На правах рукописи

Тушканов Денис Анатольевич

Нелинейные волны в пленках на наклонной поверхности

Специальность 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2006

Диссертация выполнена на кафедре аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В.Я. Шкадов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.В. Беликов
	доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Воропаев
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 27 октября 2006 г. в 16 ч. 20 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан «   » сентября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   А.Н. Осипцов
доктор физико-математических наук

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Интенсивное изучение течений тонких слоев вязкой жидкости связано с широким практическим применением пленок жидкости в технике и технологии. Такого рода течения возникают в ряде важных процессов, таких как получение защитных пленок покрытия, пленок оптически активного вещества для кино- и фототехники, выращивание кристаллов. Пленка конденсата присутствует в явлениях, происходящих в машинах и оборудовании, обслуживающих газоконденсатные месторождения, например, в газовых турбодетандерах и сепараторах для отделения газа от конденсата. Пленки являются составной частью теплопередачи в оросительных холодильниках и градирнях, выпарных аппаратах и нефтеперегонных печах. Расплавленный металл может образовать волновую пленку на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа.

Основная трудность теоретического исследования пленочных течений заключается в том, что поверхность слоя, как правило, покрыта сложной системой существенно нелинейных волн. Изучение волновых режимов стекающих пленок жидкости имеет кроме практической ценности общетеоретический интерес как пример нелинейных волн в среде с диссипацией и подкачкой энергии. Результаты, полученные для тонкого слоя, могут оказаться полезными для понимания развития неустойчивости, рождения и эволюции нелинейных структур в других случаях активных сред.

Цели работы

- Дать теоретическое истолкование для экспериментов по течениям однослойной пленки вязкой жидкости в случае малых углов наклона подложки.

- Исследовать течение двухслойной пленки и определить условия, при которых возможно волнообразование.

- Применить к исследуемому течению метод сведения полной краевой задачи, включающей уравнения Навье–Стокса и неразрывности и граничные условия, к системе одномерных уравнений для локальных толщин слоев и расходов жидкостей и построить алгоритм, пригодный для проведения быстрых и эффективных расчетов.

- Получить и исследовать возможные модификации уравнений для однослойной и двухслойной пленок и определить границы их полезного применения.

Научная новизна

- Выведена и исследована система уравнений для описания течений двухслойной пленки. Методом установления построены нелинейные периодические волновые режимы.

- Построено длинноволновое слабонелинейное приближение уравнений для двухслойной пленки и проведено сравнение с однослойным случаем.

- Показана эффективность пленочных уравнений для течений тонких слоев жидкости по поверхности с малым углом наклона к горизонту. Построены семейства решений и проведено сравнение с экспериментальными данными.

- Для задачи об однослойной пленке построена система уравнений, эволюционная по пространственной координате.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации могут служить для определения толщин получаемых в приложениях тонких пленок при интенсивных режимах нанесения покрытий, в усложненных ситуациях, таких как почти горизонтальная поверхность подложки, наличие двух слоев несмешивающихся жидкостей, при определении динамики развития нелинейной волны из малых возмущений стационарного безволнового течения. Длинноволновая модель может быть применена для исследования структуры бифуркаций волновых режимов.

Результаты могут быть применены в технологических приложениях, включающих покрытие твердой основы тонкой пленкой, таких как фармакология, пищевая промышленность, защита от коррозии, производство многослойных композитов и полимерных пленок.

Апробация диссертации

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на конференции «Аэромеханика и газовая динамика в XXI веке» в МГУ им. М.В. Ломоносова (2003 г.), на школах-семинарах «Современные проблемы аэрогидродинамики» под руководством академика Г.Г. Черного (2001, 2002, 2003 гг.), конференциях «Ломоносовские чтения» (2003, 2005, 2006 гг.), на научно-исследовательском семинаре кафедры аэромеханики и газовой динамики.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. В первой главе рассматриваются задачи, связанные с однослойными пленочными течениями, вторая глава посвящена двухслойным пленкам. Текст работы изложен на 76 страницах и включает 13 иллюстраций и 1 таблицу и список литературы из 50 наименований.

