ Это значение параметра является бифуркационным, т.е. происходит рождение двух циклов периода два (Случай 1 в Теореме).
5. Значение параметра $a = a^4$ Неподвижная точка меняет свою устойчивость, сливаясь с циклом периода два.
6. $a = a^5$ При этом значении параметра левая неподвижная точка меняет устойчивость и рождается цикл периода два (Случай 2 в Теореме).
7. Значение параметра $a = a^6$ Устойчивый и неустойчивый циклы периода два сливаются и исчезают.

Предложение. Зафиксируем отрезок разбиения ω_l . Пусть p_{l_1}, \dots, p_{l_m} функции циклов, определенные на ω_l . Тогда $\max_{j=1 \dots l_m} \max_{x \in \omega_l} p_{lj}(x) - \min_{j=1 \dots l_m} \min_{x \in \omega_l} p_{lj}(x) < 2\pi$

Реализуемость бифуркационных сценариев

Из предыдущей теоремы следует, что бифуркационный сценарий полностью задаётся набором функций циклов $\{p_{kj}\}$. Покажем, что для того, чтобы задать набор $\{p_{kj}\}$, достаточно задать функции циклов на базисных отрезках.

Определение. Характеристический граф - ориентированный граф на нумерованных вершинах, удовлетворяющий следующим свойствам.

Существует нормированная функция h , удовлетворяющая условиям типичности, и соответствующее ей разбиение Ω , такие, что можно установить взаимно однозначное соответствие между вершинами графа и отрезками разбиения Ω ; каждая вершина, соответствующая базисному отрезку (такие вершины будем называть базисными), соединена направленными рёбрами со всеми вершинами, которые соответствуют отрезкам того же класса эквивалентности.

Определение. Ориентированный граф на нумерованных вершинах называется квазихарактеристическим порядка n , если он удовлетворяет следующим условиям. Вершины бывают двух типов:

- из вершины выходит нечётное число рёбер в вершины со старшими номерами;
- в вершину входит ровно одно ребро.

Количество вершин первого типа (они называются базисными) равно n , а общее число вершин принадлежит множеству $A(n)$ (см. выше Предложение о числе отрезков разбиения Ω , порожденного функцией h с n экстремумами).

Заметим, что характеристический граф функции h является квазихарактеристическим порядка n , где n - число экстремумов нормированной функции h на интервале $(0; 2\pi)$.

Предложение. Пусть задан характеристический граф функции h , удовлетворяющей требованиям типичности. Тогда ирdown подстановка функции h однозначно восстанавливается по графу.

Теорема. (Теорема 11 в тексте диссертации) Существует алгоритм, который определяет, является ли квазихарактеристический граф характеристическим.

Характеристический граф функции h однозначно задаёт нумерацию функций циклов семейства (6), порождённых данной функцией h и определённых на базисных отрезках. А именно, ребру графа, соединяющему вершины k и j , соответствует функция циклов P_{kj} на базисном отрезке ω_k . Следующее предложение описывает свойства функций циклов P_{kj} на базисных отрезках.

Предложение. Рассмотрим базисный отрезок ω_k и функции циклов $P_{kk_1} \cdots P_{kk_m}$, определённые на этом отрезке. Функции циклов P_{kk_1} удовлетворяют следующим условиям.

1. Пусть $\omega_k \leq \omega_{k_1} \leq \dots \leq \omega_{k_m}$ - класс эквивалентных отрезков, тогда для любого $x \in \omega_k$: $P_{kk_1}(x) \leq P_{kk_2}(x) \leq \dots \leq P_{kk_m}(x)$, причём равенство может быть только в граничных точках отрезка ω_k .

2. Если $j = k_1, k_3, \dots, k_m$, то для любого $x \in \omega_k$ выполнено $P_{kj}'(x) < 1$.

Если $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$, то для любого $x \in \omega_k$ выполнено $P_{kj}'(x) > 0$.

3. Если $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$, то для любого $x \in \omega_k$

$$P_{kj}'(x) > \max_{l=k_1, k_3, \dots, k_m} P_{kl}'(x) \quad (7)$$

4. Существуют такие числа $a_k, 0 < a_k < x_k$, что в граничных точках базисного отрезка выполнены следующие равенства

$$\begin{aligned}
p_{kk_1}(x_{k-1}) - x_{k_1} &= p_{k k_2}(x_{k-1}) - x_{k_2-1} = \dots = p_{kk_{m-1}}(x_{k-1}) - x_{k_{m-1}-1} = \\
&= p_{kk_m}(x_{k-1}) - x_{k_m} = x_{k-1} - a_{k-1}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
p_{kk_1}(x_k) - x_{k_1-1} &= p_{kk_2}(x_k) - x_{k_2} = \dots = p_{kk_{m-1}}(x_k) - x_{k_{m-1}} = \\
&= p_{kk_m}(x_k) - x_{k_m-1} = x_k - a_k
\end{aligned} \tag{9}$$

Следующая теорема о реализации показывает, что любой набор функций, удовлетворяющий условиям Предложения, реализуется как набор функций циклов для некоторого h .

Теорема. (Теорема 12 в тексте диссертации) *Зафиксируем характеристический граф. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[0; 2\pi]$ такое, что количество отрезков разбиения равно числу вершин графа. Пусть отрезок разбиения ω_k соответствует базисной вершине. На ω_k заданы функции p_{kj} , где j пробегает номера всех вершин графа, в которые ведут ребра из k -ой вершины. Пусть, кроме того, функции p_{kj} удовлетворяют ограничениям, наложенным на функции циклов (см. предыдущее Предложение). Тогда существует морсовская функция h , удовлетворяющая требованиям типичности, такая, что набор функций циклов соответствующего семейства (6) совпадает с заданным набором функций p_{kj} .*

Теперь остаётся заметить, что последние две теоремы решают проблему реализации бифуркационных сценариев в семействах вида (6).

Обобщение результатов на случай добавочной функции, зависящей от параметра

Для рассмотрения случая добавочной функции h_a , зависящей от параметра, в тексте диссертации вводится понятие эквивалентности бифуркационных сценариев для семейств вида (6). Далее показано, что разбиение Ω определено таким образом, что на двух фиксированных эквивалентных отрезках разбиения задача описания циклов периода два сводится к унимодальному случаю. Итоговой является Теорема 13.

Теорема. (Теорема 13 в тексте диссертации) Рассмотрим семейство диффеоморфизмов $\tilde{f}_a : x \rightarrow -x + a + h_a(x)$, где семейство функций h_a сходится к функции h по норме C^3 при $a \rightarrow \infty$, и семейство $f_a : x \rightarrow -x + a + h(x)$. Тогда при значениях параметра $a \in [2\pi t; 2\pi(t+1)]$ семейство \tilde{f}_a , начиная с некоторого достаточно большого t , имеет бифуркационный сценарий, эквивалентный бифуркационному сценарию семейства f_a при $a \in [0; 2\pi]$.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи, ценные советы, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Список работ автора по теме диссертации

- [1] Борисюк А. Р. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Унимодальный случай. Математические заметки, 2002, 71, 3, 348-363.
- [2] Борисюк А. Р. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Общий случай. Математический сборник, 2005, 196, 465-483.
- [3] Borisjuk A. Global bifurcations on the Klein bottle. Unimodal case. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. 2000. 18-21
- [4] Borisjuk A. Bifurcation scenario on the homoclinic Klein bottle. International conference dedicated to the 100 anniversary of A. A. Andronov. Nizhniy Novgorod. 2001. 31-32.