МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.716

Дудакова Ольга Сергеевна

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетики

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Угольников.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. Б. Алексеев; кандидат физико-математических наук, доцент В. А. Стеценко.
Ведущая организация:	Казанский государственный университет.

Защита диссертации состоится 18 мая 2007 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Данная работа относится к теории функциональных систем. В ней изучаются свойства замкнутых классов функций многозначной логики. Рассматривается задача о конечной порожденности предполных классов монотонных функций.

В теории функций многозначной логики важное место занимают задачи классификационного характера. Одной из наиболее естественных и хорошо изученных классификаций является разбиение множества P_k всех функций k-значной логики на классы, замкнутые относительно операции суперпозиции. Все замкнутые классы функций двузначной логики были описаны Э. Постом[1], который показал, что число таких классов счетно.

Несмотря на то, что многозначные логики во многом похожи на двузначную, имеют место и принципиальные различия. К их числу относится пример континуального семейства замкнутых классов в P_k при $k \geq 3$, приведенный в работе Ю. И. Янова и А. А. Мучника[2]. Континуальность семейства всех замкнутых классов P_k при $k \geq 3$ приводит к значительным трудностям при их изучении. К настоящему времени изучены только некоторые семейства замкнутых классов в P_k. К числу таких семейств относятся предполные классы функций. Из теоремы А. В. Кузнецова[3] следует, что при любом $k \geq 2$ в P_k существует конечное число предполных классов. При $k = 3$ описание всех предполных классов было получено С. В. Яблонским[4]. Отдельные семейства предполных в P_k классов при $k \geq 4$ были найдены С. В. Яблонским, В. В. Мартынюком, Ло Чжу-Каем и другими исследователями. Полное описание предполных классов в P_k было получено И. Розенбергом[5], который выделил шесть семейств

---

[1] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43, №3. P. 163 – 185.

Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. 1941. 5.

[2] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. 127. №1. С. 44-46.

[3] *Кузнецов А. В.* О проблемых тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР. 1956. С. 145 – 146.

[4] *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. 1954. Т. 95 №6. С. 1152 – 1156.

[5] *Rosenberg I. G.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. CSAV. MPV. 1970. 80. P. 3–93.

предполных классов[6]: классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$, классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$, классы функций, сохраняющих разбиения множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — классы типа $\mathbb{E}$, классы функций, сохраняющих центральные отношения — классы типа $\mathbb{C}$, классы функций, сохраняющих сильно голоморфные прообразы h-адических элементарных отношений — классы типа $\mathbb{B}$, и классы функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами — классы типа $\mathbb{O}$.

Одной из наиболее важных проблем, связанных с семействами замкнутых классов функций многозначной логики, является задача о конечной порожденности, то есть задача о выразимости всех функций из замкнутого класса формулами над некоторым конечным множеством функций, принадлежащих этому же классу. Из результатов Поста следует, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис. В многозначных логиках этот результат не имеет места: для любого $k \geq 3$ в P_k существуют замкнутые классы как со счетным базисом, так и не имеющие базиса. К настоящему времени отсутствует полное описание всех конечно-порожденных классов функций многозначной логики даже для семейства предполных классов. Д. Лау[7] показала, что любой предполный класс в P_k из семейств $\mathbb{P}, \mathbb{L}, \mathbb{E}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{B}$ порождается конечным числом функций. Для предполных классов всех функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств (классов из семейства $\mathbb{O}$) этот результат верен, вообще говоря, лишь при $k \leq 7$. Г. Тардошем[8] приведен пример такого частично упорядоченного множества из восьми элементов, что предполный класс всех функций, монотонных на этом множестве, не имеет конечного базиса.

К настоящему времени получен ряд достаточных условий конечной порожденности предполных классов монотонных функций. В частности, из интерполяционной теремы К. Бейкера и А. Пиксли[9] следует, что если в замкнутом классе содержится мажоритарная функция, то класс является конечно-порожденным. В работе Я. Деметровича, Л. Ханнака и Л. Ро-

[6] В диссертации используются обозначения из книги *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А.* Предполные классы в многозначных логиках. М.: Изд-во МЭИ, 1997. 142 с.

[7] *Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Z. math Log. und Grundl. Math. 1978. 24. P. 79–96.

Lau D. Über partielle Funktionenalgebren // Rostok. math. Kolloq. 1988. 33. P. 23–48.

[8] *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. 3. P. 211–218.

[9] *Baker K., Pixley A.* Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z. 1975. 143. P. 165–174.

