МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Мельдианова Вера Александровна

# О механических системах с полным набором линейных инвариантных соотношений.

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | Доктор физико-математических наук<br>Е.И. Кугушев |
| **Официальные оппоненты:** | Доктор физико-математических наук,<br>профессор Ю.А. Садов<br>Кандидат физико-математических наук,<br>доцент Г.В. Касаткин |
| **Ведущая организация:** | Вычислительный центр<br>им. А.А. Дородницына<br>Российской академии наук |

Защита состоится 2007 года в 16 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан апреля 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент В.А. Прошкин

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Существует взаимосвязь между свойствами механической системы и структурой интегралов, которыми она обладает. Видимо, важную роль здесь играет структура конфигурационного многообразия. Известно, что существуют, топологические препятствия к полной интегрируемости механических систем. Замкнутая аналитическая двухмерная поверхность рода больше единицы не может быть конфигурационным пространством аналитической интегрируемой системы (В.В.Козлов). А наличие интегралов определенного вида накладывает, по-видимому, ограничения на топологию конфигурационного пространства. Так, например, доказано (Д.Л.Абраров), что механическая система с двумерным ориентируемым конфигурационным многообразием может обладать линейным интегралом лишь в тех случаях, когда оно диффеоморфно сфере или тору.

Важной является проблема изучения этой взаимосвязи, т.к. подобный анализ может помочь выявить еще новые свойства механических систем, которыми они должны обладать, чтобы их можно было проинтегрировать тем или иным способом, или же наоборот обнаружить закономерности, которые препятствуют этому. В данной диссертации этот вопрос рассматривается в случае, когда механическая система обладает линейными интегралами. Удается установить определенную взаимосвязь со структурой конфигурационного многообразия в том случае, когда линейные интегралы независимы между собой по скоростям, а также связь этой независимости с условием инволюции этих интегралов.

**Цель работы.** Основной целью данной работы является изучение топологической структуры многообразия совместного уровня полного набора независимых линейных инвариантных соотношений и интеграла энергии натуральной механической систеы, а также некоторых свойств динамики движения на этих уровнях. Изучение проводится как в общем виде, так и на примерах конкретных механических систем.

**Научная новизна.** Все основные результаты полученные в работе являются новыми, ранее неизвестными. Среди конкретных примеров механических систем с полным набором линейных инвариантных соотношений, рассмотренных здесь, многие изучались ранее, но в данной работе применяется новый подход к исследованию структуры их многообразий уровней, а также некоторых свойств динамики.

**Достоверность результатов.** Все результаты диссертационной работы строго обоснованы, они базируются на утверждениях дифференциальной геометрии и теоретической механики.

**Используемые методы.** В работе используются методы аналитической механики и дифференциальной геометрии, которые прилагаются к рассматриваемым механическим системам. Основной результат о топологической структуре многообразий уровня опирается на утверждения дифференциальной геометрии о накрытиях.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер, полученные результаты дают возможность определять топологическую структуру многообразий уровня линейных интегралов для механических систем, у которых она ранее была неизвестна. Причем это можно сделать, как для голономных так и для неголономных механических систем с полным набором линейных инвариантных соотношений.

**Апробация работы и публикации.** Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Семинар по гамильтоновым системам и статистической механике кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством акад. РАН В.В. Козлова, чл.-корр. РАН Д.В. Трещева, проф. С.В. Болотина, 2003 г.;

– Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством акад. РАН В.В. Румянцева, чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна, 2004 г.;

– Семинар по динамике относительного движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой, 2004 г., 2007г.;

– Семинар отдела механики ВЦ РАН под рук. проф. С.Я. Степанова, проф. А.В. Карапетяна, 2004 г., 2007 г.;

– Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им.М.В. Ломоносова, апрель 2003 г.;

– Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 23-28 августа 2004 г.;

– Конференция-конкурс молодых ученых института Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004 г., 2005 г.;

– XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, Российский Университет Дружбы Народов, апрель 2006 г.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 52 наименований. Общий объем диссертации - 105 страниц.

# СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с исследованием механических систем, обладающих линейными интегралами, и работ, касающихся взаимосвязи структуры интегралов и вида конфигурационного многообразия таких систем, также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** устанавливается топологическая структура многообразия уровня полного набора линейных инвариантных соотношений механической системы, в случае, когда конфигурационное многообразие ориентируемо. Доказывается общее утверждение, а также приводятся примеры и следствия к нему.