Содержание работы

Глава I. Однослойная пленка

В первой главе рассматривается стекание слоя вязкой несжимаемой жидкости под действием силы тяжести. Глава состоит из двух частей. Первая часть посвящена волнам на почти горизонтальной поверхности. В основу теоретического исследования нелинейных волн положена система уравнений для локальных значений толщины пленки $h(x,t)$ и расхода жидкости $q(x,t)$, отнесенных к толщине и расходу жидкости в невозмущенной пленке h_0, q_0. Эта система традиционно записывается в виде

$$h_t + q_x = 0,$$

$$q_t + \frac{6}{5}\left(\frac{q^2}{h}\right)_x = \frac{1}{5\delta}\left(hh_{xxx} + h - \frac{q}{h^2}\right) - \varepsilon h h_x, \qquad (1)$$

где использованы обозначения

$$\delta = \frac{1}{45}\gamma^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{R}^{\frac{11}{9}}, \quad \varepsilon = \frac{9\operatorname{ctg}\theta}{\mathrm{R}}, \quad h_0 = \left(\frac{\nu^2}{\bar g}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{R}^{\frac{1}{3}},$$

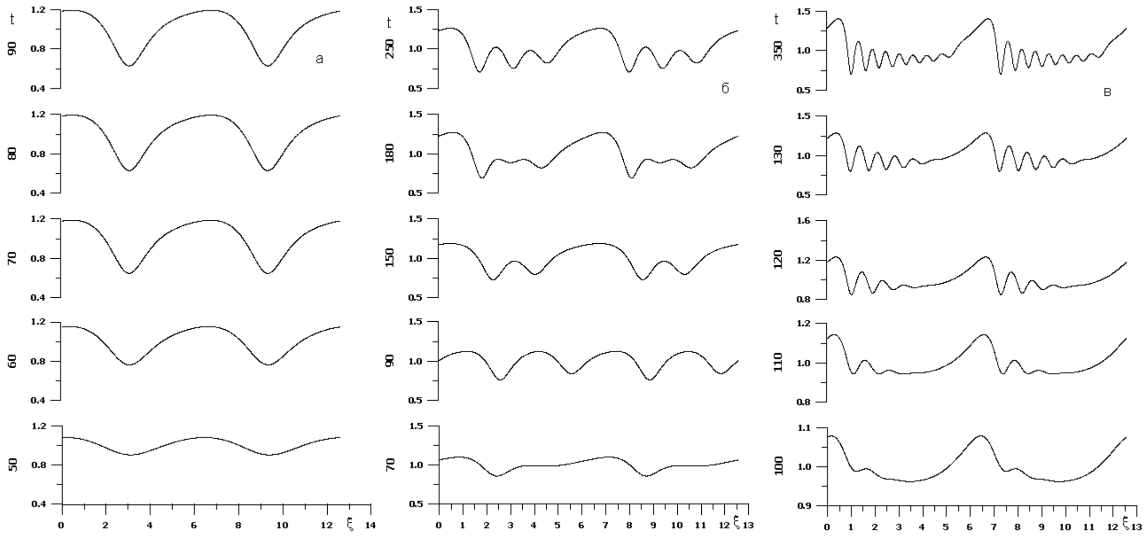
$$\mathrm{R} = \frac{3q_0}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho}(\nu^4\bar g)^{-\frac{1}{3}}, \quad \bar g = g\sin\theta.$$

Решения системы (1) для нестационарной нелинейной периодической волны разыскивается в виде

$$f(x,t) = \sum_{k=-N}^{N} f_k(t)e^{ik\xi}, \quad f_k = \bar f_{-k}, \quad f = (h,q), \quad h_0 = 1, \qquad (2)$$

где $\xi = \alpha(x - ct)$ — бегущая координата, α — волновое число, c — фазовая скорость волны.

В начальный момент задается малая амплитуда первой гармоники h_1. Динамическая система для $f_k(t)$, возникающая после подстановки (2) в (1), интегрируется численно при заданных δ и $s = \alpha/\alpha_0$, где α_0 — нейтральное волновое число, до установления асимптотического предельного решения. Для вычисления нелинейных правых частей уравнений применяется псевдоспектральный метод и процедуры быстрых Фурье-преобразований.



Фиг. 1: Развитие профилей волн, $\delta = 0.266$. *а* — $s = 0.617$; *б* — $s = 0.3$; *в* — $s = 0.15$.

