Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 531.3+521.1

Васкез Бесерра Хуан Антонио

Исследование интегрируемого приближения задачи о движении точки в гравитационном поле твёрдого тела

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2007 г.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор А.А.Кочиев,
доктор физико-математических наук, профессор Я.В.Татаринов.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор С. Г. Журавлев,
кандидат физико-математических наук Р.М. Бебенин

Ведущая организация:

Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына

Защита состоится «30» мая 2007 года в 16.00
на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 по механике
при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова
по адресу:
119992, г. Москва, Ленинские горы, МГУ,
Механико-математический факультет, аудитория 16-1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «____» ____________ 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
кандидат физико-математических наук, доцент, В.А.Прошкин.

Актуальность темы. Среди многочисленных проблем теоретической и небесной механики, а также звездной динамики особое место занимает задача отыскания решений систем дифференциальных уравнений, описывающих движение исследуемых объектов при использований различных моделей гравитационных полей.

Как правило, аналитические решения таких систем не удается найти, и поэтому на повестку дня встает вопрос выбора таких моделей, которые при сохранении основных свойств рассматриваемой динамической системы, допускали бы, тем не менее, существование некоторых первых интегралов или даже интегрирование в квадратурах соответствующих дифференциальных уравнений. Поиск и исследование таких, так называемых интегрируемых приближений, будет вестись всегда и всегда будут актуальны.

Сказанное относится и к задаче о движении материальной точки в гравитационном поле неподвижного абсолютно твердого тела. Это одна из основных задач небесной механики, она стала особенно востребованной после запуска первого советского искусственного спутника Земли в 1957 г. Интегрируемые небесной, механики описаны в монографиях В.Г.Демина, В.В.Белецкого, а также недавно изданной монографии А.М.Переломова. Отметим, однако, что рассматриваемого в диссертации нового потенциала (предложен А.А.Кочиевым) нет среди них. Это определяет актуальность диссертации.

Цель работы. Сравнение рассматриваемого потенциала с другими, выявление стационарных движений и установление их устойчивости по Ляпунову, качественный анализ областей возможности движения в зависимости от констант первых интегралов.

Научная новизна. Результаты являются новыми. Изучен новый приближенный потенциал для гравитационного поля твердого тела, являющийся некоторым аналогом потенциала задачи двух неподвижных центров. Установлена его связь с потенциалом поля тяготения твёрдого тела и однородного кольца Гаусса. Уравнения движения сведены к квадратурам задачи методом Якоби. Выявлен класс стационарных (круговых) движений и установлена их устойчивость или неустойчивость по Ляпунову. Проведен качественный анализ областей возможности движения.

Теоретическая и практическая ценность результатов работы. Дана методика интегрирования «в квадратурах» уравнений движения материальной точки в гравитационном поле твердого тела, потенциал которого аппроксимируется потенциалом некоторого аналога задачи двух неподвижных центров. В полученных промежуточных орбитах учтена главная часть возмущающей функции.

Апробация работы. Результаты диссертации частично и целиком докладывались на научно-исследовательских семинарах следующих организаций:

1. Кафедра теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова:

1.1. “Гамильтоновы системы и статистическая механика”. Руководители академик В.В.Козлов, член-корреспондент РАН Д.В.Трещёв, проф. С.В.Болотин

1.2. “Аналитическая механика и устойчивость движения”. Руководители академик В.В.Румянцев, член-корреспондент РАН В.В. Белецкий; проф. А.В. Карапетян

1.3.”Механика космического полета” (им. В.А. Егорова). Руководители член-корреспондент РАН В.В.Белецкий, проф. В.В.Сазонов

1.4. “Динамика относительного движения”. Руководители член-корреспондент РАН В.В.Белецкий, проф. Ю.Ф.Голубев, доц. К.Е.Якимова, доц. Е.В. Мелкумова

2. Отдел механики ВЦ РАН им. А.А. Дородницына. Руководители проф. С.Я.Степанов, проф. А.В.Карапетян.

3. Совет по небесной механике и астрометрии Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга при МГУ им. М.В. Ломоносова. Руководитель доц. Л.Г. Лукьянов.