няи[10] приводится следующее условие: предполный класс всех функций, монотонных на частично упорядоченном множестве $\mathcal{P}$, имеет конечный базис, если множество $\mathcal{P}$ представляется в виде $\mathcal{L} \setminus \mathcal{K}$, где $\mathcal{L}$ — решетка, а $\mathcal{K}$ — выпуклое подмножество $\mathcal{L}$, не содержащее наименьшего и наибольшего элементов $\mathcal{L}$ (отсюда, например, следует конечная порожденность классов функций, монотонных относительно решеток и линейно упорядоченных множеств). Этими же авторами показано[11], что условие представимости множества $\mathcal{P}$ в виде $\mathcal{L} \setminus \mathcal{K}$ эквивалентно отсутствию в множестве $\mathcal{P}$ четверки элементов a, b, c, d, таких, что $a, b < c$, элементы a и b не имеют точной верхней грани и элементы c и d не имеют точной верхней грани. Доказательство конечной порожденности класса монотонных функций, приведенное в этих работах, опирается на существование в классе мажоритарных функций. Отметим, что условие существования мажоритарных функций в классе не является необходимым для конечной порожденности этого класса даже для замкнутых классов булевых функций. Примеры частично упорядоченных множеств, таких что классы всех функций, монотонных относительно этих множеств, являются конечно-порожденными, но не содержат мажоритарных функций, приведены в работе Я. Деметровича и Л. Роняи[12], однако эти классы не являются предполными.

Цель работы

В диссертации исследуются предполные классы функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики, методы теории функциональных систем, в частности, критерии выразимости и представления функций над конечными системами в P_k.

[10] *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* Near unanimity functions and partial orderings // Proc. 14 ISMVL, Manitoba. 1984. P. 52–56.

[11] *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* On algebraic properties of monotone clones // Order. 1986. 3. P. 219–225.

[12] *Demetrovocs J., Rónyai L.* Algebraic properties of crowns and fences // Preprint, MTA SZTAKI. 1. 88.

Научная новизна

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Получены достаточные условия конечной порожденности предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два.

2. Найдено семейство частично упорядоченных множеств ширины два, таких, что предполные классы функций, монотонных относительно множеств из этого семейства, не имеют конечного базиса.

3. Получены критерии конечной порожденности предполных классов функций, монотонных относительно произвольных частично упорядоченных множеств ширины два, как в терминах свойств множеств, так и и в терминах существования в этих классах мажоритарных функций.

4. Установлена алгоритмическая разрешимость задачи распознавания конечной порожденности предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории функциональных систем и в теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре "Функции многозначной логики и смежные вопросы" под руководством профессоров С. Б. Гашкова и А. Б. Угольникова (2005, 2006 гг.), на семинаре "Синтез и сложность управляющих систем" под руководством академика РАН О. Б. Лупанова (2006 г.), на семинаре "Математические вопросы кибернетики" под руководством профессора О. М. Касим-Заде (2007 г.), на VII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Покровское, март 2006 г.), на XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (апрель

2006 г.), на научной конференции "Ломоносовские чтения" (Москва, МГУ, апрель 2006 г.) на XVI Международной школе-семинаре "Синтез и сложность управляющих систем" (Санкт-Петербург, июнь 2006 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 107 страниц, список литературы содержит 48 наименований.

Содержание работы

Во **введении** содержится обзор результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов диссертации.

В **первой главе** приводятся основные определения, доказывается ряд свойств частично упорядоченных множеств специального вида, а также некоторые свойства монотонных функций и отображений. В частности, определяются понятия ширины частично упорядоченного множества, минимальной верхней грани, точной верхней грани и точной верхней грани второго порядка пары элементов. *Шириной* частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ называется максимальное число попарно несравнимых элементов этого множества. Семейство всех частично упорядоченных множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами обозначается через $\mathbb{A}_2$. Пусть a и b — несравнимые элементы множества $\mathcal{P}$. Элемент c называется *верхней гранью* элементов a и b, если выполняется неравенство $c > a, b$. Верхняя грань c элементов a и b называется *минимальной верхней гранью* этих элементов a и b, если ни для какого x не выполняются неравенства $a, b < x < c$. Минимальная верхняя грань c элементов a и b называется *точной верхней гранью* этих элементов, если для любой верхней грани x элементов a и b выполняется неравенство $x \geq c$. Элемент e называется *точной верхней гранью второго порядка* элементов a и b, если элементы a и b имеют две минимальные верхние грани c и d, и e является точной верхней гранью элементов c и d. Точная верхняя грань и точная верхняя грань второго порядка элементов a и b обозначаются через $\sup(a,b)$ и $\sup^2(a,b)$ соответственно.

Во **второй главе** устанавливается достаточное условие существования конечного базиса в классе $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ всех функций, монотонных относительно некоторого частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. Рассматривается семейство $\mathbb{A}_2^{(1)}$, состоящее из всех таких множеств $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$, что для любой пары несравнимых элементов a и b в $\mathcal{P}$ существует либо $\sup(a,b)$, либо $\sup^2(a,b)$. В параграфе 2.1 устанавливается ряд соотношений для элементов произвольного множества $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$. В параграфе 2.2 определяются операторы ϕ и ψ специального вида, и доказывается ряд свойств этих операторов. В параграфе 2.3 рассматриваются отображения $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$, где $\mathcal{Q}'$ — некоторое подмножество произвольного частично упорядоченного множества $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{P}$ — произвольное множество из семейства $\mathbb{A}_2^{(1)}$, и с помощью операторов ϕ и ψ, определенных в предыдущем параграфе, задается доопределение отображения f' на множество $\mathcal{Q}'$. Основным результатом параграфа 2.3 является теорема о необходимых и достаточных условиях существования монотонного доопределения отображения $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ на множество $\mathcal{Q}$ (теорема 2.3.1). В параграфе 2.4 на основе полученного критерия существования монотонного доопределения не всюду определенного отображения доказана теорема (теорема 2.4.1) о существовании в классе $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$, некоторой мажоритарной функции, число переменных которой зависит только от мощности множества $\mathcal{P}$. Из этого результата с помощью теоремы Бейкера и Пиксли получено утверждение о конечной порожденности класса $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ для любого множества $\mathcal{P}$ из семейства $\mathbb{A}_2^{(1)}$ (теорема 2.4.2).

В **третьей главе** доказывается критерий конечной порожденности класса всех функций, монотонных относительно множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. В параграфе 3.1 приводится семейство $\mathbb{A}_2^{(2)}$ частично упорядоченных множеств ширины два, которым соответствуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса. Основной результат параграфа 3.1 сформулирован в теореме 3.1.1. Для доказательства используется предложенный в диссертации метод, который является обобщением метода Тардоша[13] на случай множеств произвольной мощности. Рассматривается некоторое множе-

[13] *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. 3. P. 211–218.

ство $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2^{(2)}$, для каждого значения $n \geq 4$ строится множество $\mathcal{R}_{\mathcal{P},n}$ наборов элементов множества $\mathcal{P}$ и устанавливается ряд свойств наборов из этого множества. С помощью этих свойств показывается, что при всех значениях $k < \frac{n}{2}$ множество $\mathcal{R}_{\mathcal{P},n}$ сохраняется всеми функциями из класса $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, зависящими от k переменных. Далее, показывается, что существует функция $f(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, которая не сохраняет множество $\mathcal{R}_{\mathcal{P},n}$. В параграфе 3.2 на основе результатов предыдущего параграфа и главы 2 приводится критерий конечной порожденности класса $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ — произвольное частично упорядоченное множество ширины два с наименьшим и наибольшим элементами (теорема 3.2.1). На основе теоремы 3.2.1 получен критерий конечной порожденности классов монотонных функций в терминах существования в этих классах мажоритарных функций (теорема 3.2.2). Кроме того, из теоремы 3.2.1 следует существование полиномиального алгоритма для распознавания конечной порожденности соответствующих классов монотонных функций (теорема 3.2.3).

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору А. Б. Угольникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также всем сотрудникам кафедры дискретной математики механико-математического факультета за доброжелательное отношение.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Дудакова О. С.* Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2006. №2. С. 29–33.

2. *Дудакова О. С.* О свойствах предполных классов монотонных функций k-значной логики // Труды VII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"(Покровское, 4–6 марта 2006 г.). М.: МАКС Пресс. 2006. С. 107–113.

3. *Дудакова О. С.* Семейства предполных классов монотонных функций в P_k, не имеющих конечного базиса // Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета

МГУ (10–15 апреля 2006 г.). М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. факультете МГУ. 2006. С. 55–59.

4. *Дудакова О. С.* О конечной порожденности некоторых семейств предполных классов монотонных функций k-значной логики // Материалы XVI Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем"(Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). М.: Изд-во мех.-матем. факультета МГУ. 2006. С. 35–37.