На фиг. 1 показаны профили развивающихся нелинейных волн при $\delta = 0,266$; $\varepsilon = 1,569$. Выбранные значения s относятся к зонам бифуркаций первого семейства, промежуточных многогорбых волн и быстрых волн второго семейства.

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными Liu J., Gollub J.P. показывает применимость системы (1) для анализа течений при углах наклона $\theta \sim 4^\circ - 8^\circ$, при условии $n_*^2 \ll 1$, $n_* = \gamma^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{R}^{\frac{2}{9}}$.

Вторая часть посвящена исследованию развития по пространственной координате t-периодических волн. Такая ситуация возникает при задании малых пульсаций расхода с начальном сечении с некоторой заданной частотой, поэтому типична при проведении экспериментов. Однако, модельная система (1) является эволюционной по времени, поэтому в расчетах удобно рассматривать развитие по времени x-периодических волн.

В работе из системы (1) в предположении о медленном изменении профиля волны (что выполняется при переходе к бегущей координате) выводится система уравнений

$$Q_x = 4\omega q h h_\xi - \omega \frac{5}{6} h^2 q_\xi - \alpha Q_\xi + \frac{1}{6\delta}\left(q - h^3\left(1 + \alpha^3 h_{\xi\xi\xi}\right)\right),$$

$$q_x = \omega h_\xi - \alpha q_\xi, \quad Q = q^2 h,$$

являющаяся эволюционной по x. Показано соответствие развившихся решений полученной системы решениям системы (1). Данная система может быть принята в качестве альтернативы системы (1) в случаях, когда важна информация не только об установившемся течении, но и о поведении волны в процессе развития.

Глава II. Двухслойная пленка

Вторая глава состоит из трех частей. В первой части из полной системы уравнений Навье–Стокса с граничными условиями выводится основная система уравнений, описывающая двухслойное пленочное течение, отличающееся от рассматриваемого в главе I наличием поверхности раздела, ниже и выше которой находятся тонкие слои несмешивающихся жидкостей с различными характеристиками. Кроме того, проводится исследование линейной устойчивости системы. Эта система может быть записана в виде

$$q_{1t} + \left(\frac{6}{5}\frac{q_1^2}{h_1} - \frac{3}{10}\mu h_1 q_1 Q + \frac{3}{10}\mu^2 h_1^3 Q^2\right)_x =$$

$$= \frac{1}{5\delta}\left(\varphi h_1 - \frac{q_1}{h_1^2} - 3\mu Q - \beta h_1 \left(h_1 + \rho h_2\right)_x + h_1 \left((\sigma+1)h_1 + h_2\right)_{xxx}\right),$$

$$q_{2t} + \left(\frac{q_2^2}{h_2} + \frac{4}{5}h_2^3 Q^2\right)_x = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{5\delta}\left(\varphi h_2 + 2\nu Q - \beta h_2 (h_1 + h_2)_x + \frac{1}{\rho} h_2 (h_1 + h_2)_{xxx}\right),$$

$$q_{1x} + h_{1t} = 0,$$

$$q_{2x} + h_{2t} = 0,$$

где $Q = \dfrac{3q_1 h_2 - 2q_2 h_1}{h_1 h_2 (4h_2 + 3\mu h_1)}$, $\rho = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$, $\nu = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$, $\mu = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, $\sigma = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$, $\delta = \dfrac{\varepsilon\,\mathrm{Re}}{15}$, $\beta = \dfrac{\varepsilon\,\mathrm{Re}}{3\mathrm{Fr}}\cos\theta$, $\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}}{3\mathrm{Fr}}\sin\theta$, $\varepsilon^3 = \dfrac{3\mathrm{We}}{\mathrm{Re}}$. Здесь индекс 1 соответствует жидкости, граничащей с плоскостью, индекс 2 — жидкости, имеющей свободную поверхность.

Система (3) имеет стационарное решение

$$q_{01} = \varphi h_{01}^2 \left(h_{01} + \frac{3}{2}\rho h_{02}\right),$$

$$q_{02} = \varphi h_{02} \left(\frac{3}{2}h_{01}^2 + 3\rho h_{01} h_{02} + \frac{\rho}{\mu} h_{02}^2\right), \tag{4}$$

$$h_{02} = 1 - h_{01}.$$

Для исследования устойчивости решения (4) проведена линеаризация уравнения (3) в его окрестности. Ищутся периодические по пространству решения линеаризованной системы, которые перемещаются с постоянной фазовой скоростью и амплитуда которых возрастает со временем. Они имеют вид $h_j(x,t) = \hat{h}_j e^{i\alpha(x-ct)}$, $q_j(x,t) = \hat{q}_j e^{i\alpha(x-ct)}$, $j = 1,2$, где α — волновое число, $c = c_r + ic_i$ — собственное число, c_r — фазовая скорость распространения возмущения, $k_i = \alpha c_i$ — коэффициент усиления амплитуды возмущения. Поиск нетривиальных решений приводит к дисперсионному уравнению, решая которое находим область неустойчивости.

Результат сравнивается с исследованием устойчивости в полной постановке с помощью уравнений Орра–Зоммерфельда. Сравнение показывает близость коэффициентов усиления и нейтральных волновых чисел, что дает основание считать, что система (3) пригодна для исследования задач о волнообразовании в двухслойной пленке.

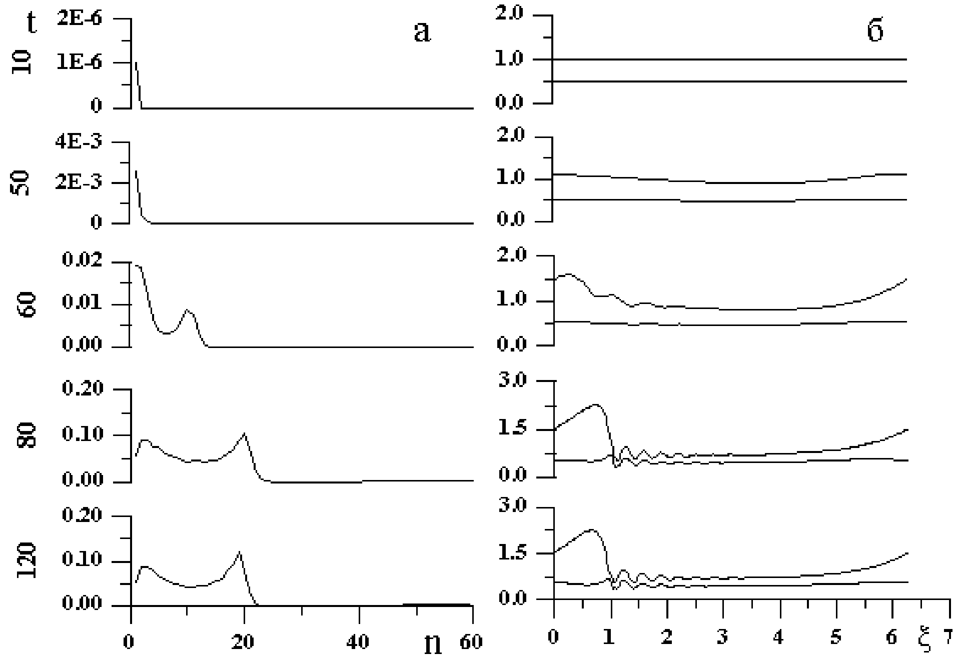
Во второй части исследуется развитие нелинейных волн в двухслойной пленке. Решения ищутся в виде разложения в ряд Фурье по бегущей координате

$$h_j = \sum_{k=-N}^{N} h_{kj}(t) e^{i\alpha k\xi},\ q_j = \sum_{k=-N}^{N} q_{kj}(t) e^{i\alpha k\xi}, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

$$h_{kj} = h^*_{-kj},\ q_{kj} = q^*_{-kj},$$

где * обозначает комплексное сопряжение. После подстановки (5) в (3) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $h_{kj}(t)$ и $q_{kj}(t)$, решение которой ищется численно. В качестве начальных условий берутся простые гармоники с достаточно малой амплитудой, являющиеся решениями линеаризованной системы.

На фиг. 2 показано изменение компонентов спектра $\left\langle (h_x)^2 \right\rangle$ и профиля волны при $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.3385$, $h_{01} = 0.5$, $\rho = 0.88$, $\nu = 0.73$, $\sigma = 0.863$, $\gamma = 1606$. Можно проследить возникновение локального максимума компонентов спектра, что соответствует образованию мелкой ря-



Фиг. 2: Эволюция спектра и профиля волны

би на профиле волны. Отчетливо видно, что хотя профили нижней и верхней жидкости в целом близки, большому горбу верхней пленки не находится аналогии в нижней части, то есть происходит сглаживание профиля нижней пленки. Этот эффект проявляется также и при существенной разнице в толщинах пленок и характеристиках жидкостей, что позволяет рассматривать наличие верхнего слоя как стабилизирующий фактор.

В третьей части строятся асимптотические уравнения при $\alpha \to 0$. Построение такого приближения может быть полезно для исследования решений системы (4), так как при малых α они должны быть достаточно близки.

Вводится растяжение координат и с помощью разложения по малому параметру получаются уравнения на $\vec{\varphi}$

$$\varphi_{it} + (M\varphi_i^2 + N\varphi_{ixxx} - L\varphi_{ix})_x = 0,$$

где M, N и L — константы, зависящие от параметров задачи. Вектор $\vec{\varphi}$ связан с толщинами слоев пленки соотношением $\vec{h} = \vec{h}_0 + \alpha_0^3 X^{-1}\vec{\varphi}$. Матрица X находится из условия обращения в тождество нулевого приближения при переходе к бегущей координате.

Выводы

Проведены численные исследования решений системы, описывающей пленочные течения жидкости, которые показывают, что эта система позволяет воспроизвести в расчетах основные свойства двумерных нелинейных волн, развивающихся в пленках жидкости на наклонных плоских поверхностях при углах наклона $\theta \ll 90°$. Имеется не только качественное, но и количественное соответствие расчетных и экспериментальных данных, которые касаются профилей предельных регулярных волн, саморазвивающихся из малых возмущений заданной частоты, а также фазовых скоростей, изменяющихся вместе с амплитудой волн. Получена и исследована эволюционная система уравнений для развития по времени пространственно-периодических волн.

Выведена система уравнений для течений двухслойной пленки. Проведено исследование устойчивости основного течения. Получены критические значения волнового числа, при которых проявляется неустойчивость и начинается волнообразование. Разработан алгоритм нахождения стационарных периодических решений, по которому выполнена серия расчетов. Обнаружено образование двупериодических волновых режимов, стохастизация фазовой скорости, эффект сглаживания большого горба нижнего слоя. Получено и исследовано асимптотическое слабонелинейное приближение системы.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Сисоев Г.М., Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Неустойчивые солитоны в стекающих пленках вязкой жидкости. Тезисы конференции "Современные проблемы аэрогидродинамики". М: Изд. Моск. ун-та, 2001, с. 55

2. *Сисоев Г.М., Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Пространственное развитие неустойчивых возмущений в течениях капиллярных пленок. Тезисы конференции "Современные проблемы аэрогидродинамики". М: Изд. Моск. ун-та, 2002, с. 58

3. *Сисоев Г.М., Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Развитие возмущений в двухслойных пленках. Тезисы конференции "Аэродинамика и газовая динамика в XXI веке". М: Изд. Моск. ун-та, 2003, с. 109

4. *Тушканов Д.А.* Взаимодействие нелинейных волн в двухслойных стекающих пленках. Тезисы конференции "Ломоносовкие чтения". М: Изд. Моск. ун-та, 2003, с. 124–125

5. *Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Нелинейные волны в капиллярных пленках на наклонной поверхности при малых углах наклона. Тезисы конференции “Современные проблемы аэрогидродинамики”. М: Изд. Моск. ун-та, 2003, с. 69

6. *Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Нелинейные волны в двухслойных пленках. Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2004, №2, с. 51–57

7. *Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Волны в стекающей пленке при малом отклонении удерживающей поверхности от горизонта. Тезисы конференции “Ломоносовкие чтения”. М: Изд. Моск. ун-та, 2005, с. 176–177

8. *Тушканов Д.А., Шкадов В.Я.* Нелинейные волны в пленке жидкости на почти горизонтальной поверхности. Изв. РАН, МЖГ, 2006, №3, с. 11–24