4. Кафедра астрономии и космической геодезии Московского государственного университета геодезии и картографии. Руководитель проф. С.Н.Яшкин.

5. Кафедра геодезии и геоинформатики Государственного университета по землеустройству. Руководитель проф. В.Н. Баранов.

6. Кафедра высшей математики Московского автомобильно-дорожного института (государственного технического университета). “Дифференциальные уравнения и их приложения в теории не линейных колебаний и небесной механики” Руководители проф. Ю.А.Рябов, проф. С.Г. Журавлев.

Публикации по теме диссертации

Основные научные результаты диссертации опубликованы в статьях [1-4].

Личный вклад автора. В статье, написанной в соавторстве с А.А. Кочиевым, последнему принадлежит постановка задачи.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из пяти глав (первая – введение) и заключения. В работе 138 страниц, 48 наименований использованной литературы, 93 рисунка.

Содержание работы.

В главе 1 сформулирована общая постановка задачи и приведен краткий обзор результатов, касающихся известных моделей гравитационных полей, допускающих интегрирование в квадратурах, среди которых представлена и рассматриваемая модель. Описаны известные интегрируемые варианты приближенных потенциалов: Р.Баррара, Дж.Винти и М.Д. Кислика, Е.П.Аксенова, В.Г.Демина и Е.А.Гребенникова, а также предложенный А.А.Кочиевым и рассматриваемый автором некоторый новый вариант:

$$W = \frac{fM}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad (1)$$

где

$$r_1^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - c\right)^2 + z^2, \qquad r_2^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + c\right)^2 + z^2. \qquad (2)$$

Глава 2 посвящена постановке задачи и интегрированию уравнений движения.

В параграфе 2.1. ставится задача с потенциалом (1): ***проинтегрировать в квадратурах уравнения движения материальной точки в поле с указанным .*** В параграфе 2.3 рассматриваются сжатые сфероидальные координаты

$$\begin{cases} x = \lambda\mu\cos\varphi, \\ y = \lambda\mu\sin\varphi, \\ z = \sqrt{(\lambda^2 - c^2)(1 - \mu^2)} \end{cases} \qquad (9)$$

с помощью которых, используя метод Якоби, уравнения движения с потенциалом (4) сведены к квадратурам и приведены к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{d\tau} = \dfrac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda}; \qquad \dfrac{d\mu}{d\tau} = \dfrac{\sqrt{F(\mu)}}{\mu}; \\ \dfrac{d\omega}{d\tau} = \left(\dfrac{1}{\mu^2} - \dfrac{c^2}{\lambda^2}\right)\alpha_3; dt = \left(\lambda^2 - c^2\mu^2\right)d\tau; \end{cases} \qquad (10)$$

где

$$\begin{cases} L(\lambda) = \\ = \left(\lambda^2 - c^2\right)\left[\lambda^2\left(2\alpha_1\lambda^2 + 2fM\lambda + \alpha_2\right) + \alpha_3^2 c^2\right]; \\ F(\mu) = \\ = \left(1 - \mu^2\right)\left[-\alpha_3^2 - \mu^2\left(2\alpha_1 c^2\mu^2 + \alpha_2\right)\right] \end{cases} \qquad (11)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

В параграфе 2.2 рассмотрена связь нового потенциала с потенциалом поля тяготения твердого тела и гауссова кольца.

На основе системы уравнений (10) и многочленов (11) разработан алгоритм построения промежуточной орбиты, которая для ограниченных движений ($h < 0$) в общем случае является условно-периодической с тремя периодами.

В параграфе 2.3 получены три первых интеграла в инволюции, т.е. такая система первых интегралов, скобки Пуассона от которых для любых двух интегралов тождественно равны нулю.

Соответствующие интегралы в сжатых сфероидальных координатах (8) имеют вид:

$$\begin{cases} p_\omega = \alpha_3, \\ \dfrac{(\lambda^2 - c^2)p_\lambda^2 + (1-\mu^2)p_\mu^2}{\lambda^2 - \mu^2 c^2} + \dfrac{p_\omega^2}{\lambda^2\mu^2} - \dfrac{2fM\lambda}{\lambda^2 - \mu^2 c^2} = 2h \\ \dfrac{c^2\mu^2(\lambda^2 - c^2)p_\lambda^2 + \lambda^2(1-\mu^2)p_\mu^2}{\lambda^2 - \mu^2 c^2} + \left(\dfrac{1}{\mu^2} + \dfrac{c^2}{\lambda^2}\right)p_\omega^2 - \\ -\dfrac{2c^2 fM\lambda\mu^2}{\lambda^2 - \mu^2 c^2} = -\alpha_2. \end{cases} \tag{12}$$

В параграфе 2.4 получена полная система первых интегралов, через которые установлена связь между произвольными постоянными, возникшими при интегрировании методом Гамильтона-Якоби, прямоугольными координатами и скоростью точки.

В параграфе 2.5. произведен переход уравнений движений задачи к безразмерным переменным.

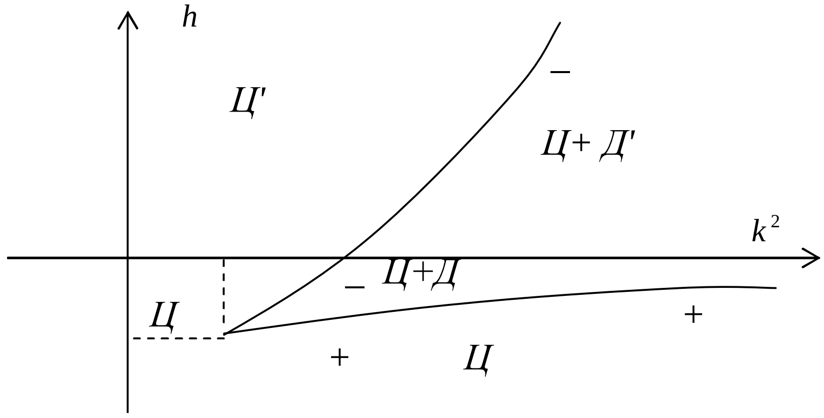
В главе 3, состоящей из четырех параграфов, найдены стационарные решения (движения) и исследована их устойчивость по Ляпунову, а также рассмотрены вопросы бифуркации.

В параграфе 3.1 найдены стационарные движения, которые соответствуют круговым орбитам, лежащим в экваториальной плоскости планеты, с центром в начале координат. В заключение параграфа приведён общий алгоритм построения стационарных (круговых) движений.

В параграфе 3.2, посвященном устойчивости по Ляпунову стационарных движений, показано, что круговые орбиты задачи устойчивы по отношению к цилиндрическим координатам $r, \dot{r}, z$ и $\dot{z}$, только для орбит, радиусы r_0 которых удовлетворяют неравенству $r_0 > c\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$, и неустойчивы в противном случае. Здесь же получено, что степень неустойчивости Пуанкаре стационарных движений равна 1.

В параграфе 3.3 получена бифуркационная диаграмма Пуанкаре-Четаева, с помощью которой удобно характеризовать геометрически распределение устойчивых и неустойчивых стационарных движений.

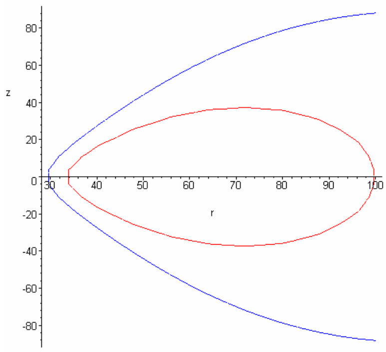
В параграфе 3.4 в виде зависимости постоянной интеграла энергии от постоянной площадей построена бифуркационная диаграмма Смейла:



Здесь указаны также области возможности движения

$$W = \frac{k^2}{2r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \le h, \qquad r > 1$$

причем смысл обозначений следующий: *Ц* – ограниченная область, охватывающая притягивающий центр $r=1,\ z=0$ (в ней возможны движения с неограниченной скоростью), *Ц'* – неограниченная область, охватывающая притягивающий центр (при пересечении прямой $h=0$ часть границы «уходит в бесконечность» - изменение границ показано на компьютерном



изображении рис.

