МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи
УДК 515.12

Комбаров Анатолий Петрович

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТИПА НОРМАЛЬНОСТИ И СЧЕТНОЙ ПАРАКОМПАКТНОСТИ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА 2007

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А. В. Иванов

доктор физико-математических наук, профессор П. В. Семенов

доктор физико-математических наук, профессор Л. Б. Шапиро

Ведущая организация: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится ___ ________ 2007 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан ___ ________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Класс нормальных пространств, занимающий одно из центральных мест в общей топологии, был определен в 1923 году Титце [1] и в 1924 году П.С.Александровым и П.С.Урысоном [2]. Свойство нормальности ранее появилось и у Вьеториса [3]. Условие нормальности топологического пространства, состоящее в том, что *"всякие два лежащих в нем непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности"* [4], является некоторым естественным ограничением на топологию пространства. Такого рода ограничения принято называть аксиомами отделимости. Возникновение аксиом отделимости связано с именами Ф. Хаусдорфа, Ф. Рисса, Л. Вьеториса, Г. Титце, П. С. Александрова, П. С. Урысона, А. Н. Колмогорова, А. Н. Тихонова. Хорошо известно, что упомянутое выше "внутреннее" определение нормальности может быть сформулировано и "внешним" образом, поскольку важнейшим характеристическим свойством нормальных пространств является фундаментальная *лемма Урысона* [5] о возможности функционального разделения непересекающихся замкнутых множеств в нормальном пространстве.

Класс счетно паракомпактных пространств был независимо введен в 1951 году Даукером [6] и Катетовым [7]. Топологическое пространство называется счетно паракомпактным, если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Даукер

[1] Tietze H. Beiträge zur allgemeinen Topologie I // Math. Ann. — 1923. — V. 88. — P. 290–312.

[2] Alexandroff P. , Urysohn P. Zur Theorie der topologischen Räume// Math.Ann. — 1924. — V.92. — P.258–266.

[3] Vietoris L. Stetige Mengen// Monatsh. für Math. und Phys. — 1921.— V.31.— P.173–204.

[4] Александров П. С. , Урысон П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах. — М.: Наука, 1971.

[5] Urysohn P. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen // Math.Ann. — 1925. — V.94. — P.262–295.

[6] Dowker C.H. On countably paracompact spaces // Canad. Journ. of Math. — 1951. — V. 3. — P. 219–224.

[7] Katětov M. Measures in fully normal spaces // Fund. Math. — 1951. — V. 38. — P.73–84.

доказал, что топологическое пространство X нормально и счетно паракомпактно в том и только в том случае, когда произведение $X \times [0;1]$ нормально. Нормальные пространства, не являющиеся счетно паракомпактными, получили название даукеровских. Задача построения даукеровского пространства двадцать лет была известной задачей общей топологии и была решена в 1971 году М.Э.Рудин [8].

В общей топологии и её приложениях большое значение имеет конструкция тихоновского произведения. Широко известны теоремы общей топологии, характеризующие топологические свойства пространств в терминах нормальности произведений. Теорема Даукера только что упоминалась. Напомним еще несколько примеров. Тамано доказал, что пространство X является паракомпактом в том и только в том случае, когда произведение $X \times \beta X$ нормально. Яджима в 1998 году показал [9], что для тихоновского пространства X нормальность подпространства $(X \times \beta X) \cup (\beta X \times X)$ квадрата $(\beta X \times X)^2$ эквивалентна линделёфовости пространства X. В 1971 году Нобл [10] доказал, что пространство компактно в том и только в том случае, когда любая степень этого пространства нормальна. Согласно знаменитой теореме Катетова 1948 года [11], если произведение $X \times Y$ наследственно нормально, и пространство Y содержит счетное незамкнутое множество, то каждое замкнутое подмножество пространства X является G_δ-множеством. В 1971 году Зенор [12] показал, что, если произведение $X \times Y$ наследственно счетно паракомпактно, то либо X совершенно нормально, либо все счетные дискретные подпространства Y замкнуты в Y. Естественно возникающая проблема одновременного обобщения теоремы Катетова и теоремы Зенора была поставлена в 1980 году в работе Ван Дауэна [13]. Непосредственным след-

---

[8] Rudin M.E. A normal space X for which $X \times I$ is not normal// Fund. Math. — 1971. — V. 73. — P.179–176.

[9] Yajima Y. Analogous results to two classical characterization of covering properties by products// Topology Appl. — 1998. — V. 84. — P. 3–7.

[10] Noble N. Products with closed projections II// Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 160 — P. 169–183.

[11] Katětov M. Complete normality of Cartesian products // Fund. Math. — 1948. — V. 35. — P. 271–274.

[12] Zenor P. Countable paracompactness in product spaces// Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — V.30. — P.199–201.

[13] van Douwen E. K. Covering and separation properties of box products // Surveys in

ствием теоремы Катетова является метризуемость компакта, куб которого наследственно нормален, и совершенная нормальность компакта, квадрат которого наследственно нормален. В 1948 году Катетов поставил свою знаменитую проблему о метризуемости компакта, квадрат которого наследственно нормален [11]. Контрпример в предположении MA$+\neg$CH был построен в 1977 году Никошем [14]. Другой контрпример в предположении CH был построен в 1993 году Грюнхаге [15]. В 2002 году Ларсон и Тодорчевич [16] форсингом построили модель теории множеств, в которой справедлив положительный ответ на проблему Катетова, и тем самым доказали независимость проблемы Катетова от системы аксиом ZFC. В связи с проблемой Катетова Грюнхаге [17] в 1984 году доказал, что из наследственной паракомпактности квадрата компакта следует его метризуемость, и более того, из паракомпактности подпространства $X^2 \setminus \Delta$ следует метризуемость X, если X — компакт. В 1990 году в работе [18] было доказано, что компакт X, нормальный вне диагонали, то есть такой, что пространство $X^2 \setminus \Delta$ нормально, удовлетворяет первой аксиоме счетности. В 1993 году Грюнхаге построил пример нормального вне диагонали компакта, не являющегося совершенно нормальным [15]. В 1997 году Д.В.Малыхин [19] доказал, что счетно компактное нормальное вне диагонали пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. В знаменитой работе А.Стоуна 1948 года [20], посвященной доказательству паракомпактности метрических пространств, устанавливаются некоторые

General Topology/ G.M.Reed, ed. — New York: Academic Press, 1980. — P. 55–129.

[14]Nyikos P. A compact nonmetrizable space P such that P^2 is completely normal// Topology Proc. — 1977. — V. 2. — P. 359–363.

[15]Gruenhage G., Nyikos P.J. Normality in X^2 for compact X// Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 340. — P. 563–586.

[16]Larson P., Todorčević S. Katětov's problem// Trans. Amer. Math. Soc. — 2002. — V. 354 — P. 1783–1791.

[17]Gruenhage G. Covering properties on $X^2 \setminus \Delta$, W-sets, and compact subsets of Σ-products// Topol. Appl. — 1984. — V. 17 — P. 287–304.

[18]Arhangel'skii A. V. , Kombarov A. P. On ∇-normal spaces // Topology Appl. — 1990. — V. 35. — P. 121–126.

[19]Малыхин Д. В. Счетно компактное ∇-нормальное пространство имеет счетный характер// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1997. №5.— С. 31–33.

