МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Сумин Тарас Сергеевич

Стационарные движения подвешенного на стержне тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научные руководители: Доктор физико-математических наук, профессор А.В. Карапетян
Доктор физико-математических наук, профессор В.А. Самсонов

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук В.С. Сергеев
Кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Филиппов

Ведущая организация: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Защита состоится 21 сентября 2007 года в 16 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 июля 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача о движении твердого тела, подвешенного на стержне, в том числе с полостью, содержащей жидкость, давно является классической задачей. Интерес к этой задаче обусловлен моделированием динамики сепараторов, центрифуг и т. п. Основными рабочими режимами таких систем являются стационарные движения. Поэтому отыскание и исследование стационарных движений является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы. Основной целью данной диссертационной работы является поиск и исследование свойств стационарных движений механической системы, состоящей из жесткого нерастяжимого стержня и прикрепленного к нему твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми. Впервые исследованы стационарные движения подвешенного на стержне твердого тела с вязким наполнителем.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы обоснованы, они базируются на общих теоремах динамики, теории устойчивости и бифуркаций.

Используемые методы. В работе используются методики Рауса, Ляпунова, Четаева из теории устойчивости и бифуркации стационарных движений. При исследовании нетривиальных стационарных движений, ответвляющихся от тривиальных, также используется метод малого параметра.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты дают представление о количестве, видах и характере устойчивости стационарных движений.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством акад. РАН В. В. Румянцева, чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, 2006 г.

– Семинар отдела механики ВЦ РАН под рук. проф. С. Я. Степанова, проф. А. В. Карапетяна, 2007 г.

– Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 23-28 августа 2004 г.

– Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова, октябрь 2004 г.

– Международная научная конференция по механике «Четвертые поляховские чтения», Санкт-Петербург, 7-10 февраля 2006 г.

– Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им. М. В. Ломоносова, апрель 2006 г.

– IX Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (им. Е. С. Пятницкого), 31 мая - 2 июня 2006 г.

– IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 2006, Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.

– Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова, октябрь 2006 г.

– Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им. М. В. Ломоносова, апрель 2007 г.

– IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Иркутск, 12-16 июня 2007 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в пяти печатных работах, три из них опубликованы в журналах, которые входят в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 79 наименований. Общий объем диссертации – 110 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с исследованием динамики тел с жидкостью, и работ, связанных с исследованием движения твердого тела на струне, также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** дается постановка задачи. Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную вязкой жидкостью. Полость считается симметричной эллипсоидальной, ось симметрии совпадает с осью динамической симметрии оболочки. Тело подвешено на жестком нерастяжимом стержне к неподвижной точке. В точке подвеса, принадлежащей оси динамической симметрии тела, и в неподвижной точке крепление осуществляется с помощью идеальных шаровых шарниров.

В *первом разделе* этой главы выводятся уравнения движения рассматриваемой системы.

Уравнение, описывающее движение вязкой жидкости в эллипсоидальной полости, берется из феноменологической модели «внутреннего» трения В. А. Самсонова. Приводится краткое описание этой модели. В ней взаимодействие вязкого наполнителя со стенками оболочки разлагается на две составляющие: нормальное давление и «внутреннее» трение, линейно зависящее от разности вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной скорости оболочки и вектора $\boldsymbol{\Omega}$ средней завихренности жидкости. За основу берутся известные уравнения Гельмгольца для компонент вектора вихря при однородном вихревом движении идеальной жидкости в эллипсоидальной полости, в правую часть которых добавляется вектор момента сил вязкого «внутреннего» трения.

Остальные уравнения движения выражают теоремы об изменении импульса, кинетического момента системы, уравнение Пуассона, связь, учитывающую нерастяжимость стержня, и кинематическое условие, связывающее скорости центра масс C системы и точки O подвеса тела.

Во *втором разделе* показано, что система уравнений движения допускает интеграл площадей, геометрический интеграл, а также невозрастающую функцию энергии. Следовательно для поиска и исследования стационарных движений системы можно воспользоваться теорией Рауса для диссипативных систем с симметрией. Эффективный потенциал строится на уровне интеграла площадей как минимум функции энергии по трем переменным: абсолютной скорости центра масс, угловой скорости тела и средней завихренности жидкости.

