

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 539.3

Губарева Елена Александровна

**ТЕРМОУПРУГИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007 г.

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор В.М. Александров

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Коваленко
доктор физико-математических наук,
профессор Д.В. Тарлаковский

Ведущая организация Южный Федеральный Университет

Защита состоится 28 сентября 2007 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.91 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "____" _____ 2007 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д.501.001.91,

доктор физико-математических наук, профессор

С.В. Шешенин

1. Общая характеристика работы.

Актуальность работы. Механика контактных взаимодействий деформируемых тел является в наше время активно развивающейся областью. Проблемы контактных взаимодействий являются центральными в механике твердых тел, поскольку контакт - это один из принципиально главных способов работы элементов механизмов машин, в результате которого величина контактных давлений играет роль важного фактора, существенно влияющего на прочность и долговечность конструкций. Только решая контактные задачи мы можем дать, отвечающую действительности, картину распределения напряжений и деформаций, которые возникают вследствие контактных взаимодействий. Обзор работ по основным достижениям в области механики контактных взаимодействий можно найти в фундаментальных монографиях И. Я. Штаермана, Л. А. Галина, К. Джонсона и фундаментальной монографии И. И. Воровича, В. М. Александрова, В. А. Бабешко. Основными факторами при решении контактной задачи являются трение, износ и тепловыделение от трения. В данной диссертации предложена постановка контактной задачи для тел с покрытиями, объединяющая эти факторы.

Другая актуальная проблема в механике контактных взаимодействий - проблема износа подшипников скольжения, которые находят применение во многочисленных областях машиностроения. Первую попытку решения контактной задачи для тел ограниченных цилиндрическими поверхностями предпринял Герц. Решение Герца было обобщено И. Я. Штаерманом при рассмотрении задачи о внутреннем контакте упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями близких радиусов, без учета трения.

Основные результаты в исследовании и решении контактных задач для областей с круговыми границами были получены в 60-е годы. В этом направлении работали Д. В. Грилицкий, А. И. Каландия, В. В. Панасюк, М. П. Шереметьев.

В данной работе предлагается решение термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения с упругими мягкими тонкими вкладышами при учете тепловыделения от трения. В работе развивается приближенный подход на основе асимптотического метода, а именно строятся так называемые вырожденные решения.

Цель работы. Целью диссертационной работы является рассмотрение и анализ решений контактных задач с учетом трения, износа и тепловыделения от трения для тел с покрытиями. Второй основной целью работы было решение термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения и расчет контактных температур, возникающих при вращении вала (шара) в этих подшипниках.

Достоверность основных положений и выводов определяется использованием строгих математических подходов механики контактных взаимодействий деформируемых тел, хорошим соответствием результатов решений, полученных с помощью аналитических и численных методов.

Научная новизна.

- Получены решения задач с учетом трения, износа и тепловыделения от трения для тел с покрытиями, при использовании представления зависимости коэффициента трения от контактных температур покрытий, а также зависимости контактного термосопротивления от давления. Проведено сравнение решений, полученных аналитическим путем с численными решениями.
- Предложен подход для решения термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения, который позволяет получить все термомеханические характеристики.
- При определении средней температуры вала (шара)

цилиндрического и сферического подшипников в области контакта был предложен новый метод решения, в результате которого задачи сводились к интегральному уравнению первого рода, ядро которого, представлялось в форме двойного ряда по многочленам Лежандра. Решение искалось в виде ряда по полиномам Лежандра. В итоге были получены квазивполнерегулярные системы, которые были решены методом редукции.

Научно-практическое значение. Результаты работы могут быть использованы в машиностроении для инженерных расчетов, поскольку представлены в виде обозримых простых формул.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на Международной молодежной научной конференции "XXXIII Гагаринские чтения" (Москва, 2007), на Ломоносовских чтениях в МГУ (Москва, 2007), на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности МГУ под руководством проф. Е.В. Ломакина, на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов МГУ под руководством проф. Б.Е. Победря, на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости МГУ под руководством проф. И.А. Кийко, на научно-исследовательском семинаре по механике сплошных сред им. Л.А. Галина ИПМех РАН под руководством профессоров В.М. Александрова, В.Н. Кукуджанова, А.В. Манжирова

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в семи работах.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 129 наименований. Нумерация формул в каждой главе автономная. Каждая формула начинается двумя числами: первая из них указывает на номер пункта в главе, а вторая на номер формулы в этом пункте. Работа изложена на 158 страницах машинописного текста без приложений и содержит 10 рисунков и 4 таблицы.

2. Краткое содержание работы.

Во **ВВЕДЕНИИ** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, дан обзор существующих подходов к решению задач механики контактных взаимодействий, сформулированы цели исследования.

В **ГЛАВЕ 1** рассматривается контактная задача о взаимодействии тел с покрытиями при учете нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения при неидеальном тепловом контакте. Представим схему контакта тел с покрытиями, как показано на рис. 1.

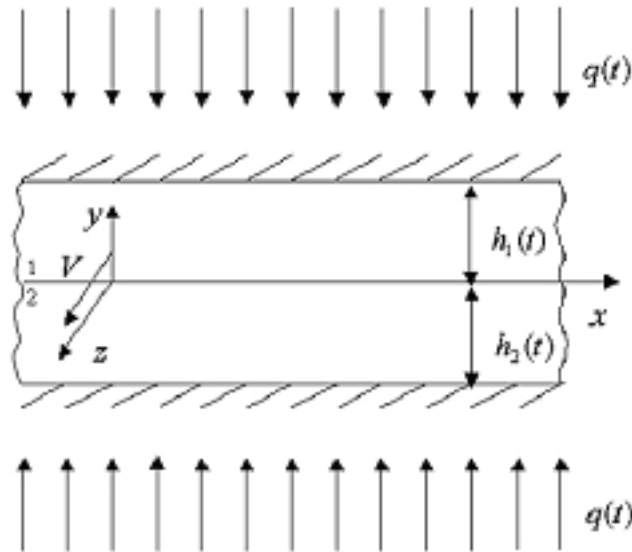


Рис. 1: схема контактного взаимодействия

Предполагается, что в области контакта возникают силы трения $\tau(t)$, связанные с давлением $q(t)$ нелинейной зависимостью

$$\tau = k(q)$$

В качестве функции $k(q)$ берется функция

$$k(q) = \tau_* [1 - \exp(-kq/\tau_*)],$$

где τ_* — минимальное из касательных напряжений текучести материалов покрытий, k — коэффициент кулоновского трения пары материалов покрытий.

До определения контактного давления (временно считая его заданным) определим контактные температуры. Для этого рассматривается задача теплопроводности для тел с покрытиями при наличии источников тепла в области их контакта. Процесс теплопроводности считаем квазистационарным.

В области контакта формулируются условия неидеального теплового контакта.

$$\lambda_2 T_2' - \lambda_1 T_1' = Q, \quad \lambda_2 T_2' + \lambda_1 T_1' = 2(T_1 - T_2)/r(q) \quad (1)$$

В качестве контактного термосопротивления $r(q)$ принимается следующее выражение

$$r(q) = r_* \tau_* / (kq),$$

В результате для контактных температур T_i^* получаются выражения:

$$\begin{aligned} T_i^* &= V k(q) h_1 [\lambda_2 r(q) + 2h_2] D^{-1}, \\ T_2^* &= V k(q) h_2 [\lambda_1 r(q) + 2h_1] D^{-1}, \\ D &= 2[\lambda_1 \lambda_2 r(q) + \lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения контактного давления предполагается, что функции $h_i(t)$ заданы, тогда функция

$$\delta(t) = h_{10} + h_{20} - h_1(t) - h_2(t), \quad (3)$$

определяющая процесс сближения оснований $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, также задана.

Чтобы определить $v_2(-h_2, t)$ и $v_1(h_1, t)$, т. е. вертикальные упругие перемещения границ $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, воспользуемся, пренебрегая инерционными членами, уравнениями линейной несвязанной термоупругости. Принимая во внимание, что напряженно-деформированное состояние покрытий зависит только от координаты y и времени t (как параметра), получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2v_i}{dy^2} &= \beta_i \frac{dT_i}{dy}, & \sigma_{yi} &= \gamma_i \left(\frac{dv_i}{dy} - \beta_i T_i \right), \\ \beta_i &= \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \alpha_i, & \gamma_i &= \frac{2(1 - \nu_i)}{1 - 2\nu_i} G_i,\end{aligned}\quad (4)$$

где σ_{yi} – нормальные напряжения, G_i и ν_i – модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов покрытий, α_i – их коэффициенты линейного расширения.

Решая данные уравнения и подставляя контактные температуры, получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерры:

$$\begin{aligned}\left(\frac{h_2}{\gamma_2} + \frac{h_1}{\gamma_1} \right) q - \frac{\beta_2 h_2^2 [\lambda_1 r(q) + 2h_1]}{4[\lambda_1 \lambda_2 r(q) + \lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2]} V k(q) + \\ + \frac{\beta_1 h_1^2 [\lambda_2 r(q) + 2h_2]}{4[\lambda_1 \lambda_2 r(q) + \lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2]} V k(q) + 2 \frac{l_1 + l_2}{2} V \int_0^t k(q) d\zeta = \delta(t).\end{aligned}\quad (5)$$

При рассмотрении случая малого времени износа уравнение (5) трансформируется после перехода к безразмерным величинам и безразмерным комплексам и последующего дифференцирования к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}q' \left\{ a - \frac{c - bd}{(1 + qd)^2} [1 - \exp(-q)] - \frac{b + qc}{1 + qd} \exp(-q) \right\} + \\ + e[1 - \exp(-q)] = \delta_1\end{aligned}\quad (6)$$

при начальном условии

$$q_0 a - \frac{b + q_0 c}{1 + q_0 d} [1 - \exp(-q_0)] = \delta_0, \quad (7)$$

где q_0 – начальное безразмерное контактное давление.

Приближенное решение уравнения (6) при условии (7) получено методом Рунге - Кутта с помощью компьютерной системы MAPLE для покрытий из латуни и дюралюминия. Рассмотрены предельные случаи, когда начальное давление мало и велико. На рис.2 показан график зависимости безразмерного контактного давления от времени для покрытий из латуни и дюралюминия.

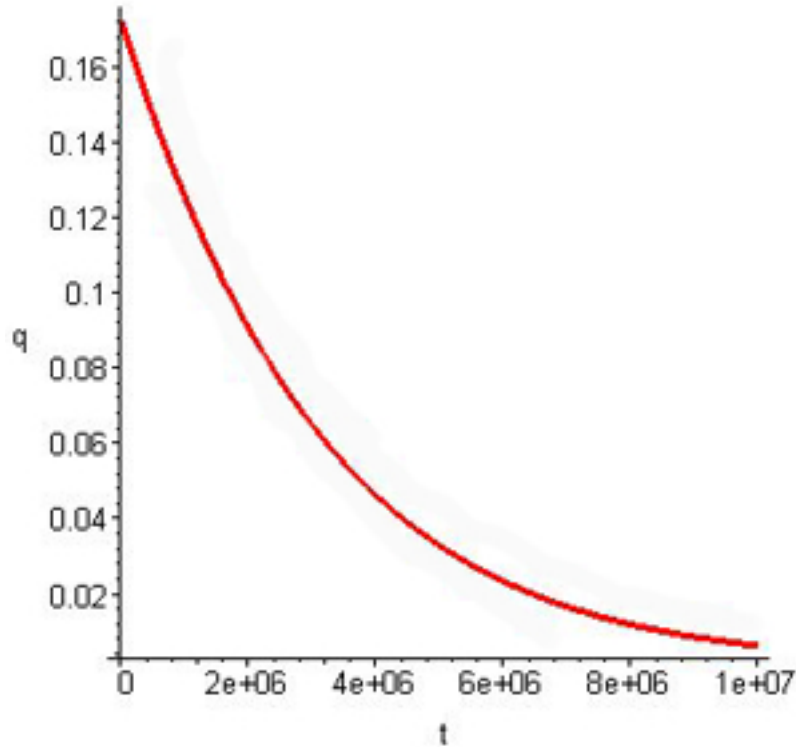


Рис. 2: график зависимости безразмерного контактного давления от времени для покрытий из латуни и дюралюминия

В ГЛАВЕ 2 решается задача о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. Используя "принцип микроскопа" растягивается окрестность какой-либо точки внутри области контакта и схема контакта представляется, как показано на рис.1

Предполагается, что в области контакта возникают силы трения $\tau(t)$, связанные с контактным давлением $q(t)$ линейной зависимостью (закон Кулона)

$$\tau = kq.$$

Для коэффициента трения k примем выражение

$$k = [k_1 + 0.5k_2(\beta_1 T_1^* + \beta_2 T_2^*)],$$

где k_i – некоторые безразмерные постоянные ($i = 1, 2$), T_i^* – контактные

температуры, $\beta_i = (1 + \nu_i)(1 - \nu_i)^{-1}\alpha_i$, ν_i – коэффициенты Пуассона материалов покрытий, α_i – их коэффициенты линейного расширения.

Износ будем считать абразивным.

Для определения контактных температур используем условия неидеального теплового контакта (1). Ниже примем, что

$$r(q) = r_*(\gamma_1 + \gamma_2)/2q(t),$$

где r_* – экспериментально определяемая постоянная, $\gamma_i = \frac{2(1 - \nu_i)}{1 - 2\nu_i}G_i$, G_i – модули сдвига материалов покрытий.

И тогда будем считать заданными следующие условия теплообмена между покрытиями и подложкой

$$\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \eta_1 T_1 = 0 \quad (y = h_1), \quad \xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \eta_2 T_2 = 0 \quad (y = -h_2),$$

где ξ_i , η_i – коэффициенты теплообмена. Температуры покрытий в области контакта ($y = 0$) обозначим через T_i^* .

Тогда из уравнений теплопроводности для покрытий получаем выражения для контактных температур T_i^* .

$$\begin{aligned} T_1^* &= \left(2d_2 + \frac{4}{r(q)}\right) k_1 V q D^{-1}, \\ T_2^* &= \left(2d_1 + \frac{4}{r(q)}\right) k_1 V q D^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$D = 4d_1 d_2 + \frac{4}{r(q)}(d_1 + d_2) - \left(d_1 \beta_2 + d_2 \beta_1 + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{r(q)}\right) V q k_2,$$

$$d_i = \frac{\lambda_i \eta_i}{\xi_i + \eta_i h_i}.$$

Нужно потребовать, чтобы в любой момент времени t выполнялось условие

$$D > 0,$$

Учитывая выражения (8), получим

$$k = k_1 + 0.5k_1k_2Vq [2(d_2\beta_1 + d_1\beta_2)] D^{-1} + 0.5k_1k_2Vq \left[\frac{4}{r(q)}(\beta_1 + \beta_2) \right] D^{-1}.$$

Для определения контактного давления считаем, что функции $h_i(t)$ заданы, тогда функция $\delta(t)$ также задана (3)

Используя уравнения линейной несвязанной термоупругости (4) и выражения для контактных температур (8), получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения контактного давления

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h_2}{\gamma_2} + \frac{h_1}{\gamma_1} \right) q - \frac{4/r(q)k_1Vq(\beta_1h_1 + \beta_2h_2)}{2D} + \\ & + \frac{2k_1Vq(\beta_1h_1d_2 + \beta_2h_2d_1)}{2D} + (l_1 + l_2)V \int_0^t kqd\zeta = \delta(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим случай относительно малого времени износа. Пусть $\delta(t)$ имеет порядок упругого перемещения. Тогда интегральное уравнение (9) после перехода к безразмерным величинам и комплексам примет вид:

$$\begin{aligned} & qa - \frac{cq + dq^2}{1 + eq - fq^2} + h \int_0^t k_1qd\zeta + \\ & + 0.5h \int_0^t k_2q \frac{nq + pq^2}{1 + sq - wq^2} d\zeta = \delta_0 + \delta_1 t. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что интегральное уравнение (10) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & q' \left\{ a - \frac{c + 2qd + q^2(cf + de)}{(1 + eq - fq^2)^2} \right\} + \\ & + hk_1q + 0.5hk_2q \frac{nq + pq^2}{1 + sq - wq^2} = \delta_1 \end{aligned} \quad (11)$$

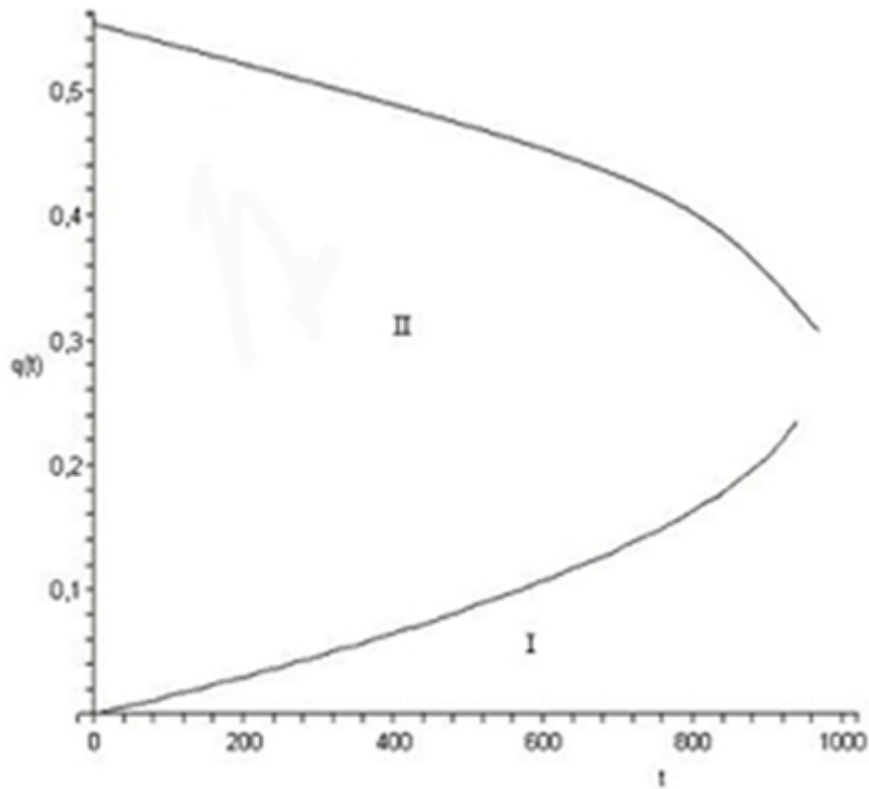


Рис. 3: графики зависимости безразмерного контактного давления от времени для покрытий из латуни и дюралюминия

при начальном условии

$$q_0 a - \frac{q_0 c + q_0^2 d}{1 + q_0 e - q_0^2 f} = \delta_0, \quad (12)$$

где q_0 – начальное безразмерное контактное давление. Приближенное решение уравнения (11) при условии (12) получено методом Рунге - Кутты с помощью компьютерной математической системы Maple для покрытий из латуни (1) и дюралюминия (2). Положим $\xi_1 = \xi_2 = 0$; $k_2 = 0,02; 0$.

На рис. 3 показана зависимость давления от времени (для безразмерных величин) для $r_* = 1/2$. Кривая I соответствует значению $k_2 = 0,02$, а кривая II - $k_2 = 0$.

ГЛАВА 3 посвящена решению термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения.

В рамках плоской (осесимметричной) термоупругой деформации рассмотрим подшипниковый узел (рис.4), включающий следующие детали: 1) втулка с внутренним радиусом r_1 и внешним – r_2 ($h = r_2 - r_1$), 2) вал (шар) радиуса r_0 ($r_0 = r_1 - \Delta$), 3) опорная обойма с внутренним радиусом r_2 . Вал (шар) вдавливаются на величину δ в поверхность втулки без перекоса погонной силой P и вращается с угловой скоростью ω , постоянной во времени.

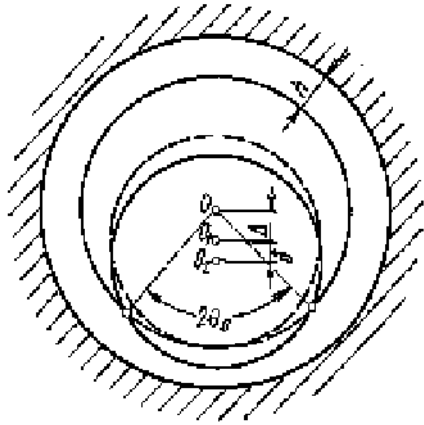


Рис. 4: схема подшипникового узла

На рис.4 пунктиром показано положение вала (шара) до его вдавливания. После произошедшей деформации угол контакта между валом (шаром) и втулкой – $2\theta_0$.

Для дальнейшего рассмотрения вводится

цилиндрическая (сферическая) система координат. Температурный режим подшипника стационарен во времени. При вращении вала (шара) в области контакта выделяется тепло, поток которого равен

$$r_1 \omega f q(\theta) \tag{13}$$

где f – коэффициент трения между поверхностями вала (шара) и втулки, $q(\theta)$ – контактное давление.

Вводятся следующие упрощающие предположения:

- – при определении контактного давления будем считать, что
 - 1) механические характеристики вала (шара) и обоймы значительно превосходят механические характеристики втулки так, что вал (шар) и обойму можно считать абсолютно жесткими;

- 2) радиусы r_0 и r_1 настолько близки и сила P настолько велика, что угол контакта $2\theta_0$ близок к π ;
 - 3) полудлина дуги контакта $a = r_1\theta_0$ много больше толщины h ($a \gg h$) так, что втулку можно считать относительно тонкой;
 - 4) между поверхностями втулки и обоймы осуществлено полное сцепление;
 - 5) силами трения в области контакта можно пренебречь;
 - 6) вне области контакта внутренняя поверхность втулки свободна от усилий;
 - 7) при определении напряженно-деформируемого состояния втулки можно использовать формулы линейной теории упругости;
- – при определении поля температур будем считать, что
 - 1) можно ввести в рассмотрение постоянный коэффициент α разделения общего теплового потока между валом (шаром) и втулкой от распределенного по области контакта теплового источника (13); тогда на поверхности вала

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha \omega r_1 f q^*}{k_1}, \quad q^* = \frac{1}{2\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta) d\theta, \quad (14)$$

(шара)

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha \omega r_1 f q^*}{k_1}, \quad (15)$$

$$q^* = \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta) \sin \theta d\theta,$$

а на поверхности втулки в области контакта

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{(1 - \alpha) \omega r_1 f q(\theta)}{k_2} \quad (16)$$

В формулах (14), (15) и (16) T – температура, k_1 и k_2 – соответственно коэффициенты теплопроводности вала (шара) и втулки;

- 2) средняя температура вала (шара) в области контакта имеет вид

$$T^* = \frac{\alpha \omega r_1^2 f q^*}{k_1} \mathfrak{a}_1, \quad (17)$$

где безразмерная постоянная \mathfrak{a}_1 – в случае вращения вала (шара) будет определена в 4 и 5 главах данной диссертации.

- 3) на внутренней поверхности втулки вне области контакта и на внешней ее поверхности будем считать заданными условия теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона

$$\xi_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \eta_1 T = b, \quad (18)$$

$$\xi_2 \frac{\partial T}{\partial r} + \eta_2 T = \varphi(\theta), \quad (19)$$

В формулах (18) и (19) ξ_i и η_i ($i = 1, 2$) – коэффициенты теплообмена, b – постоянная величина, зависящая от температуры воздуха в пространстве между втулкой и валом (шаром), $\varphi(\theta)$ – заданная функция угла θ .

Требуется определить: закон распределения контактного давления $q(\theta)$ по координате θ , величину угла контакта θ_0 , связь между силой P , действующей на вал (шар), и степенью его внедрения δ в поверхность втулки, моменты сил трения при вращении вала (шара) вокруг оси z (z'), закон распределения температуры $T(r, \theta)$ и упругих перемещений во втулке, коэффициент распределения теплового потока α .

При сделанных предположениях рассматриваемые задачи сводятся к совместному решению двух уравнений Ламе с температурными членами и уравнения теплопроводности

для цилиндрического подшипника: для втулки – кольца $r_1 \leq r \leq r_2$,
 $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \\ & \quad - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)\beta}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \\ & \quad + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2(1+\nu)\beta}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \\ & \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0, \end{aligned}$$

для сферического подшипника: для втулки - шарового слоя $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \\ & \quad + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \\ & \quad - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} w \right) - \frac{2(1+\nu)\beta}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} w \right) + \\ & \quad + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{4(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \\ & \quad - \frac{2(1+\nu)\beta}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \\ & \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \end{aligned}$$

При построении вырожденного решения задач для цилиндрического и сферического подшипников вводятся в рассмотрение два безразмерных геометрических параметра

$$\varepsilon = \frac{h}{r_1}, \quad \lambda = \frac{h}{a} \quad (a = r_1 \theta_0)$$

и заметим, что λ и ε одного порядка малости, хотя при θ_0 близком к $\pi/2$, как это было предположено выше, $\lambda \leq \varepsilon$.

В результате решения этих задач получаем все термомеханические характеристики.

Для цилиндрического подшипника: Примем для функции $\varphi(\theta)$ выражение

$$\varphi(\theta) = (D_0 + D_1 \cos \theta) \eta_2 \gamma^{-1}, \quad (20)$$

где D_0 и D_1 – некоторые постоянные, аппроксимирующие экспериментальные данные. Тогда

$$\begin{aligned} q(\theta) &= M_0 + M_1 \cos \theta, \\ M_0 &= 2\eta_2(-\Delta + D_0)D^{-1}, \quad M_1 = 2\eta_2(\Delta + \delta + D_1)D^{-1}, \\ D &= 2\alpha h \eta_2 - \gamma \mu (h \eta_2 + 2\xi_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь важно проверить выполнение условия $D > 0$, которое можно назвать условием термосиловой устойчивости.

Связь между перемещением вала δ и углом контакта $2\theta_0$ определим из условия обращения контактных давлений в нуль при $\theta = \pm\theta_0$. Из первой формулы (21) следует

$$M_0 + M_1 \cos \theta_0 = 0. \quad (22)$$

Связь между вдавливающей силой P и углом контакта $2\theta_0$ определим из условия равновесия вала. На основании первой формулы (21) имеем

$$\begin{aligned} P &= r_1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta) \cos \theta d\theta = \\ &= r_1 [2M_0 \sin \theta_0 + M_1(\theta_0 + 1/2 \sin 2\theta_0)]. \end{aligned} \quad (23)$$

С помощью формул (22) и (23) приведем выражение (21) для контактного давления $q(\theta)$ к виду

$$q(\theta) = \frac{2P(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{r_1(\sin 2\theta_0 - 2\theta_0)}. \quad (24)$$

Для средней по θ температуре на поверхности области контакта ($y = 1, |x| \leq 1$) получим

$$T^* = \frac{1}{2\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} T(\theta) d\theta = \mu r_1 q_*,$$

$$q_* = \frac{1}{r_1} \left[\left(h + \frac{\xi_2}{\eta_2} \right) q^* + \frac{1}{\gamma\mu} \left(D_0 + \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} D_1 \right) \right], \quad (25)$$

$$q^* = \frac{2P}{r_1(\sin 2\theta_0 - 2\theta_0)} \left(\cos \theta_0 - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right),$$

где q^* – среднее по θ контактное давление, определяемое с помощью второй формулы (14) и формулы (24).

Считая теперь, что тепловой контакт между валом и втулкой идеальный, и приравнивая среднюю температуру вала (17) и среднюю температуру втулки (25) в области контакта, получим выражение для коэффициента разделения теплового потока

$$\alpha = \left(1 + \frac{q^* \alpha_1 k_2}{q_* k_1} \right)^{-1}.$$

Момент сил кулоновского трения $\tau(\theta) = fq(\theta)$, действующих в области контакта, определим по формуле

$$M = fr_1^2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta) d\theta = 2fr_1^2 \theta_0 q^*.$$

График поведения безразмерного контактного давления $Q = \frac{q(\theta)r_1}{P}$ для $\theta_0 = 10^0, 20^0, 30^0, 40^0, 50^0, 60^0, 70^0, 80^0$ представлен на рис.5

Для сферического подшипника скольжения: Вновь примем для функции $\varphi(\theta)$ выражение (20) и далее опять получим выражение (21). Снова обратим внимание на то, что величина D в последней формуле (21) должна быть больше нуля.

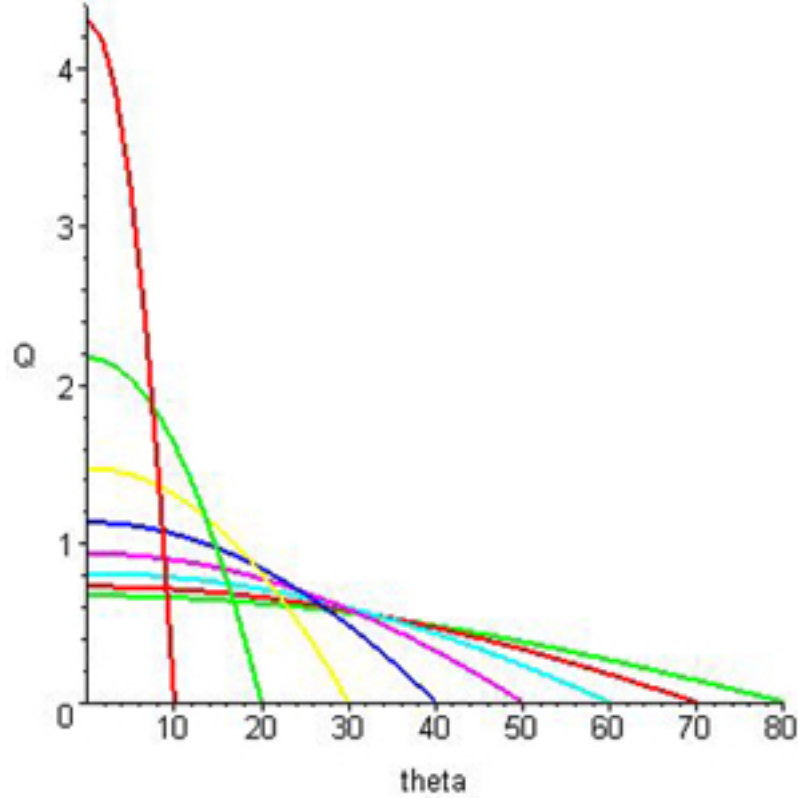


Рис. 5: график зависимости безразмерного контактного давления от θ

Связь между перемещением шара δ и углом контакта θ_0 определим из условия $q(\theta_0) = 0$. Опять придем к формуле (22). Связь между вдавливающей силой P и углом контакта θ_0 определим из условия равновесия шара. На основании первой формулы (21) имеем

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi r_1^2 \int_0^{\theta_0} q(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = \\
 &= 2\pi r_1^2 \left[\frac{1}{2} M_0 \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{3} M_1 (1 - \cos^3 \theta_0) \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

С помощью формул (22) и (26) приведем выражение (21) для контактного давления $q(\theta)$ к виду

$$q(\theta) = \frac{3P(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\pi r_1^2 (3 \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 - 2)}. \tag{27}$$

Для средней по θ температуры на поверхности области контакта ($y = 1; 0 \leq x \leq 1$)

$$T^* = \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \int_0^{\theta_0} T(\theta) \sin \theta d\theta = \mu r_1 q_*,$$

$$q_* = \frac{1}{r} \left[\left(h + \frac{\xi_2}{\eta_2} \right) q^* + \frac{1}{2\gamma\mu} [2D_0 + D_1(1 + \cos \theta_0)] \right], \quad (28)$$

$$q^* = \frac{3P}{2\pi r_1^2 (1 - \cos \theta_0)(2 + \cos \theta_0)},$$

где q^* – среднее по θ контактное давление, определяемое с помощью второй формулы (15) и формулы (27).

Считая теперь, что тепловой контакт между шаром и втулкой идеальный, и приравнивая средние температуры шара (15) и втулки (28) в области контакта, получим выражение для коэффициента разделения теплового потока

$$\alpha = \left(1 + \frac{q^* k_2 \alpha_1}{q_* k_1} \right)^{-1}.$$

Момент сил кулоновского трения $\tau(\theta) = f d(\theta)$, действующих в области контакта, при вращении шара вокруг оси z' , можно определить по формуле

$$M_{z'} = f r_1^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} q(\theta) \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta.$$

График поведения безразмерного контактного давления $Q = \frac{q(\theta) r_1^2}{P}$ для $\theta_0 = 10^0, 20^0, 30^0, 40^0, 50^0, 60^0, 70^0, 80^0$ представлен на рис.6

В **ГЛАВЕ 4** решается задача о нахождении коэффициента пропорциональности α_1 , входящего в выражение (17) для средней температуры вала цилиндрического подшипника.

Для этого решается следующая смешанная краевая задача относительно функции $T^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d\theta$:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0$$

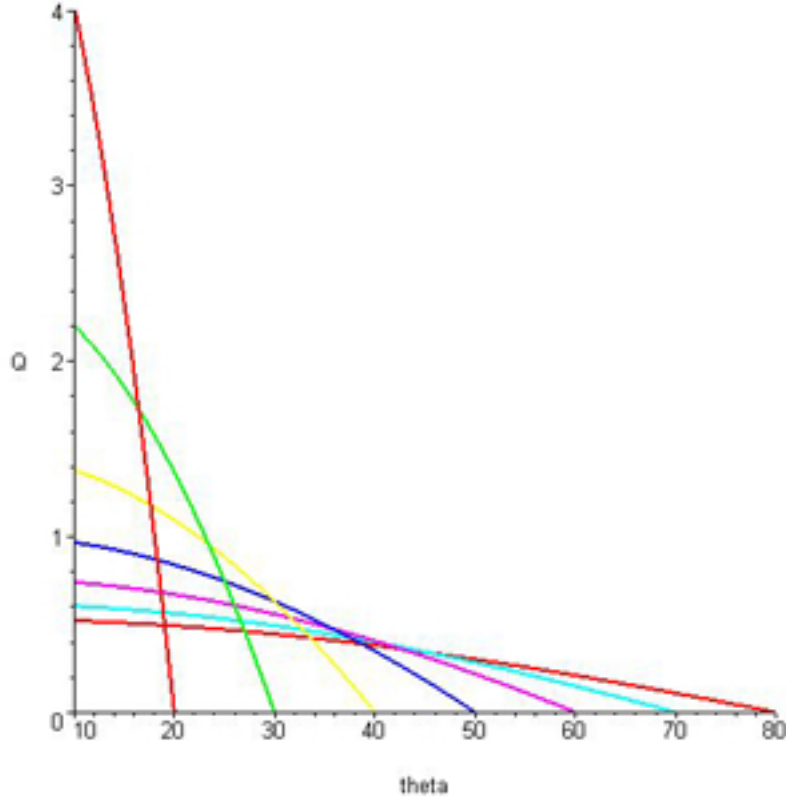


Рис. 6: график зависимости безразмерного контактного давления от θ

$$\frac{\partial T^*}{\partial r} + \eta T^* = 0 \quad (|z| > a, \quad r = r_1)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r} = \frac{\alpha \omega r_1 f}{2\pi k_1} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta, z) d\theta = \frac{\alpha \omega r_1 f}{k_1} \tilde{q}(z)$$

$$(|z| \leq a, \quad r = r_1)$$

в результате приходим к следующему интегральному уравнению

$$\varphi(z) - \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) K \left(\frac{\zeta - z}{\lambda} \right) d\zeta = D \quad (|z| \leq 1) \quad (29)$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{\mu I_0(u)}{u I_1(u) + \mu I_0(u)} \cos(ut) du \quad \left(t = \frac{\zeta - z}{\lambda} \right) \quad (30)$$

Представим ядро (30) в форме двойного ряда по полиномам Лежандра. В указанном разложении, учитывая чётность по z функции $\varphi(z)$, можно оставить только полиномы с чётными индексами

$$K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\lambda) P_{2i}(\zeta) P_{2j}(z) \quad (31)$$

Используя ортогональность многочленов Лежандра находим c_{mn}

$$c_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{\pi \lambda (4m+1)(4n+1)}{8} \int_0^{\infty} \frac{\mu I_0(u)}{u I_1(u) + \mu I_0(u)} \times \\ \times J_{2m+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2n+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u}$$

Будем искать теперь решение интегрального уравнения (29) с ядром в форме (31) в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_{2m}(z) \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в уравнение (29) и используя ортогональность полиномов Лежандра придем относительно неизвестных коэффициентов a_m к бесконечной алгебраической системе второго рода

$$a_m - \frac{2}{\pi \lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{im}}{4i+1} a_i = D \delta_{m0} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

Данная система редуцировалась до пяти уравнений.

В результате найдено выражение для коэффициента пропорциональности \varkappa_1 .

$$\varkappa_1 = \frac{\theta_0}{\pi r_1 \eta} (a_0 - 1)$$

В **ГЛАВЕ 5** рассматривается задача о нахождении коэффициента пропорциональности \varkappa_1 , входящего в выражение (17) для средней температуры шара сферического подшипника.

Для этого решается смешанная задача относительно функции $\tilde{T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d\varphi$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} &= \frac{\alpha \omega r_1 f l q^*}{k_1} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0, \quad r = r_1 \right) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \eta \tilde{T} &= 0 \left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0 \\ \frac{\pi}{2} + \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = r_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

в результате придем к следующему интегральному уравнению

$$\varphi(x) - a \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K(\xi, x) d\xi = D \quad (33)$$

$$K(\xi, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(2k+1)}{2(k+\mu)} P_k(a\xi) P_k(ax) \quad (34)$$

Представим ядро (34) в форме двойного ряда по многочленам Лежандра. В указанном разложении, учитывая четность по x функции $\varphi(x)$, можно оставить только многочлены с четными индексами (кстати по этой же причине в выражении (34) нужно оставить члены только с четными номерами k). Итак имеем

$$K(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\mu) P_{2i}(\xi) P_{2j}(x) \quad (35)$$

Окончательно коэффициенты $c_{ij}(\mu)$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mu) &= (-1)^{i+j} (4i+1)(4j+1) \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(4k+1)a^{4k}}{2(2k+\mu)(1+2k+2i)(1+2k+2j)} \times \\ &\times P_{k-i}^{(-2k-1/2, -1)} \left(1 - \frac{2}{a^2}\right) P_{k-j}^{(-2k-1/2, -1)} \left(1 - \frac{2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлены Якоби.

Решение интегрального уравнения (33) с ядром в форме (35) ищется в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_{2m}(x) \quad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в уравнение (33) и используя ортогональность полиномов Лежандра придем относительно неизвестных коэффициентов a_m к бесконечной алгебраической системе второго рода

$$a_m - 2a \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{c_{im}}{4i+1} = D\delta_{m0} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

Система редуцировалась до шести уравнений.

В итоге получено выражение для коэффициента пропорциональности α_1 .

$$\alpha_1 = \frac{l}{r_1 \eta} (a_0 - 1)$$

3. Основные результаты и выводы.

1. В контактных задачах с учетом трения, износа и тепловыделения от трения для тел с тонкими покрытиями была максимально упрощена схема контакта с целью возможно большего учета явлений, протекающих в области контакта. В этих задачах развивается приближенный подход, основанный на "принципе микроскопа". Предложена формула для описания нелинейного трения. С использованием этой формулы рассмотрено явление износа покрытий при тепловыделении от трения в условиях неидеального теплового контакта. Предложена формула, описывающая зависимость контактного термосопротивления от давления. Определен ресурс трибосопряжения, найдены условие термосиловой устойчивости процесса износа покрытий и условие отсутствия катастрофического износа. Предложено линейное выражение для зависимости коэффициента трения от контактных температур покрытий. С использованием всего этого рассмотрено явление изнашивания покрытий при тепловыделении от трения в условиях неидеального теплового контакта. Определены связь контактных температур с контактным давлением, ресурс трибосопряжения, зависимости контактного давления и контактных температур от времени износа.

2. Изучаются термоупругие контактные задачи для цилиндрического и сферического подшипников скольжения, и предполагается, что подшипники нагреваются вследствие генерации тепла в области контакта от сил трения, хотя сами силы трения не учитываются при определении контактных давлений. Вводятся безразмерные геометрические параметры ε , λ и строятся вырожденные (в асимптотическом смысле) решения. Это дает возможность представить окончательные результаты в виде простых формул, пригодных для инженерного использования.

3. При изучении термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения был предложен новый подход по определению коэффициентов пропорциональности α_1 в формулах для средней температуры вала (шара) цилиндрического и сферического подшипников.

4. Основные публикации по теме работы.

1. Александров В.М., Губарева Е.А. Учет нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения при неидеальном тепловом контакте в задаче о взаимодействии тел с покрытиями. Трение и износ, т.25, № 5, 2004, С.455-460.
2. Александров В.М., Губарева Е.А. Решение термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения. Трение и износ, т.26, №4, 2005, С.347-357.
3. Александров В.М., Губарева Е.А. Задача о взаимодействии тел с покрытиями при износе тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. Экологический вестник научных центров ЧЭС, № 2, 2006, С.10-15.
4. Александров В.М., Губарева Е.А. О расчете контактных температур, возникающих при вращении вала в подшипнике. Трение и износ, т.28, № 1, 2007, С.39-43.
5. Александров В.М., Губарева Е.А. О расчете контактных температур, возникающих при вращении шара в сферическом подшипнике. Трение и износ.2007. (принята к публикации)
6. Международная молодежная научная конференция "XXXIII Гагаринские чтения"(секция №3), 2007, тезисы докладов, С.16-17.
7. Конференция "Ломоносовские чтения-2007", тезисы докладов