[20]Stone A. H. Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — V. 54. — P. 977–982.

достаточные условия нормальности произведения двух пространств, а именно, произведение метрического пространства и нормального счетно компактного пространства нормально. В 1958 г. Дьедонне [21] доказал более общую теорему: произведение паракомпакта с первой аксиомой счетности и нормального счетно компактного пространства нормально. В той же работе А.Стоуна [20] доказана ненормальность произведения несчетного числа копий пространства натуральных чисел.

Важную роль при изучении несчетных произведений играют Σ-произведения. Σ-произведение определяется как подпространство произведения, состоящее из всех точек, отличающихся от некоторой фиксированной точки только на счетном числе координат. Σ-произведения были определены в 1959 году Корсоном [22], но сама конструкция Σ-произведения была известна гораздо раньше. Ещё в 1938 году Л.С.Понтрягин [23] использовал конструкцию Σ-произведения для построения примера счетно компактного некомпактного пространства. Естественно рассматривать Σ-произведения, не совпадающие с произведением пространств. Σ-произведения являются "наиболее просто устроенными" всюду плотными подпространствами несчетных произведений и значительно отличаются по своим топологическим свойствам от произведений. Например, Σ-произведение не может быть сепарабельным пространством, наследственно нормальным пространством, паракомпактным пространством. Эти и многие другие "экзотические" свойства Σ-произведений позволяют использовать их в качестве инструмента для построения контрпримеров в общей топологии. Но Σ-произведения обладают и рядом полезных "положительных" свойств. Например, каждое метрическое пространство может быть вложено в Σ-произведение пространств, гомеоморфных единичному отрезку [22]. Компакты, вкладывающиеся в Σ-произведение отрезков, обладают настолько замечательными свойствами, что были выделены в отдельный класс и получили название компактов Корсона [24]. Компакт, являющийся непрерывным образом

[21]Dieudonne J. Un critere de normalite pour les espaces produits// Coll. Math. — 1958. — V. 6. — P. 29–32.

[22]Corson H. H. Normality in subsets of product spaces // Amer. J. Math. — 1959. — V. 81. — P. 785–796.

[23]Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.-Л., 1938.

[24]Michael E. , Rudin M.E. A note on Eberlein compacts// Pacific J. Math. — 1977. —

Σ-произведения метризуемых компактов, также метризуем [22], а метрическое пространство, являющееся непрерывным образом Σ-произведения пространств, любое конечное произведение которых линделёфово, является линделёфовым и, следовательно, сепарабельным пространством [25]. Поскольку Σ-произведение не может быть паракомпактом, важной задачей является выяснение условий, при которых Σ-произведение является нормальным пространством. В 1959 году Корсон [22] доказал, что Σ-произведение полных метрических пространств нормально и счетно паракомпактно. В той же работе [22] Корсон сформулировал задачу: является ли нормальным пространством Σ-произведение метрических пространств или хотя бы Σ-произведение экземпляров рациональных чисел? Сначала был получен положительный ответ на второй вопрос Корсона: в 1973 году в работе [26] было доказано, что Σ-произведение метрических сепарабельных пространств нормально. В 1977 году С. П. Гулько [27] и М.Э.Рудин [28] независимо дали полный ответ на вопрос Корсона, доказав, что Σ-произведение метрических пространств является нормальным пространством. Формально к Σ-произведениям близки σ-произведения, но по своим топологическим свойствам эти подпространства произведения сильно различаются. Например, Σ-произведение компактов по теореме Понтрягина счетно компактно, но не компактно и, следовательно, не паракомпактно, а σ-произведение компактов финально компактно и, следовательно, паракомпактно. Упомянем также важную для данной работы теорему Корсона [22] о линделёфовости σ-произведения метрических сепарабельных пространств.

В общей топологии и её приложениях большое значение имеет изучение топологических свойств пространства всех (непустых) замкнутых подмножеств топологического пространства X или, другими словами,

---

V. 72 — P. 487–495.

[25]Engelking R. On functions defined on Cartesian products // Fund. Math. — 1966. — V. 59. — P. 221–231.

[26]Комбаров А. П. , Малыхин В. И. О Σ-произведениях // ДАН СССР. — 1973. — Т. 213. — С. 774–776.

[27]Гулько С. П. О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237. — С. 505–508.

[28]Handbook of Set-Theoretic Topology / Kunen K. and Vaughan J. E., eds. — Amsterdam: North-Holland, 1984.

экспоненциального пространства $\exp(X)$ в топологии Вьеториса. Теория экспоненциальных пространств оформилась в качестве самостоятельного направления общей топологии после работы Э.Майкла 1951 года [29], в которой были изучены общие вопросы, связанные с фундаментальными топологическими свойствами экспоненциальных пространств. Еще в 1922 году Вьеторис [30] доказал, что компактность пространства X эквивалентна компактности пространства $\exp(X)$ и, следовательно, из компактности пространства X следует нормальность $\exp(X)$. В 1955 году В. М. Иванова [31] показала, что из нормальности $\exp(X)$ следует счетная компактность пространства X. В 1970 году Кислинг [32], предполагая континуум-гипотезу, доказал, что из нормальности $\exp(X)$ следует компактность пространства X. В 1973 году В. И. Малыхиным и Б. Э. Шапировским [33] теорема Кислинга была распространена на более широкий класс моделей. И, наконец, в 1975 году Н. В. Величко [34] доказал эту теорему в ZFC, то есть без каких-либо дополнительных теоретико-множественных гипотез. Теория экспоненциальных пространств оказалась чрезвычайно полезной для такого важного и интенсивно развивающегося в последние годы направления общей топологии как изучение геометрических свойств ковариантных функторов. Особенно необходимо отметить здесь работы В.В.Федорчука [35], Е.В.Щепина [36], А.В.Иванова [37],

[29]Michael E. Topologies on spaces of subsets// Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — V. 71 — P. 152–182.

[30]Vietoris L. Bereiche zweiter Ordnung// Monatsh. für Math. und Phys. — 1922.— V.32.— P.258–280.

[31]Иванова В. М. К теории пространств подмножеств// ДАН СССР.— 1955.— Т.101.—С.601–603.

[32]Keesling J. On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces // Pacific Journal of Math.— 1970.—V.33.—P.657–667.

[33]Малыхин В. И., Шапировский Б. Э. Аксиома Мартина и свойства топологических пространств// ДАН СССР— 1973.—Т.213.— С.532–535.

[34]Величко Н. В. О пространстве замкнутых подмножеств// Сиб. матем. ж.— 1975.— Т.16.— С.627–629.

[35]Федорчук В. В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов// Успехи математических наук — 1984. — Т.39. — С.169–208.

[36]Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов// Успехи математических наук — 1981. — Т.36. — С.3–62.

[37]Иванов А.В. О функторах конечной степени и $\varkappa$-метризуемых бикомпактах// Сибирский математический журнал. — 2001. — Т. 42. — С. 60–68.

Л.Б.Шапиро [38]. В середине 70-х годов Е.В.Щепин, выделив ряд естественных условий, ввел важное понятие нормального функтора, включающее в себя и степенной функтор и конструкцию экспоненциального пространства. В 1989 году В.В.Федорчук [39] доказал теорему: если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 компакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален, то X — метризуемый компакт. Теорема Федорчука является обобщением классической теоремы Катетова о кубе. М.М.Чобан [40] доказал, что если экспоненциальное пространство $\exp(X)$ является наследственно нормальным пространством, то X — метризуемый компакт.

Понятие нормального пространства появилось в прошлом веке на начальном этапе развития общей топологии, возникновение которой оказалось следствием перестройки оснований математического анализа, происходившей в течение девятнадцатого века. По образному выражению известнейшего американского тополога М.Э.Рудин “понятие нормальности находится на границе, где теоретико-множественная топология переходит от математического анализа к теории множеств” [41]. Таким образом, естественной задачей общей топологии является задача выяснения границ действия многих результатов, вовлекающих свойства нормальности и счетной паракомпактности, в случае, когда эти свойства заменяются на более общие топологические свойства, близкие к нормальности или счетной паракомпактности. При этом возможны следующие обобщения свойства нормальности: 1) можно ослаблять условия на функции, разделяющие замкнутые множества; 2) можно сужать класс разделяемых замкнутых множеств; 3) можно расширять класс множеств, с помощью которых разделяются замкнутые множества. Все три логические возможности рассматриваются и исследуются в диссертации.

Общеизвестно, что аксиомы T_i , $i \leq 3\frac{1}{2}$, сохраняются тихоновскими

[38] Шапиро Л. Б. Об однородности диадических бикомпактов// Матем. заметки. — 1993. — Т. 54, № 4. — С. 117–139.

[39] Федорчук В. В. К теореме Катетова о кубе // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1989. №4.— С. 93–96.

[40] Чобан М. М. Многозначные отображения и их приложения: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — Тбилиси, 1979.

[41] Grunberg R. , Junqueira L.R., Tall F.D. Forcing and normality// Topol. Appl. — 1998. — V. 84 — P. 145–174.

произведениями. Простейшие примеры показывают, что свойство нормальности (аксиома T_4) разрушается даже при возведении пространства в квадрат. Таким образом среди общих проблем в этом направлении естественно выделить следующие: (I) Нахождение достаточных условий, при выполнении которых подпространство произведения или само произведение обладает каким-либо свойством типа нормальности или счетной паракомпактности. (II) Выяснение характера ограничений на сомножители, которые накладывает условие типа нормальности или счетной паракомпактности, выполняющееся в подмножествах произведения. (III) Выяснение характера ограничений на пространство X, которые накладывает условие, что пространство $\mathcal{F}(X)$ обладает каким-либо свойством типа нормальности или счетной паракомпактности, если $\mathcal{F}$ — некоторый нормальный функтор. Проблемы I, II и III, а также проблема выяснения границ, внутри которых остаются справедливыми аналоги классических теорем о произведениях и экспоненциальных пространствах, вместе с вышеприведенной проблемой одновременного обобщения теорем Катетова и Зенора и послужили отправными моментами диссертационной работы.

Цель работы — изучение классов топологических пространств, близких к нормальным и к счетно паракомпактным пространствам, усиление ряда результатов, касающихся нормальности и счетной паракомпактности в тихоновских произведениях, экспоненциальных пространствах, пространствах вида $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ — некоторый нормальный функтор, решение ряда естественных задач общей топологии, относящихся к свойствам типа нормальности и счетной паракомпактности.

Основные методы исследования. Используются различные методы общей топологии, и в частности, методы теории кардинальнозначных инвариантов; методы комбинаторной теории множеств, методы теории нормальных функторов, а также оригинальные методы и подходы, в том числе, специально разработанный метод изучения топологии пространства с помощью новых понятий секвенциальности и компактности по непустому множеству свободных ультрафильтров.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Доказана эквивалентность свойства нормальности Σ-произведения паракомпактных p-пространств Σ свойству счетности тесноты пространства Σ.

2) Решена поставленная Ван Дауэном [13] проблема одновременного обобщения теоремы Катетова 1948 года и теоремы Зенора 1971 года, а именно, доказано, что, если произведение $X \times Y$ наследственно δ-нормально, то или пространство X совершенно нормально или все счетные подмножества пространства Y замкнуты. В частности, доказано, что счетно компактное пространство, куб которого наследственно δ-нормален, является метризуемым компактом.

3) Доказано, что класс паранормальных в смысле Ван Дауэна пространств совпадает с классом нормальных пространств. Полученный результат позволил дать ответы на некоторые вопросы, поставленные Ван Дауэном в 1980 году.

4) Доказано, что, если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 и компакта X пространство $\mathcal{F}(X) \setminus X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, то X — метризуемый компакт.

5) Доказано, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в следующих случаях: (1) если X — компакт, слабо нормальный вне диагонали; (2) если выполняется теоретико-множественное предположение PFA и X — компакт, F_σ-счетно паракомпактный вне диагонали; (3) если X — счетно компактное пространство, регулярное и D-нормальное вне диагонали.

6) Доказана эквивалентность утверждений: (1) пространство X является компактом; (2) пространство X счетно компактно и экспоненциальное пространство $\exp(X)$ является слабо нормальным пространством; (3) пространство $\exp(X)$ является F_σ-δ-нормальным пространством.

7) Доказана эквивалентность утверждений: (1) пространство X является метризуемым компактом; (2) пространство $\exp(X)$ является наследственно δ-нормальным пространством; (3) пространство $\exp(X)$ является наследственно $\mathcal{C}^*$-нормальным пространством; (4) пространство $\exp(X)$ является наследственно D-нормальным пространством.

8) Доказана эквивалентность утверждений: (1) пространство X компактно; (2) любая степень пространства X является слабо нормальным пространством; (3) любая степень пространства X является F_σ-δ-нормальным пространством.

9) Внутренние характеристики компактов Корсона и Эберлейна распространены на существенно более широкий класс M-пространств, введенных Моритой [42].

10) Получены аналоги теоремы Зенора о наследственной счетной паракомпактности произведения для слабых форм счетной паракомпактности. Доказано, что точечно-wE диадический компакт метризуем.

11) Доказано, что для пространства $C_p(X)$ непрерывных действительнозначных функций в топологии поточечной сходимости свойство F_σ-δ-нормальности эквивалентно свойству нормальности, а свойство наследственной δ-нормальности эквивалентно свойству совершенной нормальности.

12) Доказано, что паракомпактное Σ-пространство X имеет G_δ-диагональ в том и только в том случае, когда пространство $X^2 \setminus \Delta$ допускает локально-конечное (в $X^2 \setminus \Delta$) прямоугольное открытое покрытие. В частности, паракомпактное p-пространство X метризуемо в том и только в том случае, когда пространство $X^2 \setminus \Delta$ допускает локально-конечное (в $X^2 \setminus \Delta$) прямоугольное открытое покрытие.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение в различных разделах общей топологии: в теории сходимости, в теории кардинальнозначных инвариантов, в топологических вопросах теории категорий, в теории пространств отображений и, в частности, в теории топологических пространств функций.

Апробация результатов. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре по общей топологии имени П.С.Александрова под руководством профессоров В.В.Федорчука,

[42] Morita K. Products of normal spaces with metric spaces // Math. Ann. — 1964. — V. 154. — P.365–382.

А.В.Архангельского, Б.А.Пасынкова, В.И.Пономарева, В.В.Филиппова, на научной конференции "Ломоносовские чтения", на Общемосковском топологическом семинаре, на Международной топологической конференции, посвященной 100-летию П.С.Александрова (Москва, 1996), на Всероссийских и международных топологических конференциях "Александровские чтения" (1998 — 2006), на Всесоюзных и международных конференциях и симпозиумах по топологии и её приложениям (Минск, 1977; Тирасполь, 1979, 1985, 1991; Ленинград, 1982; Приморско(Болгария), 1984; Баку, 1987; Берн(Швейцария), 1991; Киев, 1992; Прага (Чехия), 1981, 1988, 1996, 2001; Кралево-Матарушка Баня (Югославия), 1998; Львов, 2002; Эгион (Греция), 2006), на Международной конференции по геометрической топологии, дискретной геометрии и теории множеств, посвященной столетию Л.В.Келдыш (Москва, 2004).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 30 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация объемом 211 страниц состоит из введения, семи глав, разбитых на 27 параграфов, и списка литературы из 185 наименований, включая 30 работ автора.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач, сформулированы основные результаты.

Первая глава. Исследуются классические свойства нормальности и счетной паракомпактности в произведениях. Основным результатом первой главы является доказанная в § 1.3 теорема 1, являющаяся усилением ряда теорем, принадлежащих Корсону, М.Э. Рудин, С.П. Гулько.

Теорема 1. *Пусть Σ является Σ-произведением паракомпактных p-пространств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1. *теснота Σ счетна;* 2. *Σ коллективно нормально;* 3. *Σ нормально;* 4. *Σ нормально и счетно паракомпактно.*

Также в § 1.3 рассматриваются вопросы, связанные с нормальностью $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведений. Доказывается следующие теоремы.

Теорема 2. *Если любое конечное произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, нормально, и все X_α являются $\mathfrak{m}$-ограниченными пространствами тесноты $\leq \mathfrak{m}$, то $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, нормально и является $\mathfrak{m}$-ограниченным пространством.*

Теорема 3. *Если $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ является $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведением компактов, то теснота пространства $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ не превосходит $\mathfrak{m}$ в том и только в том случае, когда пространство $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ нормально.*

Приводится пример ненормального $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведения компактов, показывающий существенность условия, налагаемого на тесноту.

В § 1.4 изучаются σ-произведения. Согласно определению, принадлежащему Корсону, σ-произведение пространств состоит из всех тех точек Σ-произведения, которые отличаются от фиксированной точки лишь на конечном числе координат. В § 1.4 доказывается теорема 4.

Теорема 4. *σ-Произведение пространств, любое конечное произведение которых является тихоновским $\mathfrak{m}^+$-финально компактным (соответственно, является паракомпактным) пространством, является $\mathfrak{m}^+$-финально компактным (соответственно, паракомпактным) пространством.*

Известны примеры ненормальных σ-произведений пространств, любое конечное произведение которых нормально [43]. В § 1.4 получены достаточные условия нормальности σ-произведения:

Теорема 5. *Если любое конечное произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, нормально и все пространства X_α являются $\mathfrak{m}$-компактными (соответственно, $\mathfrak{m}$-ограниченными) пространствами характера (соответственно, тесноты) $\leq \mathfrak{m}$, то σ-произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, нормально и $\mathfrak{m}$-паракомпактно.*

§ 1.1 имеет вспомогательный характер, но в то же время представляет и самостоятельный интерес, поскольку в этом параграфе определяются и

[43] Chiba K. The strong paracompactness of σ-products // Scientiae Math. — 1999. — V. 2. — P. 285–292.

изучаются новые понятия секвенциальности и компактности по непустому множеству ультрафильтров $\mathcal{P} \subseteq \beta\omega \setminus \omega$. Понятие секвенциальности по множеству ультрафильтров позволяет дать единое описание секвенциальных пространств и пространств счетной тесноты. Параллельно в § 1.1 вводятся понятия сильно (слабо) $\mathcal{P}$-компактных пространств. Сильно (слабо) $\mathcal{P}$-компактные пространства охарактеризованы с помощью замкнутых проекций. Выясняются условия, при выполнении которых произведение является секвенциальным по множеству ультрафильтров. В частности, доказывается

Теорема 6. *Произведение двух слабо $\mathcal{P}$-секвенциальных пространств, одно из которых локально сильно $\mathcal{P}$-компактно, является слабо $\mathcal{P}$-секвенциальным.*

При $\mathcal{P}= \beta\omega \setminus \omega$ получаем, что произведение двух пространств счетной тесноты, одно из которых является локально ω-ограниченным, имеет счетную тесноту, что является усилением известной теоремы В.И.Малыхина [44], доказавшего, что теснота произведения двух пространств счетной тесноты, одно из которых локально компактно, счетна.

Предложенный метод изучения топологии пространства с использованием свободных ультрафильтров использован в § 1.2 для доказательства теорем о нормальности произведения двух пространств.

Теорема 7. *Произведение сильно (соответственно, слабо) $\mathcal{P}$-секвенциального паракомпакта и нормального слабо (соответственно, сильно) $\mathcal{P}$-компактного пространства коллективно нормально и счетно паракомпактно.*

Теорема 7 является усилением теорем Стоуна [20], Дьедонне [21], Нобла [10] и автора [45]. Также в § 1.2 с помощью результатов В.В.Федорчука [46] и А.Осташевского [47] доказывается, что невозможен

[44]Малыхин В. И. О тесноте и числе Суслина в $\exp X$ и в произведении пространств // ДАН СССР. — 1972. — Т. 203. — С. 1001–1003.

[45]Комбаров А. П. О произведении нормальных пространств. Равномерности на Σ-произведениях // ДАН СССР. — 1972. — Т. 205. — С. 1033–1035.

[46]Федорчук В. В. Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств// Матем. сб. — 1976.—Т.99. — С. 3–33.

[47]Ostaszewski A. J. On countably compact, perfectly normal spaces// J.London Math.

положительный ответ на естественно возникающий вопрос: нормально ли произведение паракомпакта счетной тесноты и нормального счетно компактного пространства? Далее, показывается, что *нормальность произведения паракомпакта счетной тесноты и совершенно нормального счетно компактного пространства не зависит от аксиом теории множеств* ZFC. Отметим, что вопрос о существовании "наивного" примера ненормального произведения паракомпакта счетной тесноты и нормального счетно компактного пространства остается открытым.

§ 1.5, результаты которого затем используются в § 1.6, посвящен замкнутым $\mathfrak{m}$-компактным отображениям и уплотнениям. Попутно усиливаются результаты работы А.В.Архангельского [48].

В § 1.6 внутренние характеристики компактов Корсона и Эберлейна распространяются на M-пространства. Пусть теперь Σ является Σ-произведением отрезков. Напомним, что подпространство $\Sigma_* \subseteq \Sigma$ определяется как совокупность точек $x = \{x_\alpha\}$, для которых множество индексов $\{\alpha \in A : x_\alpha \geq \epsilon\}$ является конечным для любого $\epsilon > 0$. Подпространство Σ_* называется Σ_*-произведением отрезков. Компактные подмножества Σ_* — это в точности компакты Эберлейна, то есть компактные подмножества банаховых пространств в слабой топологии [49]. Хорошо известны следующие внутренние характеристики компактов Корсона и Эберлейна: компакт X является компактом Корсона (Эберлейна) в том и только в том случае, когда X обладает точечно-счетной (σ-точечно-конечной) системой открытых F_σ-множеств, T_0-разделяющей точки X [24,49]. Обобщением характеристики компактов Корсона является теорема 8, в доказательстве которой свойство нормальности играет существенную роль.

Теорема 8. *Пусть X является M-пространством. Тогда X гомеоморфно некоторому подпространству Σ-произведения отрезков в том и только в том случае, когда X является нормальным пространством с точечно-счетной системой открытых F_σ-множеств, T_0-разделяющей*

Soc. — 1976. — V. 14. — P. 501–516.

[48]Архангельский А. В. О совершенных отображениях и уплотнениях //ДАН СССР. — 1967. — Т. 176. — С. 983–986.

[49]Rosenthal H.P. The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces// Compos. math. — 1974. — V. 28. — P.83–111.

точки пространства X.

Обобщением внутренней характеристики компактов Эберлейна в классе M-пространств является теорема 9, также доказанная в § 1.6.

Теорема 9. *Пусть X является M-пространством. Тогда следующие условия эквивалентны:* 1. *X гомеоморфно некоторому подпространству Σ_*-произведения отрезков;* 2. *X — паракомпакт с σ-точечно-конечной системой открытых F_σ-множеств, T_0-разделяющей точки X;* 3. *X является нормальным пространством с σ-точечно-конечной системой открытых F_σ-множеств, T_0-разделяющей точки X.*

Вторая глава. Рассматривается свойство типа нормальности, определенное А.В.Архангельским [50]. Пространство X называется слабо нормальным над классом $\mathcal{P}$ топологических пространств, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2 из X найдутся пространство $P \in \mathcal{P}$ и непрерывное отображение $f : X \to P$, такие, что $f(F_1) \cap f(F_2) = \emptyset$. Пространства, слабо нормальные над классом метрических сепарабельных пространств, называются слабо нормальными. Из леммы Урысона вытекает, что всякое нормальное пространство слабо нормально. Обратное утверждение неверно, поскольку, например, любое пространство, уплотняющееся на метрическое сепарабельное пространство, слабо нормально и даже наследственно слабо нормально. Уместно заметить, что понятие слабо нормального пространства было введено А.В.Архангельским в связи с теорией расщепляемых пространств [51]. Слабая нормальность является одновременным обобщением свойств нормальности и расщепляемости. Примером слабо нормального пространства, не являющимся ни нормальным ни расщепляемым пространством, является общеизвестная плоскость Тихонова: $((\omega_1 + 1\ ) \times (\omega + 1\ )\ ) \setminus \{(\omega_1, \omega\ )\}$.

В § 2.1 рассматривается слабая нормальность экспоненциального пространства. Поскольку из нормальности экспоненциального пространства

---

[50] Arhangel'skii A. V. Divisibility and cleavability of spaces.// Recent Developments of General Topology and its Applications. — Math. Research 67.— Berlin: Academie-Verlag, 1992.—P.13–26.

[51] Arhangel'skii A. V. A survey of cleavability // Topology Appl. — 1993. — V. 54. — P. 141–163.

$\exp(X)$ по теореме Ивановой [31] следует счетная компактность пространства X, получаем, что из условия “$\exp(X)$ нормально”, содержащегося в теореме Величко [34], следует условие “X счетно компактно и $\exp(X)$ слабо нормально”. Поэтому следующая теорема является обобщением теоремы Величко [34].

Теорема 10. *Пусть X счетно компактно и $\exp(X)$ слабо нормально. Тогда пространство X является компактом.*

Показывается, что слабая нормальность (даже наследственная слабая нормальность) пространства $\exp(X)$ не влечет компактность X. Иными словами, условие счетной компактности пространства X в формулировке теоремы 10 является существенным, и в этом смысле теорема 10 неулучшаема.

В § 2.2 получено обобщение теоремы Нобла [10] о нормальности степеней, а именно, доказано, что *пространство X компактно в том и только в том случае, когда любая степень пространства X слабо нормальна.*

Основным результатом § 2.3 является следующая теорема, представляющая собой усиление вышеупомянутого результата из работы [18].

Теорема 11. *Слабо нормальный вне диагонали компакт удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Третья глава посвящена изучению слабых форм счетной паракомпактности. В § 3.1 с помощью хорошо известной характеристики счетно паракомпактных пространств (см. [52], 5.2.1) вводится новый класс ω-счетно паракомпактных пространств. Всякое счетно паракомпактное пространство ω-счетно паракомпактно. В § 3.1 доказывается, что *каждое псевдонормальное (а значит, и каждое нормальное) пространство ω-счетно паракомпактно.* Доказывается аналог теорем Катетова и Зенора для наследственно ω-счетно паракомпактных произведений.

В § 3.2 с использованием характеристики счетно паракомпактных пространств, предложенной Мансфилдом (см. [52], 5.5.17), вводятся слабые формы счетной паракомпактности sE, E и wE. Пространство X

[52]Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир: 1986.

обладает свойством sE (соответственно, E), если каждая счетная дискретная система $\{F_i : i < \omega\}$ замкнутых счетных подмножеств (соответственно, одноточечных подмножеств) пространства X “раздувается” до локально конечной системы открытых подмножеств. Пространство X обладает свойством wE, если каждое бесконечное замкнутое дискретное подмножество пространства X содержит бесконечное подмножество, точки которого “раздуваются” до локально конечной системы открытых подмножеств. Доказывается, что *всякое ω-счетно паракомпактное пространство обладает свойством sE.*

В § 3.3 изучаются замкнутые отображения на q-пространства. Известно, что, если f является замкнутым отображением пространства X на q-пространство Y, то граница полного прообраза $f^{-1}(y)$ является счетно компактным множеством для каждого $y \in Y$, если пространство X нормально [53] или является счетно паракомпактным пространством [54]. Следующая теорема является одновременным обобщением теорем Майкла и Харлея.

Теорема 12. *Пусть пространство X обладает свойством wE, пространство Y является q-пространством и отображение $f : X \to Y$ пространства X на пространство Y замкнуто.*

Тогда граница $\mathrm{Fr}(f^{-1}(y))$ является счетно компактным множеством для каждой точки $y \in Y$.

Приводится пример, показывающий, что свойство wE в условии теоремы 12 является существенным.

В § 3.4 доказываются теоремы, являющиеся аналогами теоремы Зенора о наследственной счетной паракомпактности произведения для введенных свойств типа счетной паракомпактности. Основным результатом § 3.4 является следующая теорема.

Теорема 13. *Если любое подпространство произведения $X \times Y$ обладает свойством sE, пространство Y регулярно и содержит счетное незамкнутое подмножество, то каждое счетное замкнутое подмно-*

[53] Michael E. A note on closed maps and compact sets// Israel J. Math. — 1964. — V.2 — P. 173–176.

[54] Harley P.W. On countably paracompact spaces and closed maps// Portug. Math. — 1989. — V. 46 — P. 115–119.

жество пространства X является G_δ-множеством.

Пусть $\mathcal{Q}$ — некоторое топологическое свойство. Будем говорить, что пространство X обладает свойством точечно-$\mathcal{Q}$ (соответственно, обладает свойством F_σ-$\mathcal{Q}$; обладает свойством $\mathcal{Q}$ вне диагонали), если для каждой точки $x \in X$ подпространство $X \setminus \{x\}$ (соответственно, каждое F_σ-подмножество пространства X; пространство $X^2 \setminus \Delta$) обладает свойством $\mathcal{Q}$.

Теорема 14. *Если произведение $X \times Y$ обладает свойством точечно-F_σ-sE, пространство Y регулярно и содержит счетное незамкнутое подмножество, то каждая точка пространства X является G_δ-точкой.*

Теорема 15. *Если произведение $X \times Y$ обладает свойством точечно-E и Y содержит счетное незамкнутое подмножество M с единственной предельной точкой $y \in Y$, то каждая точка пространства X является G_δ-точкой.*

Теорема 16. *Если произведение $X \times Y$ обладает свойством точечно-wE и Y содержит сходящуюся последовательность, то каждая точка пространства X является G_δ-точкой.*

Следствие. *Пусть X является бесконечным компактом. Тогда пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в том и только в том случае, когда X^2 обладает свойством точечно-wE и X содержит сходящуюся последовательность $\omega + 1$.*

Приводится пример, показывающий, что условие $X \supseteq \omega + 1$ является существенным и не может быть опущено.

В § 3.5 показывается, что несчетное произведение неодноточечных пространств обязательно содержит подпространства, не обладающие свойством wE. Также в § 3.5 доказывается, что *точечно-wE диадический компакт метризуем.* Это утверждение является значительным усилением известной теоремы Б.А.Ефимова (см. [52], 3.12.12(k)), доказавшего метризуемость наследственно нормального диадического компакта.

В § 3.6 рассматриваются свойства типа счетной паракомпактности в пространстве $X^2 \setminus \Delta$. В частности, доказывается теорема 17.

Теорема 17. *Компакт, обладающий свойством F_σ-sE вне диагонали,* *удовлетворяет первой аксиоме счетности в каждой точке некоторого всюду плотного множества.*

Заметим, что пример компакта $X = \omega_1 + 1$ показывает, что даже из F_σ-псевдонормальности пространства $X^2 \setminus \Delta$ не следует первая аксиома счетности во всех точках X. Ситуация меняется, если F_σ-псевдонормальность усилить до F_σ-счетной паракомпактности и воспользоваться дополнительным теоретико-множественным предположением PFA, являющимся мощной версией известной аксиомы Мартина.

Теорема 18. [PFA] *Компакт, являющийся F_σ-счетно паракомпактным вне диагонали, удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Основным результатом § 3.7 является следующая теорема.

Теорема 19. *Если экспоненциальное пространство* $\exp(X)$ *регулярно и обладает свойством точечно-E, то пространство X является наследственно сепарабельным совершенно нормальным счетно компактным пространством.*

В § 3.8 рассматриваются паранормальные в смысле Ван Дауэна [13] пространства. Регулярное пространство X называется паранормальным, если для любой дискретной последовательности $\{F_n : n < \omega\}$ замкнутых подмножеств X найдутся открытые множества $\{U_{n,k} : n, k < \omega\}$, такие, что $F_n \subseteq U_{n,k}$ для всех $n, k < \omega$, и $\cap\{\overline{U_{n,k}} : n, k < \omega\} = \emptyset$ [13]. Паранормальность была введена Ван Дауэном в связи с попыткой одновременного обобщения классических теорем Катетова и Зенора о наследственно нормальных и наследственно счетно паракомпактных произведениях. Ван Дауэн полагал, что (регулярные) счетно паракомпактные пространства паранормальны ([13], p. 63), то есть, что паранормальность является слабой формой счетной паракомпактности, что неверно, поскольку справедлива теорема 20.

Теорема 20. *Класс паранормальных пространств совпадает с классом нормальных пространств.*

В статье [13] сформулированы следующие вопросы. 1) Если пространство Y содержит замкнутое подмножество, не являющееся регулярным G_δ-множеством, а пространство X содержит счетное незамкнутое подмножество, то содержит ли произведение $X \times Y$ подпространство, не являющееся паранормальным? ([13], p.64) 2) Если D является замкнутым дискретным подмножеством паранормального пространства X, то верно ли, что $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$? ([13], p.65) Доказанная теорема позволяет дать положительные ответы на эти вопросы Ван Дауэна. Отметим в связи со вторым вопросом, что для паранормальных пространств Ван Дауэн [13] получил более слабую оценку $|D| < 2^{d(X)}$.

Четвертая глава. Основным результатом четвертой главы является решение проблемы одновременного обобщения теоремы Катетова 1948 года [11] и теоремы Зенора 1971 года [12], а именно, в этой главе доказывается теорема 21.

Теорема 21. *Если произведение $X \times Y$ наследственно δ-нормально, то или пространство X совершенно нормально или все счетные подмножества пространства Y замкнуты.*

Следствие. *Счетно компактное пространство, куб которого является наследственно δ-нормальным пространством, метризуемо.*

Основное определение содержится в работе Дж.Мака [55]. Пространство называется δ-нормальным [55], если любые два непересекающихся замкнутых множества, одно из которых является регулярным G_δ-множеством, содержатся в непересекающихся окрестностях. При этом подмножество G топологического пространства называется регулярным G_δ-множеством, если оно является пересечением счетного числа замкнутых множеств, внутренности которых содержат множество G. Всякое нормальное пространство, очевидно, δ-нормально. Мак [55] доказал, что каждое счетно паракомпактное пространство является δ-нормальным. Таким образом свойство δ-нормальности является одновременным обобщением нормальности и счетной паракомпактности. В той же работе [55] Мак получил аналог теоремы Даукера: пространство X счетно паракомпактно в том и только в том случае, когда произведение $X \times [0;1]$ является δ-нормальным пространством.

В §4.1 изучаются F_σ-δ-нормальные пространства. В 1976 году Зенор

[55]Mack J. Countable paracompactness and weak normality properties// Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — V. 148 — P. 265–272.

(см. [52], 5.5.16(b)) доказал, что если все F_σ-подмножества произведения $X \times Y$ являются счетно паракомпактными пространствами, то либо X нормально, либо все счетные подмножества пространства Y замкнуты. Основным результатом § 4.1 является следующая теорема, представляющая собой обобщение вышеприведенной теоремы Зенора.

Теорема 22. *Если произведение $X \times Y$ является F_σ-δ-нормальным, то либо X нормально и счетно паракомпактно, либо все счетные подмножества пространства Y замкнуты.*

В качестве приложения теоремы 22 получаем еще одно обобщение теоремы Нобла о нормальности степеней: *пространство X является компактом в том и только в том случае, когда любая степень пространства X является F_σ-δ-нормальным пространством*, причем показывается, что условие F_σ-δ-нормальности не может быть ослаблено до условия δ-нормальности. Еще одно применение теоремы 22 относится к экспоненциальным пространствам, а именно, справедливо следующее усиление теоремы Величко.

Теорема 23. *Если экспоненциальное пространство* $\exp(X)$ *является F_σ-δ-нормальным пространством, то X является компактом.*

Показывается, что в теореме 23 нельзя ослабить условие F_σ-δ-нормальности до условия δ-нормальности. Далее, из теоремы 22 выводится *эквивалентность свойств F_σ-δ-нормальности и нормальности для пространства $C_p(X)$ непрерывных действительнозначных функций в топологии поточечной сходимости.*

В § 4.2 с использованием результатов, полученных в § 4.1, исследуется свойство наследственной δ-нормальности и, в частности, доказывается вышеприведенная теорема 21. Еще одним усилением теоремы Б.А.Ефимова является следующее утверждение: *наследственно δ-нормальный диадический компакт метризуем.* Также получено обобщение теоремы Чобана 1979 года [40], а именно, доказано, что, *если* $\exp(X)$ *наследственно δ-нормально, то X — метризуемый компакт.* В качестве еще одного следствия теоремы 21 получаем *эквивалентность наследственной δ-нормальности пространства $C_p(X)$ свойству совершенной нормальности $C_p(X)$.*

Пятая глава. В этой главе вводится новое понятие нормальности над классом топологических пространств. Пусть $\mathcal{U}$ — некоторый класс топологических пространств. Топологическое пространство X называется *нормальным над классом* $\mathcal{U}$ или $\mathcal{U}$*-нормальным*, если в X любые два непересекающихся замкнутых множества, одно из которых принадлежит классу $\mathcal{U}$, содержатся в непересекающихся окрестностях. Очевидно, все нормальные пространства $\mathcal{U}$-нормальны для любого класса $\mathcal{U}$. Отметим, что псевдонормальные пространства — это в точности $\mathcal{S}$-нормальные пространства, где $\mathcal{S}$ является классом всех счетных регулярных пространств. Пусть теперь $\mathcal{Q}$ — некоторый другой класс топологических пространств. Класс $\mathcal{U}$ будем называть $\mathcal{Q}$*-стабильным*, если для каждого $X \in \mathcal{U}$ и $Y \in \mathcal{Q}$ произведение $X \times Y$ принадлежит $\mathcal{U}$. Например, если $\mathcal{L}$ является классом всех линделёфовых пространств, то класс $\mathcal{L}$ является $\mathcal{S}$-стабильным. Основным результатом § 5.1 является еще одно обобщение теоремы Катетова.

Теорема 24. *Если произведение $X \times Y$ является наследственно $\mathcal{U}$-нормальным пространством, и класс $\mathcal{U}$ является $\mathcal{Q}$-стабильным, то или каждое замкнутое подмножество пространства X, принадлежащее классу $\mathcal{U}$, является регулярным $G_{\mathfrak{m}}$-множеством при*

$$\mathfrak{m} = \min\{|M| : M \in \mathcal{Q}, M \subset Y, M \neq \overline{M}\}$$

или все подмножества пространства Y, принадлежащие классу $\mathcal{Q}$, замкнуты.

Следствие. *Если произведение $X \times Y$ наследственно псевдонормально, то или всякое счетное замкнутое подмножество пространства X является регулярным G_δ-множеством или все счетные подмножества пространства Y замкнуты.*

Обозначим через $\mathcal{C}$ (соответственно, через $\mathcal{K}$) класс пространств, представимых в виде объединения счетного числа счетно компактных (соответственно, компактных) подпространств. Следствиями теоремы 24 являются две теоремы о кубе: *счетно компактное (соответственно, компактное) пространство, куб которого наследственно $\mathcal{C}$-нормален (соответственно, наследственно $\mathcal{K}$-нормален), метризуемо.*

В § 5.2 более подробно рассматривается класс $\mathcal{L}$-нормальных пространств, которые мы будем называть линделёф-нормальными. Заметим, что произведение $\omega_1 \times (\omega + 1\ )$ является наследственно линделёф-нормальным пространством, но замкнутое множество LIM всех счетных предельных ординалов в ω_1 не является G_δ-множеством в пространстве ω_1. Тем не менее, всякое замкнутое подмножество ω_1 со свойством Линделёфа является G_δ-множеством, что, в частности, следует из теоремы 25, которая также является аналогом теоремы Катетова.

Теорема 25. *Если произведение $X \times Y$ наследственно линделёф-нормально, то или всякое замкнутое подмножество со свойством Линделёфа пространства X является регулярным G_δ-множеством или все счетные подмножества пространства Y замкнуты.*

Следствием теоремы 25 является еще одна теорема о кубе: *компакт, куб которого является наследственно линделёф-нормальным пространством, метризуем*, причем в этой теореме условие компактности нельзя ослабить до условия счетной компактности.

Обозначим теперь через $\mathcal{C}^*$ класс пространств, представимых в виде счетного объединения счетно компактных совершенно нормальных сепарабельных подпространств.

Теорема 26. *Если* $\exp(X)$ *является наследственно $\mathcal{C}^*$-нормальным пространством, то X — метризуемый компакт.*

Следствие. [MA + ¬CH] *Если пространство* $\exp(X)$ *является наследственно линделёф-нормальным пространством, то X — метризуемый компакт.*

В § 5.3 вводится и изучается свойство совершенной $\mathcal{U}$-нормальности. Регулярное пространство X называется *совершенно $\mathcal{U}$-нормальным*, если замыкание $\overline{A}$ любого множества $A \subseteq X$, такого, что $A \in \mathcal{U}$, является функционально замкнутым множеством. В § 5.3 обобщается известная теорема Катетова о совершенно нормальных произведениях [11], причем следствием полученного обобщения теоремы Катетова является утверждение о том, что *счетное произведение совершенно линделёф-нормально в том и только в том случае, когда все конечные подпроизведения являются совершенно линделёф-нормальными пространствами.*

§ 5.4 посвящен нормальным функторам в смысле Е.В.Щепина [36].

В.В.Федорчук [35] доказал, что, если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 компакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален, то X — метризуемый компакт. Т.Ф.Жураев [56] по аналогии с теоремой Зенора о кубе заменил в теореме В.В.Федорчука наследственную нормальность компакта $\mathcal{F}(X)$ на наследственную счетную паракомпактность $\mathcal{F}(X)$. Понятие нормальности над классом пространств позволяет усилить эти результаты, а именно, следующая теорема является одновременным обобщением теорем В.В.Федорчука и Т. Ф. Жураева, причем метод доказательства восходит к работам М.Катетова [11] и В.В.Федорчука [35].

Теорема 27. *Если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 и компакта X пространство $\mathcal{F}(X)\backslash X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, то X — метризуемый компакт.*

Шестая глава. В 1981 году Бранденбург [57] в определении нормальности заменил непересекающиеся открытые множества, разделяющие замкнутые множества, замкнутыми G_δ-множествами. Получившееся свойство D-нормальности оказалось одновременным обобщением нормальности и свойства быть пространством с измельчением [57].

Хорошо известно, что из совершенной нормальности экспоненциального пространства $\exp(X)$ следует компактность и метризуемость пространства X. Известны два разнородных обобщения этого утверждения. В 1976 году В.В.Попов [58] доказал, что если пространство $\exp(X)$ регулярно и совершенно, то X — метризуемый компакт. М.М.Чобан [40] доказал, что если пространство $\exp(X)$ наследственно нормально, то X — метризуемый компакт. Основным результатом § 6.1 является теорема 28, представляющая собой одновременное обобщение теоремы В.В.Попова и теоремы М.М.Чобана.

Теорема 28. *Если пространство* $\exp(X)$ *наследственно D-нормально,*

[56] Жураев Т. Ф. Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 2000. №4.— С. 8–11.

[57] Brandenburg H. Separating closed sets by continuous mappings into developable spaces // Can. J. Math. — 1981. — V. 33. — P. 1420–1431.

[58] Попов В. В. О пространстве замкнутых подмножеств // ДАН СССР. — 1976. — Т. 229. — С. 1051–1054.

то X — метризуемый компакт.

В 1997 году Д.В.Малыхин [19] доказал, что счетно компактное нормальное вне диагонали пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Следующая теорема является усилением теоремы Д.В.Малыхина и основным результатом § 6.2.

Теорема 29. *Счетно компактное пространство, являющееся регулярным и D-нормальным вне диагонали, удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Седьмая глава. В этой главе рассматриваются прямоугольные покрытия. Семейство ϑ подмножеств $X \times X$ называется *прямоугольным*, если $\vartheta = \{U_\alpha \times W_\alpha : \alpha \in A\}$.

Грюнхаге и Пелант [59] доказали, что каждое паракомпактное вне диагонали Σ-пространство имеет диагональ типа G_δ. Следующая теорема 30 дополняет теорему Грюнхаге-Пеланта и является основным результатом § 7.1

Теорема 30. *Паракомпактное Σ-пространство X имеет G_δ-диагональ в том и только в том случае, когда пространство $X^2 \setminus \Delta$ допускает локально-конечное (в $X^2 \setminus \Delta$) прямоугольное открытое покрытие.*

Следствие. *Паракомпактное p-пространство X метризуемо в том и только в том случае, когда пространство $X^2 \setminus \Delta$ допускает локально-конечное (в $X^2 \setminus \Delta$) прямоугольное открытое покрытие.*

В § 7.2 рассматриваются счетные прямоугольные покрытия.

Теорема 31. *Линделёфово β-пространство X имеет G_δ-диагональ в том и только в том случае, когда пространство $X^2 \setminus \Delta$ допускает счетное прямоугольное открытое покрытие.*

Следствие. *Линделёфово p-пространство X метризуемо в том и только в том случае, когда пространство $X^2 \setminus \Delta$ допускает счетное прямоугольное открытое покрытие.*

---

[59] Gruenhage G. , Pelant J. Analytic spaces and paracompactness of $X^2 \setminus \Delta$ // Topology Appl. — 1988. — V. 28. — P. 11–15.

В заключение отметим, что условие β- в формулировке теоремы 31 не может быть опущено. Соответствующие примеры были построены А.Н.Якивчиком [60] и Беннетом и Латцером [61].

[60] Якивчик А. Н. О диагональном числе топологических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1990. №6.— С. 84–86.

[61] Bennett H. , Lutzer D. Off-diagonal metrization theorems// Topol. Proc. — 1997. — V. 22. — P.37–58.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(Публикации [1]—[21] из официального Перечня ВАК)

[1] Комбаров А. П. О нормальности $\Sigma_{\mathfrak{m}}$-произведений // ДАН СССР. — 1973. — Т. 211. — С. 524–527.

[2] Комбаров А.П. Нормальные σ-произведения // ДАН СССР. — 1977. — Т. 232. — С. 1004–1007.

[3] Комбаров А.П. О тесноте и нормальности Σ-произведений // ДАН СССР. — 1978. — Т. 239. — С. 775–778.

[4] Комбаров А.П. О пространствах с точечно-счетной полубазой// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1981. №3.— С. 28–31.

[5] Комбаров А.П. О замкнутых $\mathfrak{m}$-компактных отображениях и уплотнениях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1981. №6.— С. 70–72.

[6] Комбаров А.П. Об одной теореме А.Стоуна// ДАН СССР. — 1983. — Т. 270. — С. 38–40.

[7] Комбаров А.П. О компактности и секвенциальности по множеству ультрафильтров// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1985. №5.— С. 15–18.

[8] Комбаров А.П. Наследственная паракомпактность X^2 и метризуемость X // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1988. № 2. — С. 79–81.

[9] Комбаров А.П. О F_σ-счетно паракомпактных пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1989. № 4. — С. 91–93.

[10] Комбаров А.П. Замечание к теореме Катетова// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1990. №2.— С. 82–83.

[11] Комбаров А.П. Теснота паракомпактных k-пространств и счетная паракомпактность F_σ-множеств в произведениях// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1990. №3.— С. 87–89.

[12] Комбаров А.П. Псевдонормальность F_σ-подмножеств $X^2 \setminus \Delta$// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1991. №1.— С. 85–87.

[13] Комбаров А.П. О теоремах Катетова и Зенора// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1992. №1.— С. 102–104.

[14] Комбаров А.П. О слабой нормальности пространства $X^2 \setminus \Delta$// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1995. №3.— С. 40–44.

[15] Комбаров А.П. Счетная нормальность подмножеств $\exp(X)$// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1995. №5.— С. 97–99.

[16] Комбаров А.П. О свойствах типа нормальности в произведениях// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1998. №4.— С. 64–66.

[17] Комбаров А.П. О свойствах типа счетной паракомпактности в произведениях// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 1999. №3.— С. 25–28.

[18] Комбаров А.П. К теореме Катетова-Федорчука о кубе// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 2004. №5.— С. 59–61.

[19] Комбаров А.П. О нормальных функторах степени ≥ 3 // Матем. заметки — 2004. — Т. 76.— С. 147–149.

[20] Комбаров А.П. О D-нормальности $X^2 \setminus \Delta$ //Успехи матем. наук — 2004. — Т. 59. — С. 173–174.

[21] Комбаров А.П. О паранормальных пространствах // Матем. заметки — 2007. — Т. 81.— С. 311–313.

[22] Kombarov A.P. On rectangular covers of $X^2 \setminus \Delta$// Comment. Math. Univ.Carolinae. — 1989. — V. 30 — P. 81–83.

[23] Kombarov A. P. Weak normality, $\exp(X)$ and powers // Topology and Applications. International Topological Conference Dedicated to P.S.Alexandroff's 100th Birthday. — Moscow: "Phasis", 1996. — P.71–72.

[24] Kombarov A.P. On expandable discrete collections// Topol. Appl. — 1996. — V. 69 — P. 283–292.

[25] Kombarov A.P. Weak normality of subsets of $\exp(X)$// Topol. Appl. — 1997. — V. 76 — P. 157–160.

[26] Комбаров А.П. Слабая нормальность 2^X и X^τ// Фундаментальная и прикладная математика — 1998. — Т. 4.— С. 135–140.

[27] Kombarov A.P. On F_σ-δ-normality and hereditary δ-normality // Topology Appl. — 1999. — V. 91. — P. 221–226.

[28] Kombarov A.P. On Lindelöf-normal spaces // Topology Appl. — 2000. — V. 107. — P. 117–122.

[29] Комбаров А.П. Свойства типа нормальности и ковариантные функторы// Фундаментальная и прикладная математика — 2003. — Т. 9, № 2.— С. 57–98. (Kombarov A.P. Normality-type properties and covariant functors// Journal of Mathematical Sciences — 2003. — V. 131, № 4. — P. 5738–5764.)

[30] Kombarov A.P. On D-normality of $X^2 \setminus \Delta$ and hereditary D-normality of $\exp(X)$ // International Conference on Geometric Topology, Discrete Geometry and Set Theory (Dedicated to the centenary of L.V.Keldysh). — Moscow: Steklov Mathematical Institute RAS, 2004. — P. 30–31.