В этом разделе показано, что стационарными движениями в рассматриваемой задаче являются только перманентные вращения системы тело-жидкость как одного целого вокруг вертикали.

В *третьем разделе* исследуются общие свойства стационарных движений системы.

Показывается, что на любом стационарном движении направляющий вектор $\mathbf{e}$ стержня, радиус-вектор $\mathbf{a}$ точки подвеса относительно центра масс и вектор восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$ принадлежат вертикальной плоскости, которая вращается с некоторой постоянной угловой скоростью.

Кроме того, доказывается утверждение о том, что функция энергии H убывает на всех движениях, отличных от полученных стационарных движений. Доказательство проводится в компонентах векторов в системе координат, связанной с главными центральными осями $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ инерции системы.

Из этого утверждения и из теоремы о частичной асимптотической устойчивости для диссипативных систем с симметрией следует, что изолированным точкам минимума эффективного потенциала отвечают частично асимптотически устойчивые движения, а другим изолированным критическим точкам — неустойчивые движения. В первом случае частичная асимптотическая устойчивость означает, что возмущенное движение стремится к некоторому перманентному вращению, но не обязательно к невозмущенному.

В *четвертом разделе* вводится система координат, вращающаяся вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью η. Дальнейшее исследование стационарных движений предлагается проводить в координатах, связанных именно с этой системой, так как выбор таких координат является более удобным.

Исследование проводится тем же методом, который использовал В. Н. Рубановский. В частности, уравнения стационарных движений записываются в виде равенства нулю первой вариации функции W_*, которая представляет собой сумму эффективного потенциала и линейной комбинации геометрических соотношений, выполненных во все время движения, с неопределенными множителями Лагранжа.

Из этих уравнений следует, что стационарные движения системы можно условно разделить на два типа: тривиальные и нетривиальные. Тривиальные движения — перманентные вращения, во время которых ось динамической симметрии и ось стержня совпадают с вертикальной осью вращения, — существуют при любом значении константы k интеграла площадей. В зависимости от того, расположен ли центр масс выше или ниже точки подвеса, а также расположена ли точка подвеса выше или ниже неподвижной точки, существует 4 однопараметрических семейства тривиальных стационарных движений. Нетривиальные (или «косые») движения существуют не при любом значении константы k интеграла площадей.

Поскольку стационарными движениями задачи являются только перманентные вращения, во время которых векторы $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ принадлежат вращающейся вертикальной плоскости, и тело является динамически симметричным, главные оси инерции тела можно выбрать таким образом, что во все время движения проекции векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ на ось $\mathbf{i}_1$ будут нулевыми. Тем самым задача исследования стационарных движений упрощается.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости тривиальных стационарных движений. Исследование проводится методом Рауса.

В *первом разделе* рассматриваются общие свойства этих движений. Показано, что для каждого тривиального стационарного движения вторая вариация $\delta^2 W_*$ функции W_* на многообразии M геометрических соотношений раскладывается в сумму двух одинаковых квадратичных форм. Соответственно отрицательный индекс инерции квадратичной формы $\delta^2 W_*$ может быть равен нулю, двум или четырем. Отсюда следует, что степень неустойчивости тривиального стационарного движения может принимать только значения нуль, два или четыре.

Второй раздел посвящен поиску условий устойчивости и точек смены степени неустойчивости для тривиального решения I, соответствующего вращению системы, когда центр масс C лежит ниже точки подвеса O, а точка подвеса находится ниже неподвижной точки O_1. Пусть $p = (A - C)/(ma^2)$, где A — экваториальный, а C —

осевой моменты инерции системы, m — масса, a — расстояние от центра масс до точки подвеса тела.

Если тело «продолговатое», т.е. $p > 0$, решение I является устойчивым при достаточно малых угловых скоростях, неустойчивым со степенью неустойчивости 2 в среднем диапазоне угловых скоростей, неустойчивым со степенью неустойчивости 4 при достаточно больших угловых скоростях. Соответственно в этом случае у решения I имеется 2 точки ветвления.

Если тело «сплюснутое», то решение I является устойчивым при достаточно малых угловых скоростях, а при превышении критического значения угловой скорости является неустойчивым со степенью неустойчивости 2.