В *первом разделе* этой главы даются основные понятия, необходимые для формулировки утверждения о топологической структуре.

Рассматривается натуральная консервативная механическая система с гладким компактным $n$-мерным конфигурационным многообразием $K$.

В локальных координатах интеграл энергии такой системы имеет вид

$$f_1(\mathbf{q}, \dot{?}\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\dot{?}\mathbf{q}^T A(\mathbf{q})\dot{?}\mathbf{q} + V(\mathbf{q}) = c_1, \tag{1}$$

где $A(\mathbf{q})$ - невырожденная симметричная положительно определенная матрица $n \times n$, а $V(\mathbf{q})$ - потенциальная энергия. Все функции являются гладкими.

Предполагается, что у системы также есть $n-1$ инвариантных соотношений, линейных по скоростям. Локально, в любой координатной окрестности, их можно записать

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{?}\mathbf{q}) = \mathbf{b}_i{}^T(\mathbf{q})\dot{?}\mathbf{q} + d_i(\mathbf{q}) = c_i \quad i = 2, 3, ..., n, \tag{2}$$

где $d_i$ - гладкие функции и $\mathbf{b}_i{}^T \in \mathbb{R}^n$ - гладкие вектор-функции, которые можно рассматривать, как поля ковекторов на $K$.

Для вектора $\vec{c} = (c_1, ..., c_n) \in R^n$ введем $M_c$ - многообразие уровня системы функций $f_i$: $M_c = \{(\mathbf{q}, \dot{?}\mathbf{q}) \in TK : f_i(\mathbf{q}, \dot{?}\mathbf{q}) = c_i, i = 1, 2, ..., n\}$. Выясним, как устроено такое многообразие уровня.

Известно, что если все эти $n$ функций являются первыми интегралами системы, находятся в инволюции и функционально независимы, то тип многообразий уровня, в случае компактного конфигурационного многообразия, устанавливает теорема Лиувилля-Арнольда. В соответствии с этой теоремой, они являются торами.

*Второй раздел* посвящен доказательству утверждения об устройстве такого многообразия уровня, в котором условие инволюции не является обязательным требованием.

**Утверждение:** *Пусть конфигурационное многообразие $K$ — ориентируемое компактное гладкое, а интегралы (2) являются независимыми в случае $n > 2$ и невырожденными в случае $n = 2$.*

*Тогда при заданных значениях констант линейных интегралов $c_i, i = 2, 3, ..., n$ найдется достаточно большое число $h$ такое, что для любых значений константы интеграла энергии, превышающих его $c_1 > h$, многообразие уровня $M_c$ интегралов (1),(2) имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию $K$.*

В *третьем разделе* приводятся замечания и следствия из утверждения, а также рассматриваются простейшие примеры, иллюстрирующие его.

**Вторая глава** посвящена рассмотрению голономной механической системы — волчок Эйлера с эксцентриком.

В *первом разделе* дается постановка задачи и выписываются первые интегралы.

Рассматривается волчок Эйлера, вокруг одной из главных осей инерции которого вращается невесомый стержень с материальной точкой (эксцентрик) на конце, в плоскости, ортогональной к этой оси. Материальная точка имеет массу $m$ и вращается на расстоянии $a$ от оси инерции, а плоскость, в которой она вращается, находится на расстоянии $b$ от начала координат.

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ и систему координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным осям инерции твердого тела так, что эксцентрик вращается вокруг оси $\zeta$.

Движение твердого тела задается углами Эйлера $\psi, \varphi, \theta$, а движение эксцентрика — углом $\gamma$ поворота вокруг оси $O\zeta$. Таким образом, получим механическую систему с четырьмя степенями свободы, конфигурационное многообразие которой - $SO(3) \times S^1$.

Уравнения движения такой системы допускают интеграл энергии $T = T_0$ и три интеграла проекции кинетического момента на неподвижные оси $\mathbf{K} = \mathbf{K_0}$.

Известно, что в общем случае такая задача неинтегрируема по Лиувиллю.

Во *втором разделе* устанавливается топологическая структура многообразия уровня интеграла энергии и линейных интегралов этой задачи. Судить о ней можно на основании утверждения первой главы. Здесь проверяется выполнение условий этого утверждения, а именно независимость линейных интегралов по скоростям.