Д – ограниченная область, не охватывающая не притягивающий центр, а устойчивое стационарное движение (вид области наглядно свидетельствует об устойчивости) в ней возможны только движения с неограниченной скоростью), *Д'* – неограниченная область, охватывающая устойчивое стационарное движение (при пересечении прямой $h=0$ ее часть границы «уходит в бесконечность»).

При пересечении верхней бифуркационной кривой две области сливаются в одну в точке, в которой возможно неустойчивое стационарное движение. Это седловая точка функции *W*.

В главе 4, состоящей из трех параграфов, путем исключения циклической координаты получены уравнения движения задачи в форме Рауса. Здесь же произведен подробный качественный анализ возможных

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

типов движения приведенной задачи, в который переменные разделяются по Лиувиллю.

В параграфе 4.1. даны необходимые сведения и выведены уравнения движения рассматриваемой задачи в форме Рауса.

В параграфе 4.2. в эллиптических координатах уравнения движения Рауса сведены к квадратурам и выписаны их полная система первых интегралов. Используются сжатые сфероидальные координаты

$$r = \operatorname{ch}\xi \sin\eta$$
$$z = \operatorname{sh}\xi \cos\eta$$

Кинетическая энергия приведенной системы получает вид

$$T_k = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2\right)\left(\operatorname{sh}^2\xi - \cos^2\eta\right).$$

Приведенная потенциальная энергия будет

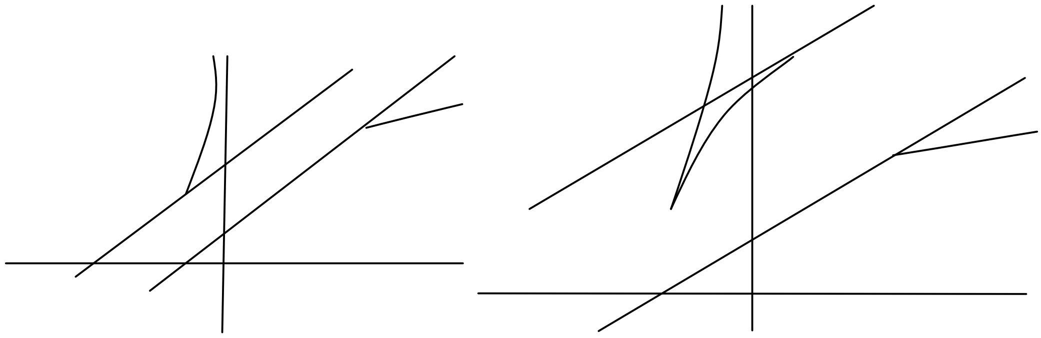
$$V_k = \frac{\dfrac{k^2}{\operatorname{ch}^2\xi} + 2\operatorname{ch}\xi - \dfrac{k^2}{\sin^2\eta}}{2\left(\operatorname{ch}^2\xi - \sin^2\eta\right)}.$$

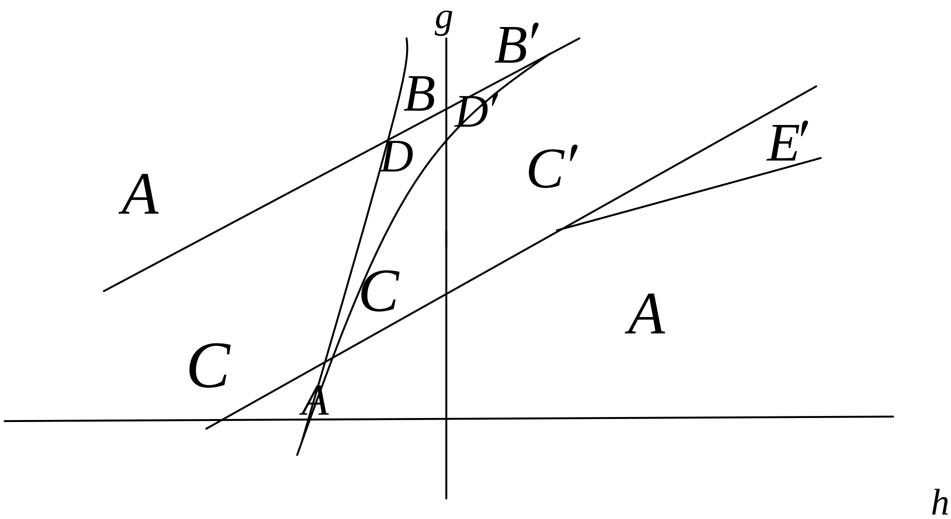
Получается система Лиувилля.