В *третьем разделе* аналогичным способом исследуется решение II, соответствующее вращению системы, когда центр масс C лежит выше точки подвеса O, а точка подвеса находится ниже неподвижной точки O_1. Картина устойчивости этого решения зависит не только от параметра p, но и от другого безразмерного параметра q, равного отношению длины стержня l к расстоянию a от центра масс до точки подвеса тела. Получено, что, если тело «продолговатое», то перманентное вращение не может быть устойчивым ни при каких значениях p и q, при этом у однопараметрического семейства имеется одна точка ветвления. Если тело «сплюснутое», то решение может быть устойчиво в небольшом диапазоне угловых скоростей в двух случаях: 1) p отрицательно и достаточно велико по модулю; 2) p отрицательно и достаточно мало по модулю, при этом длина стержня l больше расстояния a. При остальных значениях параметров (для $p < 0$) решение неустойчиво со степенью неустойчивости 2.

В *четвертом и пятом разделах* рассматриваются оставшиеся два тривиальных стационарных движения, соответствующие случаю, когда точка O подвеса тела лежит выше неподвижной точки O_1. Показано, что эти решения не могут быть устойчивыми ни при каких значениях параметров задачи. Для полноты картины исследованы их точки ветвления и найдены условия, при которых реализуются степени неустойчивости 2 и 4.

Во всех *разделах со второго по пятый* результаты представлены в виде таблиц, показывающих картину устойчивости каждого решения в зависимости от выбранных безразмерных параметров.

В *шестом разделе* главы устанавливается взаимное расположение на числовой прямой точек ветвления всех тривиальных движений в зависимости от параметров p и q.

Согласно теории бифуркации наличие смены устойчивости у тривиальных стационарных движений показывает, что существует нетривиальные стационарные движения, ответвляющиеся от тривиальных. Их исследованию посвящена **третья глава**.

В *первом разделе* этой главы исследуются общие свойства нетривиальных стационарных движений. Из общих уравнений стационарных движений выводятся соотношения для «косых» стационарных движений, которые не содержат неопределенные множители Лагранжа. Полученные соотношения зависят от двух позиционных координат, соответствующих косинусам углов, которые стержень и ось динамической симметрии тела образуют с вертикалью, а также от угловой скорости η. Кроме того, известно уравнение, связывающее константу k интеграла площадей с этими координатами и угловой скоростью. Получены формулы, с помощью которых в пространстве двух позиционных координат и константы интеграла площадей можно численно строить бифуркационные диграммы Пуанкаре-Четаева.

Во *втором разделе* изучается поведение нетривиальных относительных равновесий в окрестностях точек ветвления тривиальных стационарных движений. С помощью метода малого параметра в пространстве двух косинусов и угловой скорости строятся ростки нетривиальных относительных равновесий. На основе теории бифуркаций делается вывод о характере устойчивости «косых» относительных равновесий в окрестностях точек бифуркаций. Полуплоскость $P = \{(p,q) : \ p \in \mathbb{R}, \ q > 0\}$ физически возможных значений параметров задачи разбивается на области, различающиеся типом бифуркационных диаграмм для относительных равновесий.

В *третьем разделе* изучается поведение нетривиальных стационарных движений в окрестностях точек ветвления тривиальных стационарных движений. Так же, как и во втором разделе, для построения ростков «косых» стационарных движений используется метод малого параметра, но, в отличие от случая относительных равновесий, ответвления нетривиальных стационарных движений строятся в пространстве двух косинусов и константы k интеграла площадей, так как именно она является существенным по Четаеву параметром.

Далее используется теорема, доказанная А. В. Карапетяном, С. Я. Степановым, М. Паскаль, о соотношении условий устойчивости относительных равновесий и стационарных движений:

Теорема: *Степень неустойчивости стационарных движений свободной системы не больше степени неустойчивости относительных равновесий соответствующей ограниченной системы ($\eta = const$).*

Применяя теорему к построенным бифуркационным диаграммам для относительных равновесий, в некоторых случаях можно заранее определить, в какую сторону ответвятся нетривиальные стационарные движения, и на основе теории бифуркации сделать вывод о характере устойчивости этих движений в окрестностях точек бифуркации. Тем самым при определенных значениях параметров p и q в некоторых точках ветвления анализ ростков «косых» стационарных движений можно не проводить.

В оставшихся случаях, в которых теорема не дает однозначного ответа об ответвлении стационарных движений, были получены области параметров задачи, каждой из которых соответствует своя картина бифуркационных диаграмм для стационарных движений. В отличие от случая относительных равновесий пространство параметров задачи не двумерное, а трехмерное: к безразмерным параметрам p и q добавляется еще один параметр $r = C/(ma^2)$.

В *четвертом разделе* рассматриваются стационарные движения при достаточно больших значениях угловой скорости. На этих движениях одна из главных центральных осей инерции системы почти совпадает с неподвижной вертикалью и совмещается с ней тем точнее, чем выше угловая скорость системы. Формулы для предельных стационарных движений найдены из общих уравнений стационарных движений. Определены условия существования каждого типа предельных стационарных движений.

В *пятом разделе* на основе результатов предыдущих разделов приводится атлас типичных бифуркационных диаграмм Пуанкаре-Четаева для стационарных движений.

В **четвертой главе** исследуются частные случаи рассматриваемой в диссертации задачи.

В *первом разделе* рассматривается движение вокруг неподвижной точки тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Взаимодействие наполнителя со стенками полости также учитывается с помощью феноменологической модели «внутреннего» трения.

Поиск и исследование устойчивости стационарных движений проводится методом Рауса. Найдены все стационарные движения системы, которые представляют собой перманентные вращения жидкости и оболочки как одного целого вокруг вертикали, определены точки ветвления и условия устойчивости стационарных движений. Результаты представлены в виде атласа бифуркационных диаграмм.

Во *втором разделе* рассматривается движение подвешенного на стержне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Предполагается, что жидкость совершает однородное вихревое движение. Изменение компонент вектора вихря жидкости описывается известными уравнениями Гельмгольца.

Система уравнений движения допускает интегралы энергии, площадей, Гельмгольца, постоянства проекции мгновенной угловой скорости на ось симметрии тела и геометрический интеграл. С помощью метода Рауса выписываются уравнения для определения стационарных движений.

В этом разделе рассматривается одно из тривиальных стационарных движений, соответствующее перманентному вращению системы как одного целого вокруг вертикали в случае, когда центр масс системы лежит ниже точки подвеса тела, а точка подвеса расположена ниже неподвижной точки. Получены условия устойчивости этого решения для случаев вытянутой и сплюснутой полости.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы:

- Уравнения стационарных движений, полученные в форме В. Н. Рубановского, преобразованы к виду, в котором исключены неопределенные множители Лагранжа, что позволяет строить бифуркационные диаграммы Пуанкаре-Четаева. Указаны общие свойства стационарных движений.

- Исследованы все тривиальные стационарные движения: получены условия устойчивости и найдены точки смены степени неустойчивости.

- В окрестностях тривиальных стационарных движений аналитически найдены ростки нетривиальных стационарных движений, исследована их устойчивость.
- Определены существенные параметры задачи, и пространство этих параметров разбито на области, различающиеся типом бифуркационных диаграмм.
- Для каждой из указанных выше областей построены типичные бифуркационные диаграммы Пуанкаре-Четаева, дающие наглядное представление о количестве стационарных движений, их типе и устойчивости.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Сумин Т.С. Об устойчивости равномерных вращений тела, заполненного жидкостью и подвешенного на струне // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2004. № 6, с. 56-60.
2. Карапетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С. Об устойчивости и ветвлении перманентных вращений твердого тела с жидким наполнением // ПММ. Т. 68. Вып. 6. 2004, с. 994-998.
3. Сумин Т.С. Об устойчивости движения подвешенного на стержне твердого тела с вязким наполнителем // Сборник трудов конференции-конкурса молодых ученых, Москва, 11.10-16.10.2006 г., под ред. Г.Г. Черного и В.А. Самсонова, М., МГУ, 2007 г., с. 259-266.
4. Сумин Т.С. Об устойчивости движения подвешенного на стержне твердого тела с вязким наполнителем. // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященной 105-летию Н. Г. Четаева. Иркутск, 12.06-16.06.2007 г. Том 2, с. 244-252.
5. Сумин Т.С. Об устойчивости стационарных движений тела с вязким наполнителем на стержне // Автоматика и телемеханика, № 9, 2007.

Подписано в печать 02.07.2007 г.
Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 1.0
Заказ Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета