

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



УДК 539.3

ДЕМИДОВИЧ ПАВЕЛ НИКОЛАЕВИЧ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗИНОКОРДА С
ПРИМЕНЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ КАЧЕНИЯ ШИНЫ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007 г.

Работа выполнена на кафедре Механики композитов Механико-Математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор С. В. Шешенин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А. С. Кравчук
доктор физико-математических наук,
ст. науч. сотр. С. Г. Пшеничнов

Ведущая организация: Институт механики сплошных сред
Уральского отделения РАН (г. Пермь)

Защита состоится «28» сентября 2007 года в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д501.001.91 при МГУ им. М. В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, РФ, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, Главное здание, Механико-Математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ (Главное здание, 14 эт.).

Автореферат разослан «24» августа 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор,



Шешенин С. В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Автомобильная шина является высокотехнологическим изделием. Разработанная методами механики деформируемого твердого тела (МДТТ) трехмерная модель шины востребована прежде всего при решении прикладных задач, важных для промышленности. Однако проблемы, возникающие в процессе моделирования шины, имеют и чисто научный интерес. Модель должна описывать сильную неоднородность в структуре шины, состоящей из резинокорда и резины; анизотропию; достаточно сложную геометрию изделия; разнообразие условий эксплуатации. Также важно, чтобы модель позволяла решать различные контактные задачи для системы «колесо — дорога». Максимально полно учесть особенности строения и поведения автомобильной шины можно при её численном моделировании как трехмерного вязкоупругого тела. Наиболее подходящим численным методом является метод конечных элементов (МКЭ).

Расстояние между кордными нитями существенно больше, чем расстояние между волокнами традиционных композитов. Однако непосредственная аппроксимация на уровне корда требует столь мелкой дискретизации рабочей области, что решение возникающих систем уравнений является непосильной задачей для компьютерных комплексов настоящего дня и ближайшего будущего. Поэтому широко используются гомогенизация и различные приближенные модели. К ним относятся модель кольца на упругом основании, модель эффективного кордного волокна, модель эффективного резинокордного слоя и др. Наиболее простой расчет упругих модулей резинокорда производят при плоском напряженном состоянии, а методами теории оболочек определяют напряженно-деформированное состояние (НДС) шины в статической и динамической постановках.

В развитии механики шин и резинокордных композитов участвовали отечественные и зарубежные специалисты, в частности, J. Rotta, F. Böhm, В. Л. Бидерман и Б. Л. Бухин, R. Ridha, T. Akasaka, S. K. Clark, Э. И. Григолюк и Г. М. Куликов, J. Padovan, H. Rothert, А. Е. Белкин, Б. Е. Победря и С. В. Шешенин и многие другие. Ими разработаны различные модели шины, применяемые при решении многих задач. Многообразие в подходах к расчету шины делает актуальным теоретико-экспериментальный анализ существующих моделей с целью выявления ограничений в их применении. Практически важным является синтез различных моделей с целью повышения их универсальности. Также с практической и с теоретической точек зрения представляют интерес исследования различных численных методов в их приложении к решению динамических контакт-

ных задач (например, задачи о наезде колеса на твердое препятствие). Вышеизложенное и определяет актуальность темы диссертации.

Основными целями диссертационной работы являются сравнительный анализ различных моделей резинокорда, применяемых в инженерной практике; строгое описание эффективных свойств резинокорда на основе методики осреднения; построение экспериментально-расчетной методики определения упругих модулей резинокордных пластин; теоретическое и опытное обоснование адекватной модели резинокорда, в которой жесткости на растяжение, изгиб, сдвиг и поперечное сжатие задаются независимо; построение оболочечно-трехмерного конечного элемента; формулировка и реализация контактной задачи.

Научная новизна работы определена тем, что

- проведен сравнительный анализ методик для определения упругих модулей резинокордных пластин;
- по результатам опытов на растяжение образцов с различными кордными углами поставлена и численно решена обратная задача определения упругих модулей компонент — обрешиненного корда и резины;
- для моделей эффективного волокна и эффективного резинокордного слоя экспериментально-аналитически исследована возможность согласованного учета изгибных, растягивающих и сдвиговых жесткостей резинокорда, из чего сделан вывод об актуальности описания резинокорда оболочечно-трехмерными элементами;
- описаны эксперименты, необходимые для задания материальных констант резинокорда в рамках предложенной модели резинокорда;
- для резинокорда построен слоистый конечный элемент, в котором жесткости на изгиб, растяжение, сдвиг и поперечное сжатие задаются независимо;
- построен программный модуль для расчета НДС шины при её динамическом контакте с твердой дорогой для случаев стационарного и нестационарного качений.

Достоверность полученных результатов обусловлена корректно поставленными экспериментами, статистической обработкой опытных данных, экспериментальным обоснованием оболочечно-трехмерной модели резинокорда, использованием строгих математических методов и проверенных численных алгоритмов. Результаты численных экспериментов согласуются с решениями аналогичных задач, полученными другими методами.

Практическая ценность диссертации заключается в разработанной экспериментально-расчетной методике определения упругих модулей резинокорда и приложении полученных результатов к решению практиче-

ски важных контактных задач. Указанная методика и созданный программный модуль использовались при выполнении работ по грантам РФФИ и АФГИР.

На защиту выносятся:

1. экспериментально-расчетная методика определения эффективных модулей резинокорда;
2. построенная и экспериментально обоснованная оболочечно-трехмерная модель резинокорда;
3. постановка и программный модуль решения задач о контакте колеса с дорогой в динамической постановке для случаев стационарного и нестационарного качения.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 14 и 15 Международных симпозиумах «Проблемы шин и резинокордных композитов» в 2003 и 2004 г.г. (г. Москва); на Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященном 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина в 2006 г. (г. Москва); на научных конференциях «Ломоносовские чтения» в 2003, 2004 и 2006 г.г. в МГУ им. М. В. Ломоносова (г. Москва); на научных семинарах кафедры «Механики композитов» (под руководством профессора Б. Е. Победри).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 9-ти научных публикациях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, двух глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 113-ти страницах машинописного текста, содержит 42 рисунка, список использованных источников из 101 наименования.

Краткое изложение диссертации

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В Обзоре литературы рассмотрены вопросы механики шин и описаны работы отечественных и зарубежных авторов, относящиеся к теме диссертации.

Первая глава посвящена экспериментально-аналитическому анализу различных методов определения упругих свойств резинокорда.

В § 1.1 рассмотрена структура легковой шины, приведена классификация шин по строению каркаса, показаны различия между диагональными и радиальными шинами. Далее описывается строение основного материала шины — резинокордного слоя. Обсуждаются трудности, возни-

кающие при изучении резинокорда. Указывается, что серьезные осложнения обусловлены значительным — на несколько порядков — различием в механических свойствах резины и корда; практической несжимаемостью

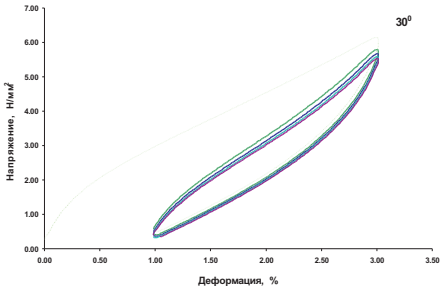


Рис. 1.

резины; геометрической нелинейностью, характерной для эксплуатационных нагрузок. Приводится экспериментальная зависимость напряжения от относительного удлинения при одноосном растяжении плоского образца, из чего сделан вывод о допустимости применения упругих моделей резинокорда (см. рис. 1). Модель резинокорда, основанная на технике осреднения, обсуждается в § 1.2. Однослойный резинокорд, у которого кордные нити расположены параллельно, моделируется как волокнистый композит. Двухслойная пластина обладает иерархической структурой, как показано на рис. 2, так что на втором этапе резинокорд гомогенизируется как слоистый композит. Для случая плоско-напряженного состояния модель двухслойного резинокорда можно упростить и рассматривать один « $\pm\varphi$ -слой», как показано на рис. 3. Плоская модель основана на гипотезе о жестком сцеплении между слоями. В опытах на одноосное растяжение межслойными эффектами можно пренебречь вдали от кромок образца.

резины; геометрической нелинейностью, характерной для эксплуатационных нагрузок. Приводится экспериментальная зависимость напряжения от относительного удлинения при одноосном растяжении плоского образца, из чего сделан вывод о допустимости применения упругих моделей резинокорда (см. рис. 1).

Модель резинокорда, основанная на технике осреднения, обсуждается в § 1.2. Однослойный резинокорд,

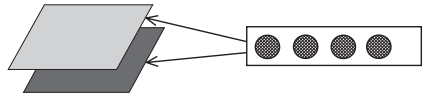


Рис. 2.

В § 1.3 подробно рассматриваются наиболее популярные приближенные методы расчета плоских модулей резинокорда. Для сравнительного анализа были выбраны следующие соотношения:

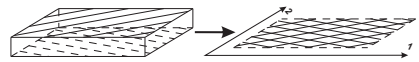


Рис. 3.

формулы Akasaka-Hirano

$$E_L = E_c \gamma_c + E_g (1 - \gamma_c)$$

$$E_T = \frac{4}{3} \frac{E_g}{\gamma_g} = 4G_g \gamma_g^{-1}$$

$$G_{LT} = G_g \gamma_g^{-1} = 0.25 \cdot E_T$$

$$\nu_{LT} = 0.5$$

(1)

уравнения Halpin–Tsai

$$\begin{aligned}
 E_L &= E_c \gamma_c + E_g (1 - \gamma_c) & G_{LT} &= \frac{G_g [G_c + G_g + (G_c - G_g) \gamma_c]}{G_c + G_g - (G_c - G_g) \gamma_c} \\
 E_T &= \frac{E_g (1 + 2\gamma_c)}{1 - \gamma_c} & \nu_{LT} &= \nu_c \gamma_c + \nu_g (1 - \gamma_c)
 \end{aligned} \tag{2}$$

и формулы Gough–Tangorra

$$\begin{aligned}
 E_L &= E_c \gamma_c + E_g (1 - \gamma_c) & G_{LT} &= G_g (1 - \gamma_c) \\
 E_T &= \frac{4E_g (1 - \gamma_c) [E_c \gamma_c + E_g (1 - \gamma_c)]}{3E_c \gamma_c + 4E_g (1 - \gamma_c)} & \nu_{LT} &= 0.5
 \end{aligned} \tag{3}$$

Индексы c и r обозначают корд и резину соответственно. Направление вдоль волокна обозначено буквой L , а поперечное направление — индексом T ; γ_c — объемная концентрация корда. Модули задаются в системе координат, когда одна из осей направлена вдоль корда. Из соотношений (1) выводятся расчетные формулы для плоской модели двухслойных образцов

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= c^4 E_L + E_T, & C_{1122} &= c^2 s^2 E_L + \frac{E_T}{2} \\
 C_{2222} &= s^4 E_L + E_T, & C_{1112} &= 0 \\
 C_{2212} &= 0, & C_{1212} &= c^2 s^2 E_L + \frac{E_T}{4}
 \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $c = \cos(\varphi)$ и $s = \sin(\varphi)$ — функции *кордного угла* φ , равного по определению половине угла между волокнами. Направления 1 и 2 являются главными, как показано на рис. 3. В заключительной части параграфа установлено, что два слоя резинокорда не симметричны относительно срединной плоскости, следствием чего является взаимное влияние крутки и растягивающего усилия. Для случая шины, обжатой на поверхность, это означает отсутствие симметрии в пятне контакта, что согласуется с наблюдениями.

В работах Б. Е. Победри и В. А. Молькова развита модель волокнисто-слоистого композита как среды, периодической по трем направлениям. Краткому описанию модели посвящен §1.4. Преимуществом такого подхода является в частности то, что он позволяет рассчитать все упругие модули, а не только «плоские», хотя и с разной степенью достоверности. Полученные расчетные схемы были впоследствии применены для резинокорда С. В. Шешениным и С. А. Маргаряном. Модифицированный автором программный модуль далее используется для сравнительного анализа различных моделей резинокорда.



Рис. 4.

В §1.5 описывается серия экспериментов на одноосное растяжение двухслойных образцов, проведенных с целью сравнительного анализа «плоских» модулей резинокорда и определения поперечного модуля. Опыты проводились в Институте механики МГУ на испытательной машине фирмы ZWICK. Автор выражает благодарность сотрудникам НИИ механики П. В. Чистякову и А. В. Муравлеву за содействие в организации экспериментов. Внешний вид установки представлен на рис. 4. Использовались двухслойные пластины размером $320 \times 80 \times 2$ мм. Испытанные образцы были однотипными, т. е. совпадали по структурным и геометрическим характеристикам своих компонент. Различия касались только кордных углов φ , принимавших значения $0^0, 10^0, 15^0, 20^0, 25^0, 30^0, 40^0, 60^0$ и 90^0 . Концентрация волокон, определяемая как отношение объема корда к объему слоя, составляла 12% ($\gamma_c = 0.12$). Также имелись контрольные двухслойные пластины без корда для измерения модуля резины. Для каждого образца была определена экспериментальная зависимость $\sigma \sim \varepsilon$, характерный вид которой представлен на рис. 1. Эффективный модуль Юнга аппроксимировался методом линейной регрессии. В результате была получена эмпирическая зависимость $E^{\text{эфф}}$ от кордного угла φ . Аналогичные зависимости были вычислены для некоторых приближенных моделей. Результаты сравнения представлены на рис. 5. График *Homogenization simplified* соответствует «формуле смесей». Кривая *Homogenization* вычислена в рамках модели, описанной в §1.4. Линии *FE 2D Link elements* и *FE 3D Link elements* соответствуют двух- и трехмерной модели. Они были получены в результате численного моделирования опыта на одноосное растяжение методом конечных элементов. По результатам экспериментальной проверки инженерных методик был сделан вывод об их достаточной точности при вычислении модуля Юнга для практически важных углов $> 20^0$.

В §1.6 исследована обратная задача определения модулей обрезиненного корда и резины по известному продольному модулю резинокорда. Показано, что для решения задачи достаточно одних лишь опытов на одноосное растяжение двухслойных образцов с различными кордными

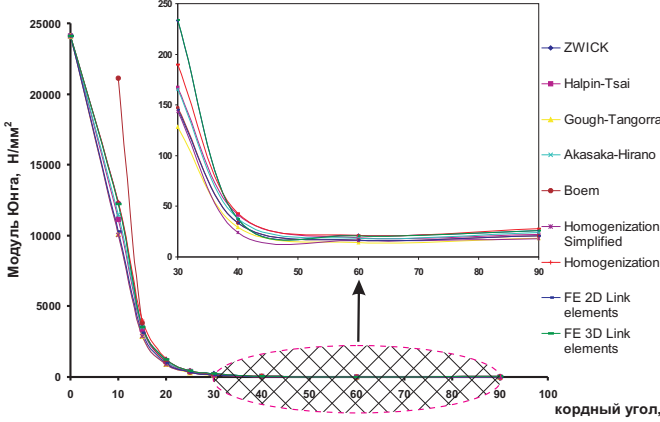


Рис. 5.

углами. Искомые модули E_r и E_c были вычислены с помощью модифицированного метода Ньютона:

$$\begin{pmatrix} E_g^{n+1} \\ E_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_g^n \\ E_c^n \end{pmatrix} - \tau \cdot \begin{pmatrix} H_{(1)}(E_g^n, E_c^n) - E_{(1)}^{exp} \\ H_{(2)}(E_g^n, E_c^n) - E_{(2)}^{exp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{(1)}}{\partial E_g} & \frac{\partial H_{(1)}}{\partial E_c} \\ \frac{\partial H_{(2)}}{\partial E_g} & \frac{\partial H_{(2)}}{\partial E_c} \end{pmatrix}^{-1} \quad (5)$$

здесь $E_{(1)}^{exp}$ и $E_{(2)}^{exp}$ взяты из опытов и соответствуют двум разным углам φ_1 и φ_2 ; E_g^i , E_c^i — i -ые приближения для модулей резины и корда; τ — итерационный параметр, улучшающий сходимость алгоритма (обычно он принимался равным 0,5). Расчетная схема, по которой модули резино-корда вычисляются через модули его изотропных компонент, обозначена как H . Таким образом, функция $H(E_c, E_r, \varphi)$ может быть соотнесена с любой приближенной моделью из рассмотренных в §1.5. Численный эксперимент был проведен с использованием метода осреднения, рассмотренного в §1.4. Выбор обусловлен во-первых тем, что по результатам §1.5 метод продемонстрировал хорошую аппроксимацию опытных данных. Во-вторых, указанная модель позволяет находить все (а не только «плоские») модули резинокорда. Поскольку в этом случае аналитическая форма у функции H отсутствует, дифференцирование проводилось тоже численно. Была установлена сходимость схемы (5) для следующих пар углов: $0^0/25^0$, $0^0/90^0$, $10^0/90^0$, $25^0/60^0$ и некоторых других. При этом

расхождение между значениями вычисленного модуля резины и измеренного в эксперименте не превысило 7-ми%. Далее, метод был проверен на контрольном образце с $\varphi = 20^0$ по следующей схеме:

$$(E_{\varphi_1}^{exp}, E_{\varphi_2}^{exp}) \rightarrow (E_g, E_c) \rightarrow E_{(20^0)}^{eff} \quad \text{сравнить с } E_{(20^0)}^{exp} \quad (6)$$

В этом случае ошибка оказалась в районе 3-х%. Вообще, обратный алгоритм показал хорошие результаты, когда хотя бы один из кордных углов достаточно мал ($< 25^0$). Расходимость при больших углах можно объяснить тем, что при больших углах продольная жесткость резинокорда слабо зависит от модуля корда. Ценность предложенной методики состоит в том, что она позволяет сравнительно дешево определить свойства обрезиненного корда, которые не совпадают с его первоначальными свойствами.

Проблема определения поперечного модуля резинокорда на сжатие и жесткости резинокорда на изгиб обсуждается в §1.7. Были рассмотрены две модели резинокорда: модель эффективного волокна (левый рис.6), применяемая для определения «плоских» модулей резинокорда, и модель эффективного слоя, которая используется при моделировании качения шины (правый рис.6). Подробно исследован модуль на поперечное сжатие E_3 . С помощью конечно-элементных расчетов в рамках моделей эффективного волокна была изучена зависимость модуля от концентрации корда. Установлено, что формулы, применяемые для вычисления E_T , удовлетворительно аппроксимируют модуль E_3 , если концентрация корда не превосходит 15-ти%.

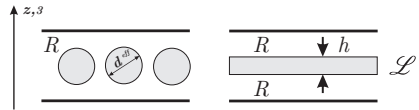


Рис. 6.

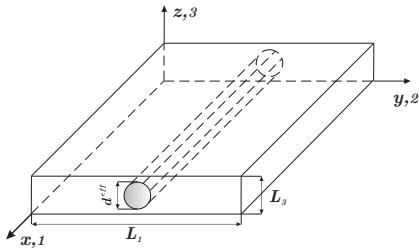


Рис. 7. Ячейка периодичности

модуля E_3 от отношения L_1/L_3 становится более выраженной, что важно,

Далее, рассматривалась трехмерная конечно-элементная модель резинокорда как среды, периодической по двум направлениям, представленная на рис.7. Изучена зависимость поперечного модуля от отношения L_1/L_3 длины и ширины ячейки периодичности. Установлено, что только при малых концентрациях корда (до 15%) допустимо этой зависимостью пренебречь. С ростом относительного содержания корда зависимость

поскольку для практического значения $L_1/L_3 = 2.77$ концентрация существенно больше 15-ти%. Поскольку сама модель эффективного волокна не представляется адекватной для вычисления поперечного модуля резинокорда E_3 , для определения модуля E_3 были поставлены опыты на сжатие резинокордных пластин. Эксперименты проводились в Институте механики МГУ на испытательной установке фирмы ZWICK (рис. 4). Были использованы те же двухслойные образцы, описанные в §1.5. Образец закреплялся на плоской станине, расположенной в рабочей части машины, и прессовался с помощью цилиндрических инденторов. Всего в опытах применялось два однотипных стальных индентора с различными диаметрами: $d_1 = 45 \text{ мм}$ и $d_2 = 22 \text{ мм}$. В результате были получены экспериментальные зависимости $\sigma \sim \varepsilon$, по которым методом линейной регрессии был определен модуль E_3^{exp} . При сравнении его значения с измеренным в §1.5 модулем E_T^{exp} , установлено: $E_3^{exp} \simeq 2 \cdot E_T^{exp}$. Сделан вывод, что модуль E_3 нельзя аппроксимировать по приближенным формулам, принятым для расчета модуля E_T . Нельзя применять и саму модель эффективного волокна. Это означает, что для определения модуля E_3 из решения задачи на ячейке периодичности необходимо задавать реальную структуру корда. Однако, вероятно надежнее модуль E_3 определять экспериментально. В тоже время отмечено, что для определения «плоских» модулей модель эффективного волокна является вполне приемлемой.

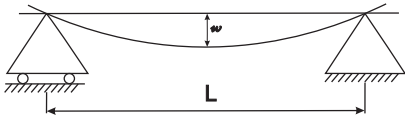


Рис. 8. Схема опыта на изгиб

Для модели эффективного слоя \mathcal{L} (правая часть рис.6) была подробно исследована проблема определения эффективной толщины h . Из условия $E_3^{eff} = E_3^{exp}$ было выведено неравенство $0,7 \leq h/H \leq 1,0$, где H — полная толщина пластины, h — толщина эффективного слоя. С дру-

гой стороны, из условия совпадения изгибных жесткостей, рассчитанных по модели эффективного волокна и модели эффективного слоя, получено: $h/H < 0,5$. Жесткость на изгиб D^{exp} была определена также из опыта, схематично представленного на рис.8. Для сравнения, эффективная жесткость на изгиб D^{eff} рассчитывалась в рамках двухслойной модели эффективного слоя с использованием гипотезы эффективного волокна. В результате было получено:

$$D^{exp} \approx 7000 [H \cdot \text{мм}] \quad D^{eff} \approx 10000 [H \cdot \text{мм}] \quad (7)$$

т.е. экспериментальная жесткость еще меньше, чем дает гипотеза эффективного волокна. В итоге сделан вывод о невозможности выбрать толщи-

ну эффективного слоя так, чтобы достаточно хорошо аппроксимировать и модуль E_3 , и жесткость на изгиб.

К сожалению, современный уровень вычислительной техники не позволяет более детально учесть строение шины при решении краевых задач и отказаться от модели эффективного слоя. Однако, если моделировать резинокордный слой специальным конечным элементом, то тогда жесткости на растяжение, изгиб, сдвиг и сжатие можно задавать независимо.

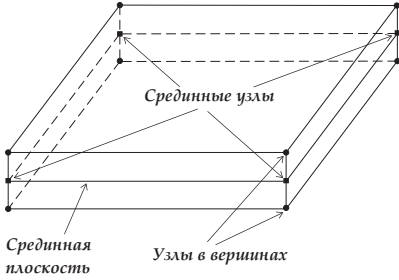


Рис. 9.

и κ_{PQ} — растяжения, сдвиги и крутки, A_{IJPQ} — растягивающие и сдвиговые эффективные жесткости, D_{IJPQ} — эффективные изгибы, $B_{IJPQ}^{(1)}$, $B_{IJPQ}^{(2)}$ — эффективные жесткости взаимного влияния. Растягивающие, изгибные и смешанные жесткости $B_{IJPQ}^{(1)}$, $B_{IJPQ}^{(2)}$ задаются выражениями

$$\begin{aligned}
 A_{IJPQ} &= \varepsilon \int_{-H/2}^{+H/2} P_{IJPQ} d\xi_3, & B_{IJPQ}^{(1)} &= \varepsilon^2 \int_{-H/2}^{+H/2} -Q_{IJPQ} d\xi_3 \\
 B_{IJPQ}^{(2)} &= \varepsilon^2 \int_{-H/2}^{+H/2} \xi_3 P_{IJPQ} d\xi_3, & D_{IJPQ} &= \varepsilon^3 \int_{-H/2}^{+H/2} -\xi_3 Q_{IJPQ} d\xi_3
 \end{aligned} \tag{9}$$

здесь P_{IJPQ} и Q_{IJPQ} находятся из решения задачи на ячейке периодичности. Интегралы берутся по периодической ячейке. Для резинокорда интегрирование ведется поперек толщины, а локальные задачи являются одномерными.

Отметим, что жесткости на растяжение и изгиб можно также определить из экспериментов. Формулы (8), (9) годятся для нескольких слоев резинокорда. Для одного слоя формулы (8) упрощаются

$$N_{IJ} = A_{IJPQ} e_{PQ}, \quad M_{IJ} = D_{IJPQ} \kappa_{PQ}$$

В §1.8 изложен способ моделирования резинокорда с помощью оболочечно-трехмерного элемента, схематично показанного на рис.9. Модель резинокорда при растяжении и изгибе, получаемая методом осреднения, записывается так:

$$\begin{aligned}
 N_{IJ} &= A_{IJPQ} e_{PQ} + B_{IJPQ}^{(1)} \kappa_{PQ} \\
 M_{IJ} &= B_{IJPQ}^{(2)} e_{PQ} + D_{IJPQ} \kappa_{PQ}
 \end{aligned} \tag{8}$$

здесь N_{IJ} и M_{IJ} — усилия и крутящие моменты в плоскости пластины, e_{PQ}

Выражение энергии имеет вид

$$W(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2) = HA_{IJPQ}e_{IJ}^1e_{PQ}^2 + H^3D_{IJPQ}\kappa_{IJ}^1\kappa_{PQ}^2 \quad (10)$$

Построение конечного элемента для резинокорда было проведено в четыре этапа:

1. аппроксимация энергии (10) при помощи функций формы срединной плоскости и узловых переменных в срединной плоскости;
2. аппроксимация энергии поперечного обжатия;
3. применение три-линейных функций формы для аппроксимации энергии поперечного сдвига;
4. выражение узловых неизвестных срединной плоскости через узловые перемещения в вершинах трехмерного элемента (см. рисунок 9).

Далее, в качестве примера было продемонстрировано применение слоистого элемента в моделировании резинокорда.

В выводах к параграфу отмечено то преимущество оболочечно-трехмерного элемента, что матрица жесткости элемента выражена в терминах продольных, изгибных и поперечных жесткостей резинокорда, которые задаются как независимые входные параметры. Особенно целесообразно использование этого элемента для моделирования резинокорда с текстильным кордом.

Во второй главе излагается методика решения задач стационарного и нестационарного качения шины с использованием полностью Лагранжевого подхода и полностью трехмерных конечных элементов.

В §2.1 осуществлена постановка краевой задачи в начальной области $\overset{0}{V}$, отнесенной к моменту t_0 . В текущий момент времени t шина занимает объем V . В уравнении движения использован первый тензор Пиола – Киргоффа $\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}$:

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \overset{0}{\rho} \ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{r} \in \overset{0}{V} \quad (11)$$

здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}(X_1, X_2, X_3, t)$ — радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации; в начальной конфигурации радиус-вектор обозначен как $\mathbf{r} = x_i \mathbf{k}_i$; через $X_i, i = 1, 2, 3$ обозначены декартовы координаты x_i в момент t_0 ; $\overset{0}{\rho}$ — плотность в начальной конфигурации. Также использованы тензор Коши \mathbf{T} , градиент места $\mathbf{F}^T = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}$, якобиан преобразования начальной конфигурации в текущую $J = dV/d\overset{0}{V}$. Через $\overset{0}{\nabla}$ и ∇ обозначены градиенты в начальный и текущий моменты соответственно. Начальная и актуальная граничные поверхности тела Σ (соответственно $\overset{0}{\Sigma}$) разбиты на четыре части: $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_c \cup \Sigma_p \cup \Sigma_{ext}$. На Σ_p с норма-

лью \mathbf{N} приложено внутреннее давление p ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = -p \mathbf{N}$), так что на недеформированной поверхности с нормалью \mathbf{n} выполнено соотношение

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = -p J \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^{-1} = -p J_{\Sigma} \mathbf{N}, \quad \mathbf{r} \in \Sigma_p^0 \quad (J_{\Sigma} = d\Sigma/d\Sigma^0) \quad (12)$$

Внешняя поверхность Σ_{ext}^0 шины свободна от нагрузки

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma_{ext}^0 \quad (13)$$

На Σ_u^0 заданы перемещения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma_u^0 \quad (14)$$

причем положено, что $\mathbf{R}_0 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{v}t$, где $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$ — матрица поворота. Компонента переносной скорости удовлетворяет соотношению (здесь через d обозначена осадка колеса): $v_{nep} = \omega R_{tire} (1 - d)$. Контактные условия на поверхности Σ_c сформулированы в §2.2.

При записи вариационного уравнения, 2-ой тензор Пиола – Киргофа \mathbf{S} был использован для подобласти V_{rc}^0 , занимаемой резинокордом. В подобласти V_r^0 , которая заполнена резиной, применялся 1-ый тензор Пиола – Киргофа \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \int_{V_r^0} \mathbf{P}(\mathbf{u}) : \nabla^0 (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^T dV^0 + \int_{V_{rc}^0} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) dV^0 + \int_{V^0} \rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) dV^0 = \\ = -p \int_{\Sigma_p^0} J_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) d\Sigma_p^0 + \int_{\Sigma_c^0} J_{\Sigma} \mathbf{S}_c(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) d\Sigma_c^0 \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{w} - \mathbf{w}_0$ — возможное перемещение, удовлетворяющее нулевому граничному условию на Σ_u ; \mathbf{S}_c — вектор контактных усилий, существенно нелинейно зависящий от перемещения; двойное скалярное произведение обозначено как двоеточие. Задание $\mathbf{S}_c(\mathbf{u})$ дано в следующем параграфе с помощью контактного алгоритма.

Определяющее соотношение для резины записано через потенциальную энергию деформирования W , которая разбита на сумму потенциалов, характеризующих сдвиг и объемную деформацию:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad W = W_{shear} + W_{vol} \quad (15)$$

Сдвиг аппроксимировался потенциалом Муни – Ривлина

$$W_{shear} = C_{10}(\bar{I}_1(\mathbf{G}) - 3) + C_{01}(\bar{I}_2(\mathbf{G}) - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^2 \quad (16)$$

здесь $\bar{I}_1(\mathbf{G})$, $\bar{I}_2(\mathbf{G})$, $\bar{I}_3(\mathbf{G})$ – приведенные инварианты тензора деформации, определенные в виде

$$\bar{I}_\alpha = I_\alpha(\bar{\mathbf{F}}), \quad \bar{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}}{(\det \mathbf{F})^{1/3}}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

Объемный потенциал задавался следующим образом

$$W_{vol} = \frac{K}{2}(\det \mathbf{F} - 1)^2 \quad (17)$$

где K – модуль объемного сжатия и / или параметр штрафа.

Определяющее соотношение для резиноcordа задавалось в скоростях

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}_{rc} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \quad (18)$$

здесь модули \mathbf{C}_{rc} считались постоянными; $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 1/2(\mathbf{G} - \mathbf{I})$; $\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$.

Использовалось также определяющие соотношение для резины, записанное в скоростях

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{F}^2} : (\nabla \dot{\mathbf{u}}) \quad (19)$$

Таким образом была сформулирована нелинейная краевая задача в частных производных — соотношения (11) - (14) плюс условия контакта — нахождение вектора \mathbf{R} (или вектора перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$). Задача решалась с помощью дискретизации по параметру t , так что определялся вектор $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}^t$. Удерживая лишь члены, линейные относительно приращения перемещения $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t$, запишем

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2} : (\overset{0}{\nabla} \Delta \mathbf{u}) = \overset{0}{\rho} \Delta \ddot{\mathbf{R}}, \quad (20)$$

Преобразуем краевые условия на $\overset{0}{\Sigma}_u$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{r} \in \overset{0}{\Sigma}_u \quad (21)$$

и краевые условия на $\overset{0}{\Sigma}_p$ (давление считается постоянным)

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{P}(\Delta \mathbf{u}) = -p \Delta (J_\Sigma \mathbf{N}) \quad (22)$$

В результате было получено

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nabla} \cdot [C^m : (\overset{0}{\nabla} \Delta \mathbf{u}^m)^T] &= \overset{0}{\rho} \Delta \ddot{\mathbf{R}}^m \\ C^m &= C(\mathbf{R}^m) \\ \Delta \mathbf{u}^m &= \mathbf{R}^{m+1} - \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{R}^m = \mathbf{R}(t_m), \quad t_m = m\Delta t, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Аппроксимация граничного условия (22) производилось на внутренних итерациях, которые являются одновременно и итерациями контактного алгоритма.

Для уравнения движения и граничных условий верны следующие приближенные соотношения

$$\overset{0}{\nabla} \cdot [C^m : (\overset{0}{\nabla} \Delta \mathbf{u}^{m,s})^T] = \overset{0}{\rho} \left(\ddot{\mathbf{R}}^{m,s} - \ddot{\mathbf{R}}^{m-1} \right) \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{m,s} = (\Delta \mathbf{R}^0)^m, \quad \mathbf{r} \in \Sigma_u^0 \quad (25)$$

$$\mathbf{n} \cdot [C^m : (\overset{0}{\nabla} \Delta \mathbf{u}^{m,s})^T] = -p \left(J_{\Sigma}^{m,s-1} \mathbf{N}^{m,s-1} - J_{\Sigma}^{m-1} \mathbf{N}^{m-1} \right) \quad (26)$$

здесь через s обозначен номер текущей итерации; $\Delta \mathbf{u}^{m,s}$ – s -ая итерация вектора $\Delta \mathbf{u}^m$, так что $\Delta \mathbf{u}^{m,0} = \Delta \mathbf{u}^{m-1}$. Приращение перемещения $\Delta \mathbf{u}^m$ в левой части (26) соответствует s -ой итерации, в то время как правая часть отнесена к $(s-1)$ -ой итерации.

Так была осуществлена постановка задачи движения шины относительно неподвижной системы отсчета. Однако известно, что задачу удобнее решать в системе отсчета, которая вращается вместе с колесом. Для этого случая полное ускорение было представлено как сумма ускорений относительного, центробежного и Кориолисова

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r$$

или в приращениях

$$\Delta \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\Delta \mathbf{u})] - 2\boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{v}_r + \Delta \mathbf{a}_r$$

где \mathbf{u} и $\Delta \mathbf{u}$ – относительное перемещение и приращение относительного перемещения во вращающейся системе; \mathbf{a}_r и \mathbf{v}_r – относительные скорость и ускорение соответственно; $\mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\omega}$ считалась постоянной.

Был рассмотрен следующий класс задач: шина катится стационарно и наезжает на препятствие небольшого размера. Соответственно, приближенно полагалось, что угловая скорость вращения обода колеса не

изменяется: $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$. Приращения относительных скорости и ускорения выражались через приращение перемещения

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{a} &= A_1 \Delta \mathbf{u} - A_2 \mathbf{v}(t) - (A_3 + 1) \mathbf{a}(t) \\ \Delta \mathbf{v} &= [(1 - \delta) \cdot \mathbf{a}(t) + \delta \cdot \mathbf{a}(t + \Delta t)] \Delta t\end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3 и δ – известные константы метода Ньюмарка.

Все члены с $\Delta \mathbf{u}^{m,s}$ добавляются в матрицу жесткости, остальные – в правую часть. Сформулированное выше справедливо как для нестационарного, так и стационарного вращения. Различие заключается в том, что в последнем случае производная по времени заменяется дифференцированием по углу φ .

Уравнение движения в приращениях в случае стационарного вращения использовано в виде

$$[C^{ijpq}(\mathbf{R}^m) \Delta u_{p,q}]_{,j} + \overset{0}{\rho} \omega^2 \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (27)$$

Здесь учтено, что вектор поворота имеет единственную координату, отличную от нуля: $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ и $\omega = \text{const}$. На начальном шаге $m = 0$ решалась статическая задача о раздувании шины внутренним давлением с учетом центробежных сил

$$\begin{aligned}[C^{Ij pq}(\mathbf{R}^m) \Delta u_{p,q}]_{,j} + \overset{0}{\rho} \omega^2 x_I^0 &= 0 \\ [C^{3j pq}(\mathbf{R}^m) \Delta u_{p,q}]_{,j} &= 0 \\ I = 1, 2 \quad , \quad i, p, q, &= 1, 2, 3\end{aligned} \quad (28)$$

здесь пренебрегается изменением геометрии вследствие надува шины внутренним давлением. В уравнении (27) учтено изменение центробежных сил в результате относительных перемещений шины, вызванных контактом с дорогой. Наличие последнего члена в уравнении (27) существенно усложняет решение задачи при больших скоростях поскольку приводит к потере сильной эллиптичности (положительной определенности) краевой задачи и результирующей линейной системы алгебраических уравнений.

В §2.2 описан контактный алгоритм для решения задач в приращениях на основе закона Кулона, записанного следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{если } \sigma_N < 0 \text{ и } |\mathbf{S}_T| < k|\sigma_N| \text{ тогда } \Delta \mathbf{u}_T &= 0, \\ \text{если } \sigma_N < 0 \text{ и } |\mathbf{S}_T| = k|\sigma_N| \text{ тогда } \frac{\mathbf{S}_T}{|\mathbf{S}_T|} &= - \frac{\Delta \mathbf{u}_T}{|\Delta \mathbf{u}_T|}\end{aligned} \quad (29)$$

здесь вектор напряжения \mathbf{S}^N разложен $\mathbf{S}^N = \sigma_N \cdot \mathbf{N} + \mathbf{S}_T$ на тангенциальную \mathbf{S}_T и нормальную $\sigma_N \cdot \mathbf{N}$ составляющие. Используемый контактный алгоритм впервые был предложен А. С. Кравчуком. Полагалось, что контакт колеса с дорогой описывается уравнением $f(\mathbf{R}, t) = 0$ таким образом, что шина расположена в области пространства, соответствующем неравенству: $f(\mathbf{R}, t) \geq 0$. Граничные условия на контактирующей поверхности имеют вид

$$\text{если } f(\mathbf{R}^{m+1, s-1}, t^m) > 0 \text{ тогда } \mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}^m : (\overset{0}{\nabla} \Delta \mathbf{u}^{m, s})^T] = 0,$$

$$\text{если } f(\mathbf{R}^{m+1, s-1}, t^m) \leq 0 \text{ тогда } \mathbf{n} \cdot [\mathbf{C}^m : (\overset{0}{\nabla} \Delta \mathbf{u}^{m, s})^T] = \Delta(J_\Sigma \mathbf{S}_c)^{m, s}$$

здесь через $\mathbf{S}_c^{m, s}$ обозначена s -ая итерация для вектора напряжения контактной поверхности, вычисленного для момента времени t_m . Правая часть $\Delta(J_\Sigma \mathbf{S}_c)^{m, s}$ расписывается следующим образом

$$\Delta(J_\Sigma \mathbf{S}_c)^{m, s} = (J_\Sigma \mathbf{S}_c)^{m+1, s} - (J_\Sigma \mathbf{S}_c)^m$$

здесь $\mathbf{S}_c^{m+1, s} = \mathbf{S}_T^{m+1, s} + \sigma_N^{m+1, s} \cdot \mathbf{N}$. Для решения системы (29) был использован итерационный метод на основе оператора проектирования. Итерации $\mathbf{S}_T^{m+1, s}$, $\sigma_N^{m+1, s}$ вычислялись по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_T^{m+1, s} &= P_T[\mathbf{S}_T^{m+1, s-1} + \beta_T \Delta \mathbf{u}_T^{m, s-1}] \\ \sigma^{m+1, s} &= P_N[\sigma^{m+1, s} - \beta_N d_N^{m, s-1}] \end{aligned}$$

здесь через d_N обозначено расстояние от узла до препятствия. Оператор проекции был выбран в виде:

$$\begin{aligned} P_N(\sigma_N) &= \begin{cases} 0, & \sigma_N > 0 \\ \sigma_N, & \sigma_N \leq 0 \end{cases} \\ P_T(\mathbf{S}_T) &= \begin{cases} \mathbf{S}_T, & |\mathbf{S}_T| \leq k|\sigma_N^{m, s-1}| \\ \frac{\mathbf{S}_T}{|\mathbf{S}_T|} k|\sigma_N^{m, s-1}|, & |\mathbf{S}_T| > k|\sigma_N^{m, s-1}| \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

где β_N и β_T – параметры итераций. В качестве начального приближения можно положить $\Delta(J_\Sigma \mathbf{S}_c)^{m+1, 0} = (J_\Sigma \mathbf{S}_c)^m - (J_\Sigma \mathbf{S}_c)^{m-1}$. Однако численные тесты показали, что начальные значения не играют существенной роли для контактного алгоритма.

Контактный итерационный алгоритм на каждой итерации "s" приводит к линейной задаче. Для решения этой *внутренней* задачи использовались как итерационный, так и прямой методы. Если внутренний метод

итерационный, то оба алгоритма, рассмотренные в совокупности, составляют так называемый *двухступенчатый* метод. Главной его особенностью является то, что для достижения высокой общей точности достаточно небольшого числа внутренних итераций. В численных экспериментах пороговая точность внутренних итераций задавалась равной 0,5 или 0,7. Для решения внутренней задачи нами также применялся прямой метод. Это позволило сделать вывод об оптимальности выбранной точности внутреннего итерационного процесса, поскольку при её дальнейшем повышении время расчета увеличивалось без существенного улучшения результирующей точности. Более того, для плохо обусловленных матриц жесткости (для модели шины этого свойства избежать не удастся) излишне сильное требование к точности внутренних итераций приводит к расходимости алгоритма.

Скорость сходимости метода (30) продемонстрирована на графиках 10. На верхнем рисунке построена зависимость числа внешних итераций, необходимых для достижения точности 0.01, от контактных итерационных параметров. Для расчета оба итерационных параметра выбирались равными. Коэффициент трения принимался равным 0.8. Нижняя диаграмма демонстрирует зависимость времени счета (в минутах) от контактных итерационных параметров. Можно заметить качественную корреляцию обоих графиков, однако минимумы не совпадают. Обе кривые не являются монотонными, что затрудняет априорную оценку оптимальных значений для параметров итерации.

Установлено, что наилучший выбор итерационных параметров повышает эффективность метода до 25%.

Однако следует учесть, что в случае нелинейного анализа существенная доля полного расчетного времени затрачивается на формирование глобальной матрицы жесткости. С другой стороны, настройка оптимальных итерационных параметров возможна с помощью упрощенных предвари-

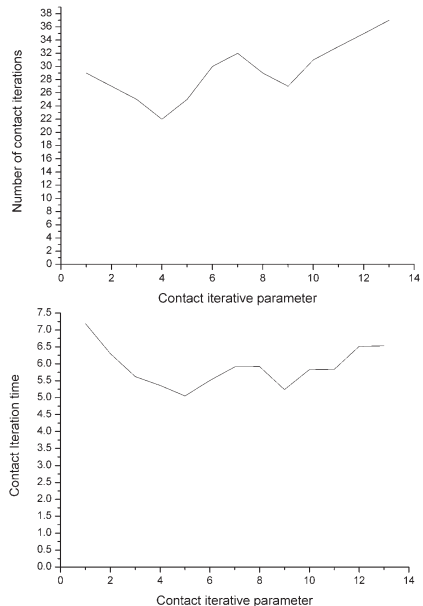


Рис. 10.

тельных расчетов. В качестве тестового расчета была решена задача о колесе, катящемся по твердой плоскости. При больших значениях параметров поведение контактного алгоритма оказалось неустойчивым. Мονотонную сходимость можно получить, ограничив область значений параметров итерации окрестностью единицы. В более сложных задачах, например при наезде на цилиндрическое или сферическое препятствие, оказалось, что для достижения устойчивой сходимости и сокращения времени счета итерационные параметры следует выбирать существенно меньше.

В §2.3 описана конечно-элементная модель радиальной шины, в которой использованы резинокордные слои трех типов. Слой, примыкающий к ободу колеса, соответствует каркасу шины и имеет кордный угол 90^0 . Над ним расположены два резинокордных слоя с углами $\pm\varphi$, которые моделируют брекер шины. Четвертый слой моделирует область, расположенную непосредственно под протектором, которая укреплена нейлоновыми нитями. Все слои однородны, и их механические свойства определялись по методике, развитой в [7]. Важными элементами модели являются резиновые прослойки. Рассмотрены случаи: прослойки отсутствуют или расположены лишь между резинокордными слоями разных типов («модель 1») и резиновая прослойка также разделяет слои брекера («модель 2»).

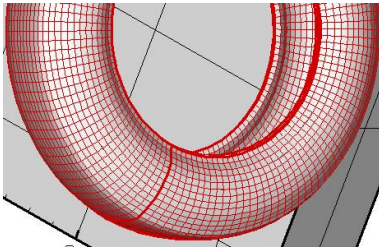


Рис. 12.

Равномерная в окружном направлении сет-

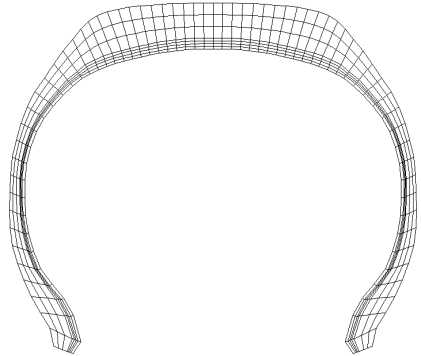


Рис. 11.

Для второй модели получено несимметричное распределение давления в пятне контакта, что согласуется с экспериментальными данными. Напротив, в рамках первой модели окружное направление является главным и распределение усилий в зоне контакта остается симметричным.

Конечно-элементное разбиение иллюстрирует рис.11. Количество узлов по толщине равно восьми для первой модели и девяти для второй.

ка показана на рисунке 12. Для вычислений мы использовали следующее разбиение: от 6 до 9 узлов по толщине шины, от 47 до 67 узлов в меридиональном направлении и до 144 узлов в окружном направлении.

Для построения сетки в меридиональном сечении была написана программа. Она работает с произвольным числом слоев и произвольным числом граничных поверхностей, которые задаются координатами своих узлов. На толщину отдельного слоя также нет ограничений. После успешного разбиения плоского сечения полученная сетка распространяется на весь объем, занятый шиной.

В §2.4 с помощью численных экспериментов исследована работоспособность построенных выше моделей. Процесс моделирования наезда на препятствие следующий. На первом этапе решается задача об установившемся качении колеса. Найденное решение используется как начальное условие при рассмотрении дальнейшего качения. Установлено, что упругая модель накладывает известное ограничение на максимальную скорость, для которой возможно получить решение. Было проведено большое число тестовых вычислений для случая стационарного качения в линейно-упругой постановке. Оказалось, что предельная скорость вращения, при которой вычислительные алгоритмы демонстрируют устойчивость, зависит от размера конечно-элементной сетки, коэффициента Пуассона и того факта, является ли конечно-элементное разбиение шины равномерным или неравномерным в окружном направлении.

В большинстве тестов принималось, что динамический радиус колеса составляет 93% от начального радиуса. В задаче об обжатии неподвижной шины на твердую поверхность итерационный алгоритм сходится для коэффициента Пуассона, меньшего или равного 0.497. Большая устойчивость алгоритма наблюдалась при $\nu = 0.495$, но опять же для случая неподвижной шины. Было определено, что предельное значение коэффициента Пуассона, при котором работают прямые методы, составляет 0.49. При прямом методе на решение системы из 46000 линейных уравнений было затрачено приблизительно 3.3 мин. (процес-

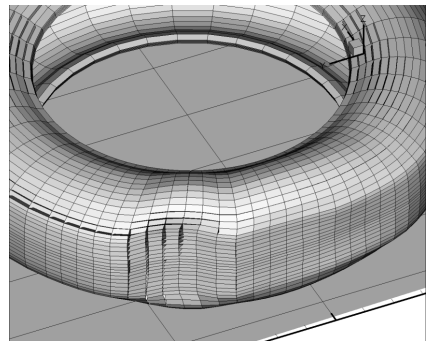


Рис. 13. Деформирование сетки при наезде на цилиндрическое препятствие. Скорость – 70 км/ч, коэффициент трения – 0.8, кордыный угол брекера – 25°

сор Pentium3 с тактовой частотой 1GHz), причем потребовалось 500Mb оперативной памяти. Максимальный размер системы, решенной нами при $\nu = 0.49$ итерационно, составлял 260000 уравнений при требуемом объеме памяти всего лишь в 187Mb. Были проведены тестовые расчеты для выяснения влияния сил инерции на сходимость метода. Установлено, что максимально допустимый размер обрабатываемой матрицы существенно зависит от угловой скорости вращения колеса. В завершении параграфа с помощью рисунков продемонстрированы возможные распределения нормальных и касательных составляющих поверхностных усилий в зоне контакта колеса с дорогой.

В Заключение кратко сформулированы итоги работы:

- Рассмотрены и проанализированы на предмет корреляции с опытными данными известные приближенные подходы к определению «плоских» модулей резинокорда.
- Построена замкнутая расчетно-экспериментальная методика определения «плоских» упругих модулей резинокорда, на основе лишь опытов на одноосное растяжение плоских образцов. Модули резины и корда определяются путем решения обратной задачи с помощью модифицированного итерационного метода Ньютона.
- Предложен конечный элемент, отражающий специфические свойства резинокордного композита, в котором независимо задаются продольные модули, изгибные жесткости и жесткости на поперечное сжатие.
- Осуществлена постановка контактной задачи стационарного и нестационарного качения для колеса, катящегося по твердой дороге, с учетом силы трения в рамках закона Кулона. Линеаризация задачи качения по времени осуществлена с использованием метода Ньюмарка, записанного в приращениях. Применен двухступенчатый итерационный алгоритм решения контактной задачи. Проведены численные тесты для случаев стационарного и нестационарного движения, в случае наезда на препятствие.
- Численно исследована зависимость результатов решения контактной задачи от скорости вращения колеса. Получены распределения контактных усилий в зоне контакта;

Основные результаты диссертации:

1. Осуществлено обоснование и построение оболочечно-трехмерной модели резинокорда;
2. Разработаны механическая модели и численный алгоритм для моделирования стационарного и нестационарного качения шины.

Список публикаций по теме диссертации

1. Демидович П. Н., Шешенин С. В. О вычислении свойств резинокорда // Тезисы науч. конф. «Ломоносовские чтения». — г. Москва: МГУ, апрель 2003г. — С. 48–49.
2. Демидович П. Н., Шешенин С. В., Чистяков П. В. Об определении механических свойств резинокордного материала // 14-ый международный симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов». — Т. 1. — г. Москва: НИИШП, 20–24 октября 2003г. — С. 137–141.
3. Шешенин С. В., Демидович П. Н. К определению эффективных свойств резинокорда // Тезисы науч. конференции «Ломоносовские чтения». — г. Москва: МГУ, апрель 2004г. — С. 161–162.
4. Шешенин С. В., Демидович П. Н. Анализ методов определения упругих свойств резинокорда // 15-ый международный симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов». — Т. 2. — г. Москва: НИИШП, 18–22 октября 2004г. — С. 195–197.
5. Шешенин С. В., Демидович П. Н. Применение метода осреднения для построения слоистого конечного элемента // Сб. тр. Междунар. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. — М.: URSS, 19–20 янв. 2006г. — С. 432–437.
6. Демидович П. Н., Михаленко А. П., Шешенин С. В. Построение слоистого конечного элемента резинокорда // Тезисы науч. конф. «Ломоносовские чтения». — г. Москва: МГУ, апрель 2006г. — С. 61.
7. Демидович П. Н. Теоретико-экспериментальное определение эффективных свойств резинокорда. — М.: Моск. гос. ун-т., 2007. — 29 с. — Деп. в ВИНТИ РАН 09.04.2007 №400-B2007.
8. Шешенин С. В., Демидович П. Н. Трехмерное моделирование стационарного и нестационарного качения шины. — М.: Моск. гос. ун-т., 2007. — 22 с. — Деп. в ВИНТИ РАН 12.07.2007 №720-B2007.
9. Шешенин С. В., Демидович П. Н., Чистяков П. В., Муравлев А. В. Определение модулей резинокорда при плоско-напряженном состоянии // *Вестник Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика, Механика.* — 2007. — № 5. — С. 49–53.