В параграфе 4.3. произведен подробный качественный анализ методом Алексеева В.М., путем построения бифуркационных диаграмм (состоящих в основном из кривых кратных корней) в плоскости g, h, причем эти диаграммы зависят от постоянной интеграла площадей как от параметра. Эта методика уже применялась в работах Е.Г.Смирновой, Р.М.Бебенина.

Диаграммы в нашей задаче таковы:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com



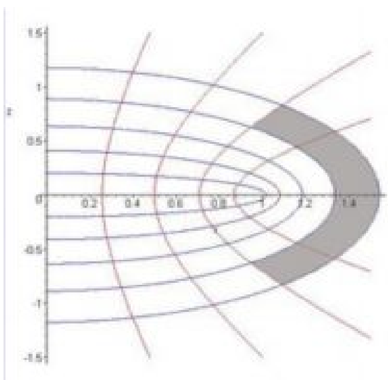


(***последним дан самый сложный вариант диаграммы***; *точный вид бифуркационных диаграмм, построенный при помощи вычислительного пакета Maple, неудобен для изображения типов и здесь не приводится)*

Типы пространственного движения, которые здесь возникают, таковы:

А – движение невозможно,

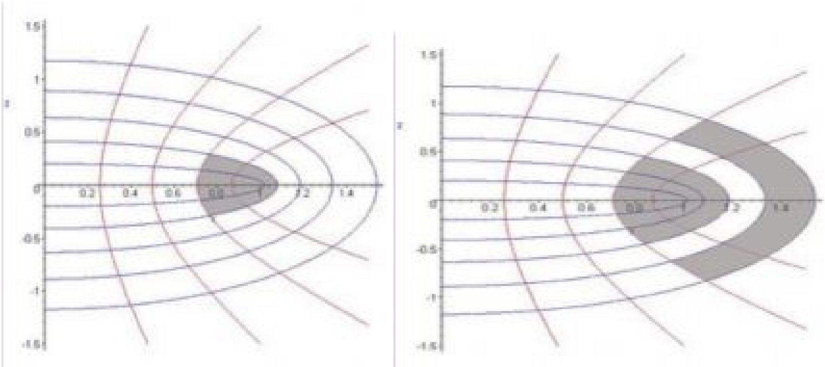
В – траектории лежат внутри однополостного гиперболоида вращения и между двумя софокусными эллипсоидами вращения (движение условно-периодическое),



ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

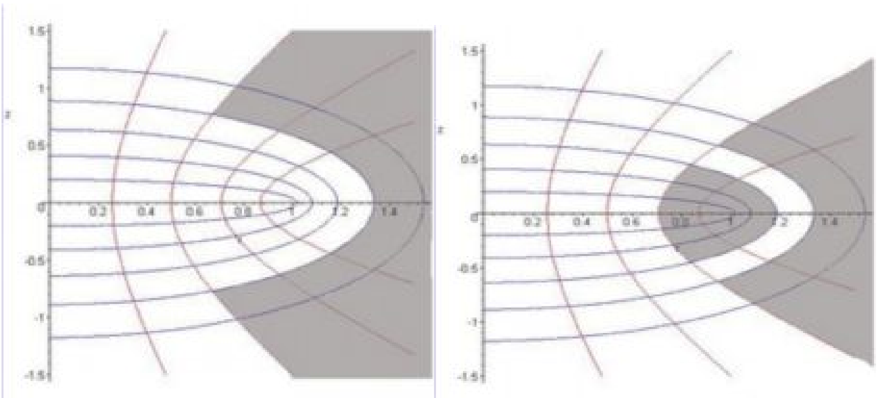
С – ограниченные траектории, расположенные снаружи однополостного гиперболоида и внутри эллипсоида,

D – типы В и С существуют одновременно,



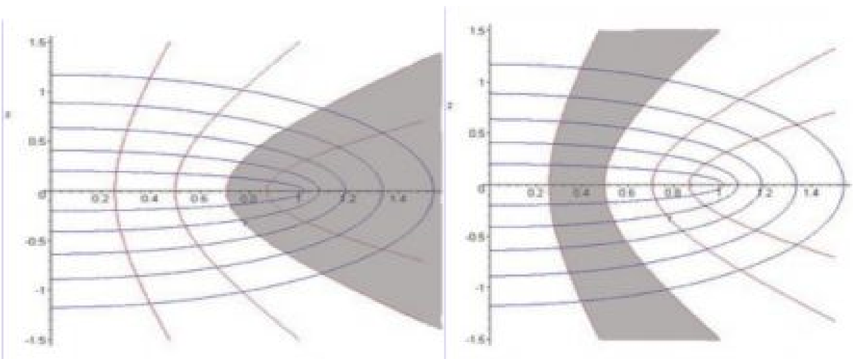
B' – неограниченные траектории, которые находятся вне эллипсоида и внутри гиперболоида,

D' – типы B' и С существуют одновременно:



С' – неограниченные траектории, расположенные снаружи гиперболоида,

E' – неограниченные траектории, расположенные между двумя гиперболоидами.



В главе 5, состоящей из четырех параграфов, проведен качественный анализ траекторий, при котором рассматривается кривые кратных корней на плоскости g, k^2 в зависимости от значения постоянной интеграла энергии h. Заметим, что аналогичный метод применялся в работах К.Шарлье и Е.П.Аксенова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Демина, .

В параграфе 5.1. рассмотрен общий вид многочленов L и F, входящих в квадратуры.

Параграф 5.2 посвящен эллиптическому типу движения $(h < 0)$ и найдено, что все траектории ограничены и делятся на два типа: A, B.

В параграфе 5.3. рассмотрен параболический случай движения $(h = 0)$ и показано, что можно выделить три типа движений: C, B', C'.

В параграфе 5.4. рассмотрен гиперболический случай движения $(h > 0)$ и показано, что можно выделить следующие качественно типы движений: C, B', C', E'.

Обращает на себя внимание существование класса ограниченнных движений при $h>0$.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Рассмотрена постановка новой задачи о движении материальной точки в поле, аналогичном полю притяжения двух центров. Показано, что потенциал этой задачи учитывает вторую зональную гармонику потенциала осесимметричного твердого тела.

2. Доказано, что построенный потенциал мало отличается от потенциала гауссова кольца..

3. Методом разделения переменных двумя способами найден полный интеграл уравнений движений:

- применением теоремы Штекеля в пространственном случае,
- путем исключения циклической координаты Рауса и выявления лувиллева вида приведенной системы.

Написаны общие решения соответствующей системы уравнений в квадратурах.

4. Выявлен класс стационарных (круговых) движений и установлена их устойчивость или неустойчивость по Ляпунову. Найдены бифуркационные значения параметров и построены диаграммы Пуанкаре-Четаева и Смейла

5. На плоскостях констант первых интегралов построены бифуркационные диаграммы возможных типов движений

- по Алексееву для приведенных систем в зависимости от постоянной интеграла площадей,
- в зависимости от постоянной интеграла энергии.

Выявлены следующие классы траекторий: (А) движение между гиперболоидом и эллипсоидом., (Б) движение между двумя эллипсоидами и внутри гиперболоидом. (В) неограниченное движение внутри гиперболоида, (Г) неограниченное движение внутри гиперболоида и вне эллипсоида, (Д) неограниченное движение вне эллипсоида и между двумя гиперболоидами.

Список публикаций

1. Васкез Б. Х. А., Кочиев А. А. Промежуточная орбита точки в поле тяготения твердого тела. Космические исследования, 2005, том 43, № 5, с. 395-398.

2. Васкез Б. Х. А. Потенциал поля сил в одной модельной задаче небесной механики и космической геодезии. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка 2006,.№ 5- с. 107-112.

3. Васкез Б. Х. А. Устойчивость круговых орбит в модельной задаче небесной механики. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2006, № 6- с.115-121.

4. Васкез Б. Х. А. Качественный анализ модельной задачи небесной механики. Эллиптический тип движения. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2007, № 1-с.94-116.