Получается, что для любых значений констант интегралов моментов и для положительной константы интеграла энергии многообразие уровня имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию системы, т.е. $SO(3) \times S_1$.

В *третьем разделе* выписываются уравнения движения волчка Эйлера с эксцентриком в системе координат, связанной с эксцентриком.

Ввиду того, что кинетическая энергия громоздко выглядит в системе координат, жестко связанной с твердым телом, то и уравнения движения будут иметь довольно сложный вид. Поэтому удобнее выводить уравнения в системе координат, жестко связанной с эксцентриком.

Свяжем с эксцентриком систему координат $O\xi'\eta'\zeta'$ так, что ось $O\xi'$ параллельна той оси, которая проходит через эксцентрик в плоскости его движения, $O\eta'$ лежит в плоскости, ортогональной к $O\zeta$, и перпендикулярна $O\xi'$, а ось $O\zeta'$ совпадает с $O\zeta$. Переход от системы координат $O\xi\eta\zeta$ к системе $O\xi'\eta'\zeta'$ осуществляется при помощи матрицы поворота $\mathbf{C}$.

Вводятся обозначения $\hat{?}\boldsymbol{\omega}_T := \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\omega} = (\hat{?}p, \hat{?}q, r)^T$ - угловая скорость твердого тела в новой системе координат и $\hat{?}\boldsymbol{\omega} := \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\omega}_1 = (\hat{?}p, \hat{?}q, \hat{?}r)^T$ - угловая скорость системы, связанной с эксцентриком, где

$$\begin{cases} \hat{?}p = \dot{?}\psi \sin\theta \sin(\varphi+\gamma) + \dot{?}\theta \cos(\varphi+\gamma) \\ \hat{?}q = \dot{?}\psi \sin\theta \cos(\varphi+\gamma) - \dot{?}\theta \sin(\varphi+\gamma) \\ \hat{?}r = \dot{?}\psi \cos\theta + (\dot{?}\varphi + \dot{?}\gamma). \end{cases}$$

И выписываются уравнения движения системы.

В *четвертом разделе* указываются стационарные движения, которые имеет волчок Эйлера с эксцентриком в общем случае.

Один класс стационарных решений, когда твердое тело равномерно вращается вокруг третьей главной оси инерции, а эксцентрик покоится в абсолютной системе координат, при этом угол поворота $\gamma$ равномерно изменяется.

Другие классы решений получаются, когда эксцентрик не движется относительно твердого тела, т.е. система движется как целое.

*Пятый раздел* посвящен динамически симметричному волчку Эйлера с эксцентриком. Как известно, это единственный интегрируемый случай задачи.

Помимо интеграла энергии

$$\tfrac{1}{2}((A+mb^2)\hat{?}p^{2} + (A+ma^2+mb^2)\hat{?}q^{2} - 2mab\hat{?}p\hat{?}r + ma^2\hat{?}r^{2} + Cr_0{}^2) = T_0$$

и трех интегралов проекций кинетического момента на подвижные оси

$$\begin{cases} (A+mb^2)\hat{?}p^2 - mab\hat{?}r = K_0\gamma_1, \\ (A+ma^2+mb^2)\hat{?}q = K_0\gamma_2, \\ -mab\hat{?}p + ma^2\hat{?}r + Cr_0 = K_0\gamma_3, \end{cases}$$

где $\gamma$ - это вектор $\vec{e}_z$ в подвижных осях, т.е. $\gamma_1 = \sin\theta\sin\gamma, \gamma_2 = \sin\theta\cos\gamma, \gamma_3 = \cos\theta$, здесь существует еще один интеграл $r = r_0$.

Далее показывается, что задача о движении динамически симметричного волчка Эйлера с эксцентриком эквивалентна задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой без эксцентрика, матрица инерции которого $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A+mb^2 & 0 & -abm \\ 0 & A+ma^2+mb^2 & 0 \\ -abm & 0 & ma^2 \end{pmatrix}$, под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{I}^{-1}\gamma - \dfrac{bd}{aA\alpha}\vec{e_\xi}$. Центр масс этого тела лежит на третьей оси инерции (в тех осях, в которых матрица инерции этого твердого тела имеет вид $\mathbf{I}$) на расстоянии $l = \alpha d$. При фиксированных начальных условиях, которые должны удовлетворять следующим соотношениям, зависящим от параметров $\alpha$ и $d$

$$Ap_0 = \alpha\gamma_{10}, \quad Aq_0 = \alpha\gamma_{20}, \quad Cr_0 = \alpha\gamma_{30} - d,$$

где $(p_0, q_0, r_0)$ вектор угловой скорости этого твердого тела в начальный момент времени.

В *шестом разделе* главы изучается топологическая структура многообразий уровней для интегрируемого случая.

Показывается, что задача о динамически симметричном волчке Эйлера с эксцентриком может служить примером к теореме Н.Н. Нехорошева, при помощи которой здесь устанавливается топологическая структура первых интегралов $H, K_x, K_y$, $K^2$ и $r$. Здесь $H$ - интеграл энергии, а $K_x, K_y, K_z$ - три интеграла проекции кинетического момента всей системы на неподвижные оси, $K^2$ — квадрат модуля кинетического момента всей системы и $r$ — постоянная третья компонента угловой скорости твердого тела. На основании этой теоремы многообразие совместного уровня таких интегралов есть трехмерной тор.

В **третьей главе** рассматриваются два примера неголономных механических систем, обладающих полным набором инвариантных соотношений.

Первая из них — симметричные сани Чаплыгина, движущиеся по гладкой поверхности. Эта механическая система изучается в *первом* разделе данной главы.

Рассматривается движение однородного круглого плоского диска, который в своем центре все время касается гладкой компактной замкнутой связной поверхности $\sum$. Обозначим $\vec{r}(u,v)$ — радиус-вектор точки поверхности в абсолютном пространстве, $(u,v)$ — ортогональная сеть координат, которая в аналитическом случае всегда существует.

Свяжем с диском сопутствующую систему координат с началом в центре диска и направляющими векторами, первый из которых направлен по линии скольжения конька, второй лежит в плоскости диска и ортогонален первому, а третий совпадает с нормалью к поверхности $\sum$. Локально положение системы описывается тройкой $(u,v,\varphi)$, где $\varphi$ — угол поворота диска. Конфигурационное пространство представляет собой сферическое расслоение поверхности $\sum$, которое обозначим $T_S \sum$.

На движение диска наложена неголономная связь — скорость центра диска направлена по линии скольжения конька. В локальных координатах эта связь запишется следующим образом

$$f_3 = - \parallel \vec{r'_u} \parallel \dot{?}u \sin\varphi + \parallel \vec{r'_v} \parallel \dot{?}v \cos\varphi = 0.$$

Система допускает интеграл энергии $f_1 = T + U = c_1$, где $T$ — кинетическая, а $U$ — потенциальная энергия системы.

Считаем, что поле сил является однородным и потенциальная энергия зависит только от положения центра тяжести диска, т.е. $U = U(u,v)$. Выразив кинетическую энергию, оказывается, что координата $\varphi$ туда не входит. Проверяется, что координата $\varphi$ является циклической для неголономной системы, и ей соответствует интеграл

$$f_2 = \dot{?}\varphi + \frac{\vec{r'_v}}{\parallel \vec{r'_v} \parallel} \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r'_u}}{\parallel \vec{r'_u} \parallel} \right) = c_2.$$

Вместе с неголономной связью этот интеграл образует систему независимых линейных по скоростям функций, поэтому здесь применимо утверждение первого раздела. Если уровень энергии $c_1$ взять достаточно большим, то при любых значениях константы $c_2$ линейного интеграла $f_2$ многообразие уровня $M_c$ интегралов $f_1, f_2, f_3$ имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию $T_S \sum$.

Далее идут подразделы, в которых рассмотрены два случая поверхностей частного вида.

В *первом подразделе* рассмотрен симметричный конек на поверхности вращения.

Будем считать, что поверхность $\sum$, по которой перемещается симметричный конек, является поверхностью вращения $x = \rho(v)\cos u, y = \rho(v)\sin u, z = v$. В этом случае топологически она представляет собой двухмерную сферу $S^2$ или тор $T^2$. Конфигурационное пространство, соответственно, $SO(3)$ или $T^3$. Допустим, что силовое поле симметрично: $U = U(v)$. У системы есть группа симметрий - вращение вдоль параметра $u$. Систему можно редуцировать к фазовому потоку на двухмерной сфере $S^2$ или двухмерном торе $T^2$. Далее производятся выкладки для такой редукции.

Неголономная связь имеет вид

$$f_3 = -\rho\dot{?}u\sin\varphi + \dot{?}v\cos\varphi\sqrt{{\rho'_v}^2 + 1} = 0.$$

Линейный интеграл получится $f_2 = \dot{?}\varphi - \frac{\rho'_v\dot{?}u}{\sqrt{{\rho'_v}^2+1}} = c_2$.

А интеграл энергии запишется $\tilde{?}\alpha\dot{?}u^2 + \tilde{?}\delta\dot{?}v^2 + U(v) = c_1$, где $\tilde{?}\alpha = A\alpha^2 + \rho^2, \quad \tilde{?}\delta = A\delta + {\rho'_v}^2 + 1, \quad \delta(v) = \alpha^2{\rho''_{vv}}^2 + {\alpha'_v}^2\alpha^{-2} + 2\alpha'_v\alpha\rho'_v\rho''_{vv}, \quad \alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{{\rho'_v}^2+1.}}$

Далее из этих соотношений находится система уравнений, которая имеет вид $\dot{?}u = g_1(v,\varphi), \dot{?}\varphi = g_2(v,\varphi), \dot{?}v = g_3(v,\varphi)$. Оказывается, что два ее последних уравнения отделяются. Они определяют фазовый поток редуцированной системы.

Отмечается, что, если $c_2 = 0$, то система интегрируется в квадратурах. Также система интегрируется и в случае вертикальной круговой цилиндрической поверхности $\rho = const$. Здесь $\dot{?}\varphi = c_2, \quad \delta \equiv 0$.

Во *втором подразделе* рассмотрен симметричный конек на цилиндрической поверхности, т.е. она задачтся $x = x(u), y = y(u), z = v$.

Вводится обозначение $\rho(u) = \frac{1}{\sqrt{{x'_u}^2+{y'_u}^2}}$.

Находим неголономную связь $f_3 = -\rho^{-1}\dot{?}u\sin\varphi + \dot{?}v\cos\varphi = 0$.

А линейный интеграл будет иметь вид $f_2 = \dot{?}\varphi = c_2$. Это означает, что при движении по цилиндрической поверхности симметричный конек вращается с постоянной скоростью.

Затем выписывается интеграл энергии

$$\dot{?}v^2 + (A\mu(u) + {x'_u}^2 + {y'_u}^2)\dot{?}u^2 + U(u,v) = c_1,$$

где $\mu(u) = {\rho'_u}^2\rho^{-2} + \rho^2({y''_{uu}}^2 + {x''_{uu}}^2) + 2\rho\rho'_u(y'_u y''_{uu} + x'_u x''_{uu})$.

Далее показывается, что если силовое поле горизонтально, т.е. $U = U(u)$, то система интегрируется в квадратурах.

Во *втором разделе* этой главы изучается еще одна неголономная механическая система (частный случай неголономного гиростата).

Рассматривается динамически симметричный волчок Эйлера с эксцентриком, на который наложена неголономная связь Суслова. Сохраняя все обозначения второй главы, будем считать, что неголономная связь такова, что проекция угловой скорости системы координат, жестко связанной с эксцентриком, на вторую ось этой системы, равна нулю, т.е. в указанных обозначениях связь Суслова запишется $\hat{?}q = 0$. В соответствии с этим и при учете динамической симметрии $A = B$ получим, что интеграл энергии примет вид

$$f_1 = T = \frac{1}{2}((A + mb^2)\hat{?}p^2 - 2mab\hat{?}p\hat{?}r + ma^2\hat{?}r^2 + Cr^2 + Dq^2) = T_0.$$

Показывается, что такая механическая система будет иметь еще два линейных по скоростям интеграла

$$f_2 = -abm\hat{?}p + ma^2\hat{?}r = const, \quad f_3 = Cr = const.$$

Далее к этим интегралам добавляется еще одно линейное инвариантное соотношение — неголономная связь $f_4 = \hat{?}q = 0$ и устанавливается топологическая структура многообразия совместного уровня этих четырех инвариантных соотношений. На основании утверждения первой главы делается вывод, что многообразие уровня функций $f_1, f_2, f_3, f_4$ имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна $SO(3) \times S_1$.

**Четвертая глава** посвящена случаю неориентируемого конфигурационного многообразия. А именно, здесь рассматривается вопрос о структуре многообразия совместного уровня интеграла энергии и полного набора независимых линейных инвариантных соотношений, когда конфигурационное пространство механической системы является неориентируемым многообразием.

В *первом разделе* даются необходимые понятия, связанные с неориентируемым случаем.

Во *втором разделе* этой главы доказывается общее утверждение аналогичное утверждению, доказанному для случая ориентируемого конфигурационного многообразия.

**Утверждение:** *Пусть конфигурационное многообразие $K$ — неориентируемое компактное гладкое и замкнутое, а линейные инвариантные соотношения (2) являются независимыми в случае $n > 2$ и невырожденными в случае $n = 2$.*

*Тогда при заданных значениях констант линейных интегралов $c_i, i = 2, 3, ..., n$ найдется достаточно большое число $h$ такое, что для любых значений константы интеграла энергии, превышающих его $c_1 > h$, многообразие уровня $M_c$ интегралов (1),(2) имеет одну компоненту связности и диффеоморфно ориентирующему многообразию $W(K)$.*

В *третьем разделе* это утверждение иллюстрируется примером. Рассматривается механическая система, обладающая неориентируемым конфигурационным многообразием.

Она состоит из двух материальных точек массой $m_1$ и $m_2$, на координаты которых $(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ наложены следующие связи, заданные в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
&x_1 = R_1 \cos 2\beta, \quad y_1 = R_1 \sin 2\beta, \quad z_1 = 0\\
&x_2 = R_2 \sin\gamma \cos\beta, \quad y_2 = R_2 \sin\gamma \sin\beta, \quad z_2 = -R_2 \cos\gamma,
\end{aligned}$$

где $\beta, \gamma \in R$ — могут принимать любые значения. Конфигурационное многообразие данной системы — это бутылка Клейна $K^2$.

Система имеет невырожденный линейный интеграл кинетического момента. Условия утверждения этой главы выполняются и инвариантное многообразие совместного уровня интеграла энергии и линейного интеграла — это двухмерный тор $T^2$, а естественная проекция фазового пространства на конфигурационное дает ориентирующее накрытие конфигурационного многообразия — бутылки Клейна $K^2$ этим тором.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы:

Доказаны общие утверждения о топологии совместных уровней интеграла энергии механической системы и полного набора независимых инвариантных соотношений линейных по скоростям. В случае ориентируемого конфигурационного многообразия уровень имеет две компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна конфигурационному многообразию системы. В неориентируемом случае уровень имеет одну компоненту связности, диффеоморфную ориентирующему многообразию конфигурационного многообразия.

Получен ряд следствий из этих утверждений:

• Если натуральная консервативная механическая система с компактным конфигурационным многообразием, отличным от тора, имеет полный набор линейных по импульсам интегралов в инволюции, то эти интегралы будут зависимы по импульсам в некоторых точках конфигурационного пространства;

• Если натуральная механическая система с компактным гладким конфигурационным многообразием, отличным от тора, имеет полный набор линейных и независимых первых интегралов, то не существует канонического преобразования координат, в которых каждый из этих интегралов был бы циклическим.

Приведены примеры систем (в том числе неголономных, а также с неориентируемым конфигурационным многообразием), в которых применимы доказанные утверждения. Для некоторых систем проведен анализ динамики движения на инвариантных уровнях.

**По теме диссертации опубликованы следующие работы:**


1. Кугушев Е.И., Мельдианова В.А. Многообразия уровней линейных интегралов механических систем // Вестн. Моск. ун-та, сер.1 мат.,мех., 2007, N3, 44-50с.

2. Мельдианова В.А., Кугушев Е.И. Об инвариантных многообразиях механических систем. // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 19, 2002-32с.

3. Мельдианова В.А., Кулешов А.С., Кугушев Е.И. О многообразиях уровня линейных интегралов механических систем. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 15, 2003-20с.

4. Мельдианова В.А. Взаимосвязь конфигурационного многообразия с многообразием уровня линейных интегралов механических систем. // Сборник трудов конференции-конкурса молодых ученых, Москва, 12.10-14.10.2004г., под ред. Г.Г. Черного и В.А. Самсонова, М., МГУ, 2004 г. с. 165-168.

5. Мельдианова В.А. О волчке Эйлера с эксцентриком // Препринт МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006-32с.

Подписано в печать 12.04.2007 г.
Формат 60×90 1/16.    Усл. печ. л. 1.0
Заказ    Тираж 50 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета