МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Каюмов Олег Рашидович

ГЛОБАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

01.02.01 - теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва - 2007

Работа выполнена на кафедре математики филиала Омского государственного педагогического университета в г. Таре.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

Ананьевский Игорь Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор

Голубев Юрий Филиппович

доктор физико-математических наук

Матюхин Владимир Иванович

Ведущая организация:

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ)

Защита диссертации состоится 26 октября 2007 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан ______________ 2007 года

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат физико-математических наук, доцент

В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В процессе проектирования и эксплуатации механических систем управления (роботов-манипуляторов, подвижных частей летательных аппаратов, транспортных механизмов и др.) требуется, чтобы имеющихся ресурсов управления было достаточно для достижения целей движения, т.е. система должна быть управляемой. В последние десятилетия в работах Р.В. Гамкрелидзе, R.E. Kalman, J. P. La Salle, Н.Н. Красовского, Н. Hermes, R. Hermann, R.W. Brockett., L. Markus, C. Lobry, H.J. Sussmann, В.И. Коробова, А.М. Ковалева, Е.С. Пятницкого и др. были получены результаты, составившие теорию управляемости динамических систем. Здесь многие идеи опираются на теорию устойчивости Ляпунова, развитую в работах Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина, Н.Н. Красовского, Е.А. Барбашина, В.И. Зубова, В.В. Румянцева, В.М. Матросова и др.

Проблему управляемости динамической системы впервые сформулировал Kalman R.E. (1961), предложивший для линейной стационарной системы необходимые и достаточные условия. Близкий критерий ранее предлагал Р.В. Гамкрелидзе в задаче с ограничениями на управление. В случае линейной нестационарной системы достаточные условия управляемости были получены Н.Н. Красовским. Для нелинейных систем общего вида универсальных конструктивных критериев управляемости, видимо, не существует.

Необходимое условие локальной управляемости исследовалось (C. Lobry, H. Hermes, R.W. Brockett, H.J. Sussmann и др.) на основе теоремы Рашевского–Chow как свойство алгебры Ли векторных полей, параметризованных значениями управлений. Дополнительными достаточными условиями глобальной управляемости оказались либо компактность пространства состояний (C. Lobry), либо симметричность векторного поля (R. Hermann, H.J. Sussmann, V. Jurdievic), либо другие критерии. На этом основано управление конфигурациями изменяемых механических систем (А.А. Аграчев, Ю.А. Сачков), наглядно демонстрируемое в задаче «о падающей кошке» (В.В. Козлов). Свойства симметрий и методы теории групп применялись к анализу управляемости в работах Г.Н. Яковенко. Отсутствие инвариантного многообразия выявлялось (В.Н. Семенов) как неинтегрируемость вспомогательного уравнения Пфаффа. В работах А.М. Ковалева приведены примеры неуправляемых систем, не имеющих инвариантного многообразия, и в связи с этим предложен метод ориентированных многообразий.

Другой подход в теории управляемости опирается на известное свойство линейной стационарной управляемой системы распадаться на канонические подсистемы (P.A. Brunovsky). Преобразование нелинейной системы к такой форме оказалось возможным (В.И. Коробов) для так называемых треугольных систем, удовлетворяющих специальному условию «регулярности». Результат был распространен (А.М. Ковалев) и на нестационарный случай. Позднее были найдены (B. Jakubczuk, W. Respondek, В.И. Коробов, С.С. Павличков) треугольные системы частного вида, не удовлетворяющие условию регулярности, и потому названные (S. Celikovsky, H. Nijmeijer) сингулярными, тем не менее, глобально управляемые. В работах А.А. Жевнина, А.П. Крищенко, А.А. Аграчевам и Ю.А. Сачкова получены условия точной линеаризации систем, аффинных по управлению. Попытки дать наглядное представление о геометрии фазовых потоков дифференциальных включений привели к понятию фазового портрета управляемой динамической системы (А.В. Бутковский). Свойства управляемости при сочетании нескольких ограничений на управляющие воздействия были подробно рассмотрены А.М. Формальским. Применительно к динамическим системам в $\boldsymbol{R}^n$ вопросы стабилизируемости и оценки области управляемости с использованием теорем устойчивости анализировались L. Markus, В.В. Румянцевым, А.П. Блиновым, А.П. Крищенко, В.М. Морозовым, В.И. Каленовой, Е.Н. Шевелевой и др.

В работах Е.С. Пятницкого, В.И. Матюхина для некоторых классов лагранжевых систем общего вида сформулированы необходимые и достаточные условия их глобальной управляемости в предположении, что параметры могут быть любыми (из ограниченного заданного диапазона). Будучи «робастным», этот критерий, очевидно, не исчерпывает возможностей собственной динамики конкретных механизмов. Например, не охватывается случай, когда управляемость обеспечивается числом управлений меньшим, чем число степеней свободы.

Таким образом, универсальных критериев управляемости нелинейных систем в настоящее время не существует, поэтому представляют интерес достаточные условия управляемости конкретных классов объектов с учетом их специфики.

Особенностью рассматриваемых в работе механических систем является то, что 1) исследуется их глобальная управляемость в цилиндрическом фазовом пространстве; 2) число управлений меньше числа степеней свободы, а сами управляющие функции ограничены заранее заданными величинами.

«Модельный» уровень обсуждаемых систем соответствует предварительному анализу многих реальных объектов. Рассуждения о свойствах управляемости можно относить к гипотетическим «внештатным» ситуациям, когда часть имеющихся управляющих ресурсов «вышла из строя». В этом смысле информация о предельных динамических возможностях объекта актуальна.

Цель работы – обоснование достаточных условий глобальной управляемости лагранжевых систем, включая сопутствующие вопросы теории устойчивости в цилиндрическом фазовом пространстве, а также проблемы влияния массо-инерционных характеристик на управляемость механизма. Рассматриваются также некоторые свойства оптимального синтеза.

Методы исследования. В работе используются классические методы аналитической механики, теории устойчивости Ляпунова, теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, а также принцип максимума Понтрягина в теории оптимальных процессов.

Научная ценность и новизна. Путем введения понятия связной функции Ляпунова на основе прямого метода в теории устойчивости даны достаточные условия стабилизируемости и глобальной управляемости натуральных лагранжевых систем в случае, когда число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы. Предложен метод «достижимых кривых», благодаря которому подход распространен на негладкие механические системы. В частности, показана глобальная управляемость некоторых объектов с сухим трением, а также систем с идеальными односторонними связями. Введено понятие параметрической управляемости и даны его достаточные условия применительно к механическим объектам. Решены две задачи синтеза оптимального управления и предложен эффективный по быстродействию способ синтеза ограниченного управления системой твердых тел.

Практическая значимость. Полученные в исследовании результаты могут применяться в процессе проектирования и управления роботами-манипуляторами, транспортными механизмами, космическими объектами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на различных конференциях, семинарах и, в частности, на: – семинарах кафедры динамики полета и управления Казанского авиационного института в 1983, 1985 гг (рук. проф. Т.К. Сиразетдинов); – семинарах кафедры теоретической механики КАИ в 1986, 1987 гг (рук. проф. В.Н. Скимель); – семинаре в Институте проблем управления РАН в 1985 г (рук. чл.-корр. РАН Е.С. Пятницкий); – семинаре в МГУ им. Ломоносова в 1985 г (рук. акад. В.В.Румянцев); – V Всесоюзной конференции по управлению в механических системах в 1985 г (г. Казань); – семинаре кафедры механики и процессов управления Ленинградского политехнического института в 1986 г (рук. проф. А.А. Первозванский); – VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в 1986 г (г. Ташкент); – V Всесоюзной Четаевской конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” в 1987 г (г. Казань); – семинаре в Институте проблем механики РАН в 1987 г (рук. акад. Ф.Л. Черноусько); – семинаре в Институте механики МГУ в 1987 г (рук. проф. И. В. Новожилов); – II Всероссийском Ахметгалеевском семинаре “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” в 1995 г (г. Казань); – VIII и IX Четаевских международных конференциях “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” в 2002 г (г. Казань) и в 2007 г (г. Иркутск); – VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» в 2005 г (г. Нижний Новгород); – Всероссийской конференции с международным участием «Математика, ее приложения и математическое образование» в 2005 г (г. Улан-Удэ); – IX Всероссийском Съезде по теоретической и прикладной механике в 2006 г (г. Нижний Новгород).

В целом результаты работы докладывались на семинаре в Институте проблем механики в 2006 г (рук. акад. Д.М. Климов и акад. В.Ф. Журавлев), на семинаре в МГУ в 2006 г (рук. чл.-корр. РАН В.В.Белецкий и проф. Ю.Ф.Голубев), на Казанском городском семинаре по механике в 2006 г (рук. проф. Г.В. Голубев).

Статья [6] отмечена премией редколлегии журнала «Прикладная математика и механика» (1998 г).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 статьях и монографии. В совместную работу [6] авторы внесли равный вклад.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из предисловия, введения, шести глав, заключения и списка литературы из 207 наименований. Общий объем диссертации составляет 268 страниц, включая 47 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В предисловии и введении описана постановка задачи и дан обзор литературы, отражающий основные идеи и подходы в теории управляемости динамических систем, а также кратко изложено содержание работы по главам. Указаны цели диссертации, основные методы исследования, актуальность, научная новизна и практическая значимость.

Глава 1. Стабилизируемость в цилиндрическом фазовом пространстве

В первой главе рассматриваются некоторые вопросы теории устойчивости с целью дальнейшего их применения для анализа стабилизируемости, управляемости и синтеза ограниченного управления в механических системах. Основные идеи прямого метода Ляпунова обобщаются на случай цилиндрического фазового пространства $TM = \boldsymbol{T}^k \times \boldsymbol{R}^m$. В §1.1 вводится понятие связной функции Ляпунова (СФЛ).

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(y), \quad y \in T^k \times R^m \tag{1.1}$$

где $y = (\varphi^T, x^T)^T, x \in R^m, \varphi \in T^k$, вектор-функция $f(y)$ удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжаемости решений $y(t)$ в некоторой открытой связной области $P \subset T^k \times R^m$, которая считается полуинвариантной, т.е. из $y(t_0) \in P$ следует $y(t) \in P \ \forall t > t_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \in P$. При этом $0 \in P$, $f(0) = 0$. В силу локальной метризуемости $T^k \times R^m$, классическое определение устойчивости нулевого решения по Ляпунову (в малом) используется без изменений. Вводятся обозначения: $Q_V = \{y : \|\partial V / \partial y\| = 0\}$, $E_V = \{c : c = V(y), y \in P\}$, $H_c = \{y : V(y) \le c, c \in E_V\}$.

Определение 1.3. Непрерывную вместе со своими частными производными однозначную функцию $V(y)\,(y \in T^k \times R^m)$, определенно-положительную на $P \subset T^k \times R^m$ в смысле Ляпунова ($\forall y \in P$: $V(y) \ge 0$, $V = 0 \Rightarrow y = 0$) называют функцией Ляпунова.

Определение 1.4. Функцию Ляпунова $V(y)$ $(y \in T^k \times R^m)$ будем называть связной на $P \subset T^k \times R^m$, если каждое множество $H_c \bigcap P$ $(c \in E_V)$ является связным.

Например, в теории Морса известна «функция высоты» на торе T^2. Её линии равного уровня получаются пересечением «вертикально» расположенного тора «горизонтальными» плоскостями, а значения соответствующих констант равны расстояниям от нижней вершины О до этих плоскостей. Такая функция будет связной функцией Ляпунова на T^2.

Замечание 1.1. Если невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически устойчиво в большом в области P, то найдется некоторая функция Ляпунова, связная на P.

В §1.2 формулируются достаточные условия связности функции Ляпунова.

Замечание 1.3. Если функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m)$ удовлетворяет условию $Q_V = \boldsymbol{0}$, то она является связной на $\boldsymbol{R}^m$.

Замечание 1.4. Если множество $Q_V \setminus \boldsymbol{0}$ для функции Ляпунова $V(\boldsymbol{\varphi})$ $(\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{T}^k)$ состоит из конечного числа изолированных точек, в которых матрица $\partial^2 V / \partial \boldsymbol{\varphi}^2$ имеет отрицательное собственное значение, то функция $V(\boldsymbol{\varphi})$ является связной на $\boldsymbol{T}^k$.

Например, для n-звенного маятника в вертикальной плоскости его потенциальная энергия $B(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(1-\cos\varphi_i)$, $\quad b_i > 0$, $\quad (i = 1, 2, ..., n)$ – связная функция Ляпунова на $\boldsymbol{T}^n$. Далее вектор $\boldsymbol{y}$ представляется в виде

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1^T, \boldsymbol{y}_2^T)^T, \quad \boldsymbol{y}_1 \in \boldsymbol{T}^{k-s} \times \boldsymbol{R}^{m-l}, \quad \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{T}^s \times \boldsymbol{R}^l, \; k \geq s, m \geq l \tag{1.2}$$

где частному случаю $m=l$ соответствует $\boldsymbol{y}_1 \in \boldsymbol{T}^k$.

Замечание 1.5. Пусть функция Ляпунова $V(\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{T}^k \times \boldsymbol{R}^m)$ удовлетворяет условиям $V(\boldsymbol{y}) \geq W_1(\boldsymbol{y}_1)$, $V(\boldsymbol{y}) \geq W_2(\boldsymbol{y}_2)$, где $W_1(\boldsymbol{y}_1)$ – связная функция Ляпунова на $\boldsymbol{T}^{k-s} \times \boldsymbol{R}^{m-l}$, а $W_2(\boldsymbol{y}_2)$ – на $\boldsymbol{T}^s \times \boldsymbol{R}^l$. Если множество $Q_V \setminus \boldsymbol{0}$ состоит из конечного числа изолированных точек, в которых матрица $\partial^2 V / \partial \boldsymbol{y}^2$ имеет отрицательное собственное значение, то $V(\boldsymbol{y})$ - связная функция Ляпунова на $\boldsymbol{T}^k \times \boldsymbol{R}^m$.

Например, полная энергия n-звенного маятника в вертикальной плоскости $V(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = 1/2 \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T A(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}} + B(\boldsymbol{\varphi})$, $\quad \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{T}^n$ – связная функция Ляпунова на $\boldsymbol{T}^n \times \boldsymbol{R}^n$. Приводятся также другие достаточные условия связности функций Ляпунова, необходимые далее для анализа стабилизируемости.

С использованием введенных понятий формулируется обобщение теоремы Барбашина–Красовского для случая рассматриваемого цилиндрического пространства.

Утверждение 1.1. Если в области $P \subset \boldsymbol{T}^k \times \boldsymbol{R}^m$ существует связная функция Ляпунова $V(\boldsymbol{y})$, для которой множества H_c $(c \in E_V)$ компактны, а вдоль решений (1.1) в $P \setminus \boldsymbol{0}$ выполняется $\dot{V}(\boldsymbol{y}) \le 0$, $\dot{V}(\boldsymbol{y}) \not\equiv 0$, то невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически устойчиво в большом в области P.

В обозначениях (1.2) дается обобщение теоремы В.В. Румянцева об устойчивости по части переменных.

Утверждение 1.2. Пусть на $P \subset \boldsymbol{T}^k \times \boldsymbol{R}^m$ существует функция Ляпунова $V(\boldsymbol{y})$, для которой множества H_c $(c \in E_V)$ компактны, а на $P_1 \subset \boldsymbol{T}^{k-s} \times \boldsymbol{R}^{m-l}$ существует связная функция Ляпунова $W(\boldsymbol{y}_1)$, причем $V(\boldsymbol{y}) \ge W(\boldsymbol{y}_1)$ $(\forall \boldsymbol{y} \in P)$. Если вдоль решений (1.1) в P выполняется $\dot{V}(\boldsymbol{y}) \le 0$, $\dot{V}(\boldsymbol{y}) \not\equiv 0$, то невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически $\boldsymbol{y}_l$−устойчиво в большом в области P.

В §1.3 рассматривается класс механических систем, к которым относятся, например, многозвенные маятники, мостовые краны, роботы-манипуляторы.

Функция Лагранжа имеет вид $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = {}^1\!/_2\, \dot{\boldsymbol{q}}^T A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - B(\boldsymbol{q})$, где вектор обобщенных координат $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$, $B(\boldsymbol{q})$ – скалярный потенциал. Конфигурационное пространство $M = \boldsymbol{T}^r \times \boldsymbol{R}^{n-r}$, где $\boldsymbol{T}^r$ – r-мерный тор, фазовое пространство $TM = \boldsymbol{T}^r \times \boldsymbol{R}^{2n-r}$. Запись $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \in TM$ подразумевает, что числовые значения координат берутся из соответствующего накрывающего пространства $\boldsymbol{R}^r \times \boldsymbol{R}^{2n-r}$. Элементы положительно определенной матрицы инерции $A(\boldsymbol{q})$ считаются ограниченными. В уравнениях движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{u} \tag{1.3}$$

вектор управлений $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)^T$ удовлетворяет ограничениям $|u_i| \le a_i$, a_i – заданы $(i = 1, 2, ..., n)$. В частном случае некоторые из величин a_i могут быть нулевыми. Потенциальная энергия $B(\boldsymbol{q})$ ограничена снизу: $B(\boldsymbol{q}) \geq 0$, $B(\boldsymbol{0}) = 0$. В этом случае множество положений равновесия

$$\zeta_0 = \{(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}):\ \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0},\ \partial B / \partial \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

непустое. Аналогичное множество состояний равновесия системы при подходящем действии управления обозначается через ζ_a. Предполагается, что множество $Q_B \subset M$ состоит из конечного числа изолированных точек.

Если обратной связи $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ соответствует сепаратрисная поверхность в TM, движение по которой к особой точке $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{0}) \in \zeta_a$ в силу (1.3) происходит за бесконечное время, то поверхность обозначается $\Omega(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))$.

Определение 1.7. Система (1.3) называется стабилизируемой на $P \subset TM$ по входам u_i $(i = 1,2,...,m)$, если ее можно перевести из каждой точки $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \in P$ в любую $\varepsilon-$окрестность точки $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ при $u_j \equiv 0$ $(j = m+1,...,n)$.

Утверждение 1.3. Пусть $B(\boldsymbol{q})$–связная функция Ляпунова на M, а множества $H_c(B(\boldsymbol{q}))$ $(c \in E_B)$ компактны. Если система (1.3) при $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$ не допускает частного решения $q_j \equiv q_{j*}$ (исключая $(\boldsymbol{q}_*,\boldsymbol{0}) \in \zeta_0$), то она стабилизируема по входу u_j $(j \in 1,2,...,n)$ на множестве $TM \setminus \Omega(u_j)$.

В §1.4 стабилизирующее управление предлагается в виде обратной связи

$$u_j^* = \tfrac{1}{2} a_j (\mathrm{sign}\ddot{q}_j\big|_{u=0} - \mathrm{sign}\dot{q}_j) \quad (j \in 1,2,...,n) \qquad (1.4)$$

где под $\ddot{q}_j\big|_{u=0}$ понимается правая часть j-го уравнения Эйлера–Лагранжа в форме $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + A^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}$ при свободном движении ($\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$).

Утверждение 1.4. Удовлетворяющая условиям утверждения 1.3 система (1.3) с обратной связью (1.4) будет асимптотически устойчивой на некотором открытом всюду плотном в TM множестве $TM \setminus \Omega_1(u_j^*)$.

Здесь и далее используется определение решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью по правилу А.Ф. Филиппова.

В качестве примера рассмотрено управление упругим стержнем без трения, взятым в конечномерном приближении. Посредством ограниченного управляющего момента, приложенного в шарнире, объект в горизонтальной плоскости поворачивается на угол 90^0 с асимптотическим гашением колебаний. Численные расчеты используют сплайн-интерполяцию.

Глава 2. Глобальная управляемость натуральных лагранжевых систем

В §2.1 с использованием предыдущих результатов рассматриваются свойства управляемости системы (1.3) в случае, когда количество управляющих параметров меньше числа степеней свободы. Используется симметрия натуральной лагранжевой системы относительно обращения времени в виде

$$\dot{\boldsymbol{q}} \to -\dot{\boldsymbol{q}}, \quad t \to -t \tag{2.1}$$

когда из существования управляемой траектории $\boldsymbol{u}(t)$: $(\boldsymbol{q}_1, \dot{\boldsymbol{q}}_1) \to (\boldsymbol{q}_2, \dot{\boldsymbol{q}}_2)$ $t \in [0, T]$ вытекает возможность движения «в обратном времени» $\boldsymbol{u}(T-t)$: $(\boldsymbol{q}_2, -\dot{\boldsymbol{q}}_2) \to (\boldsymbol{q}_1, -\dot{\boldsymbol{q}}_1)$. Область нуль-управляемости определяется как множество начальных точек $(\boldsymbol{q}_0, \dot{\boldsymbol{q}}_0) \in TM$, из которых систему (1.3) можно привести в состояние $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ за конечное время с помощью ограниченного измеримого управления (называемого далее допустимым управлением).

Определение 2.1. Система (1.3) называется локально управляемой по входам u_i $(i = 1, 2, ..., m)$ в окрестности точки $(\boldsymbol{q}_*, \boldsymbol{0}) \in TM$ если $(\boldsymbol{q}_*, \boldsymbol{0})$ является внутренней для открытого множества точек, каждая из которых может быть переведена в $(\boldsymbol{q}_*, \boldsymbol{0})$ посредством допустимых управлений за конечное время при $u_j \equiv 0$ $(j = m+1, ..., n)$.

Определение 2.2 Система (1.2) называется глобально управляемой в TM по входам u_i $(i = 1, 2, ..., m)$, если ее можно перевести из произвольного состояния $(\boldsymbol{q}_0, \dot{\boldsymbol{q}}_0) \in TM$ в любое наперед заданное $(\boldsymbol{q}_f, \dot{\boldsymbol{q}}_f) \in TM$ за конечное время с помощью допустимых управлений при $u_j \equiv 0\ (j = m+1,...,n)$.

Следующие достаточные условия глобальной управляемости в некотором смысле обобщают теорему L. Markus.

Утверждение 2.1. Если система (1.3) стабилизируема по входу u_j $(j \in 1,2,...,n)$ на множестве $TM \setminus \Omega(u_j)$ и в окрестностях всех точек $(\boldsymbol{q}_*,\boldsymbol{0}) \in \zeta_0$ локально управляема по тому же входу u_j, то она глобально управляема при действии только u_j.

В качестве примера показана глобальная управляемость рассмотренного выше n –звенного маятника в вертикальной плоскости без трения, когда единственный управляющий момент u_n, приложенный в последнем шарнире, ограничен по модулю наперед заданной величиной.

В §2.2 утверждение 2.1 обобщается на случай системы (1.3) с циклическими координатами. Формулируются достаточные условия глобальной управляемости в ситуации, когда потенциальную энергию удается сделать связной функцией Ляпунова путем добавления искусственного потенциала (за счет части управлений). В качестве примера рассматривается система из n математических маятников на общем подвижном основании в виде тележки (рис. 1), движущейся вдоль горизонтальной прямой без трения. Единственное управляющее воздействие – сила u ($|u| \le a$, a –задано), приложенная к тележке.

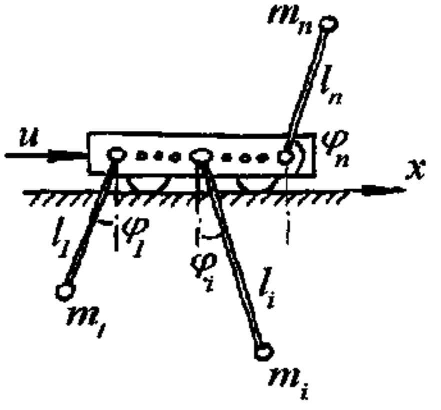

Рис. 1

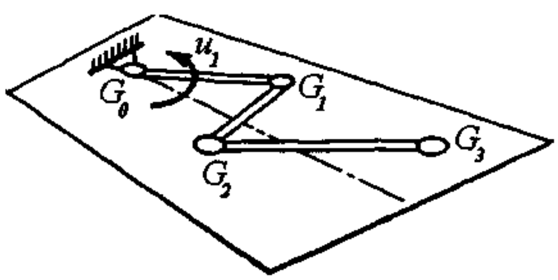

Рис. 2

Показано, что для глобальной управляемости (при конструктивном обеспечении невозможности отрыва тележки от поверхности) достаточно, чтобы длины маятников были попарно различны.

В §2.3 рассматривается случай нескольких устойчивых состояний покоя.

Утверждение 2.3. Пусть для системы (1.3) потенциал $B(\boldsymbol{q})$ $(\boldsymbol{q} \in M)$ имеет конечное число критических точек, причем невырожденных. Одновременно пусть существует число $c_0 \in E_B$ такое, что множества $H_c(B(\boldsymbol{q}))$ при любом $c > c_0$ связны и компактны. Если при свободном движении $(\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0})$ не существует частных решений $\dot{q}_i \equiv 0$ $(i \in 1, 2, ..., n)$, кроме положений равновесия $(\boldsymbol{q}_*, \boldsymbol{0}) \in \zeta_0$, а в окрестностях этих точек имеется локальная управляемость по тому же входу u_i, то система (1.3) глобально управляема при действии только u_i.

В качестве примера рассмотрена система из n тяжелых колечек пренебрежимо малых размеров, которые соединены последовательно невесомыми пружинами и могут скользить по гладкой замкнутой кривой. Показано, что система будет глобально управляема при действии единственной внешней ограниченной силы, приложенной к первому колечку коллинеарно скорости.

Утверждение 2.4. Если система (1.3) глобально управляема в $TM = \boldsymbol{T}^r \times \boldsymbol{R}^{2n-r}$, то она глобально управляема и в соответствующем накрывающем пространстве $TM_0 = \boldsymbol{R}^r \times \boldsymbol{R}^{2n-r}$.

В силу утверждения 2.4 все рассмотренные маятниковые механизмы глобально управляемы и в накрывающем фазовом пространстве. Их можно перевести скалярным ограниченным управлением за конечное время из произвольного начального состояния $(\boldsymbol{q}_0, \dot{\boldsymbol{q}}_0)$ в любое наперед заданное $(\boldsymbol{q}_f, \dot{\boldsymbol{q}}_f)$ с указанием требуемого результирующего числа полных оборотов каждого отдельного звена.

В §§2.4, 2.5 рассматриваются системы твердых тел, которые заведомо не удовлетворяют условиям утверждения 2.1, однако являются глобально управляемыми за счет возможности стационарных движений. Предполагается, что в системе (1.3) координата $q_1 = \varphi$ – циклическая, т.е. $\boldsymbol{q} = (\varphi, \psi^T)^T$, $\psi \in M_l = \boldsymbol{T}^{r-1} \times \boldsymbol{R}^{n-r}$. Вводится вектор $\boldsymbol{x} = (\dot{\gamma}, \psi^T, \dot{\psi}^T)^T \in \boldsymbol{R} \times TM_1$, $\gamma = \varphi - \omega t$. На многообразии $\boldsymbol{R} \times TM_1$ рассматривается непустое множество состояний относительного покоя $\zeta_1 = \{\boldsymbol{x} :\ \dot{\gamma} = 0,\ \partial B_1 / \partial \psi = \boldsymbol{0},\ \dot{\psi} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$, в которых достигаются экстремумы приведенного потенциала

$$B_1(\psi) = B(\psi) - 1/2\omega^2 a_{11}(\psi) + c \tag{2.2}$$

Утверждение 2.5. Пусть в системе (1.3) возможно движение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{\psi} = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{q} = (\varphi, \psi^T)^T$, $\psi \in M_l$. Допустим также, что приведенный потенциал (2.2) является связной функцией Ляпунова на M_1, а множества $H_c(B_1(\psi))$ компактны. Тогда: 1) если в относительном движении $\boldsymbol{x} = (\dot{\gamma}, \psi^T, \dot{\psi}^T)^T$ при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ в системе (1.3) отсутствуют частные решения $\dot{\gamma} \equiv 0$ (кроме состояний относительного покоя $\boldsymbol{x} \in \zeta_1$), то эта система стабилизируема по входу u_1 в области $\boldsymbol{R} \times TM_1 \setminus \Omega(u_1)$; 2) если к тому же в окрестностях состояний $\boldsymbol{x} \in \zeta_1$ имеется локальная управляемость по входу u_1, то система (1.3) глобально управляема по входу u_1 на TM_1.

В качестве примера рассмотрен n –звенный маятник (рис. 2) в горизонтальной плоскости. Силы трения и тяготения отсутствуют, а единственный внешний ограниченный момент $|u_1| \le a$ (a – заданная величина) приложен к первому звену. Показано, что система на рис. 2 будет глобально управляемой при условии, что центр масс второго звена не может геометрически совпадать с точкой G_0. В простейшем случае (невесомых стержней и сосредоточенных в шарнирах масс) это означает неравенство длин первых двух звеньев.

В §2.6 условия глобальной управляемости натуральных лагранжевых систем (1.3) обобщаются путем применения вспомогательных «достижимых» кривых в фазовом пространстве.

Определение 2.3. Точку $(\boldsymbol{q}_*, \dot{\boldsymbol{q}}_*)$ фазового пространства назовем глобально достижимой, если систему (1.3) можно перевести в эту точку допустимым управлением за конечное время из любой точки фазового пространства.

Определение 2.4. Глобально достижимой кривой в фазовом пространстве системы (1.3) назовем замкнутую кривую, отвечающую периодическому (с конечным периодом) движению и содержащую глобально достижимую точку.

Утверждение 2.6. Необходимым и достаточным условием глобальной управляемости натуральной лагранжевой системы (1.3) является существование глобально достижимой кривой, содержащей как некоторую точку $(\boldsymbol{q}_*, \dot{\boldsymbol{q}}_*)$, так и ей симметричную $(\boldsymbol{q}_*, -\dot{\boldsymbol{q}}_*)$ (либо $(-\boldsymbol{q}_*, \dot{\boldsymbol{q}}_*)$).

Приводятся примеры механических систем (1.3), в которых глобальная управляемость обеспечивается наличием достижимых кривых. Предложенный метод особенно оправдывается при анализе некоторых негладких систем, где другие подходы в теории управляемости не эффективны.

Глава 3. Управляемость при действии сил трения

В §3.1 рассматривается обобщение системы (1.3) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \quad \boldsymbol{u}\in U \tag{3.1}$$

где $A(-\boldsymbol{q})=A(\boldsymbol{q})$, $B(-\boldsymbol{q})=B(\boldsymbol{q})$, а дополнительные силы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ моделируют трение в цилиндрических шарнирах, телескопических сочленениях, на поверхностях качения или скольжения систем твердых тел. Эти силы удовлетворяют неравенствам $Q_i\dot{q}_i \le 0 \quad (i=1,2,...,n)$ и не могут быть скомпенсированы управляющими воздействиями, так как число управлений меньше числа степеней свободы.

Замечание 3.1. Если в системе (3.1) действуют силы вязкого трения

$Q_i = -h_i\dot{q}_i$, $h_i > 0$ и существуют числа β_i такие, что $|\partial B/\partial q_i| \le \beta_i$ $(i = 1,2,...,n)$, то система (3.1) не является глобально управляемой.

Подробно рассматриваются системы с сухим трением, задаваемым по закону Амонтона-Кулона в виде

$$Q_i = -\eta_i \mathrm{sign}(\dot{q}_i)\ ,\ \ \eta_i \ge 0\ \ (i = 1,2,...,n) \tag{3.2}$$

Величины η_i символизируют максимальные значения сил трения, в общем случае зависящие от координат и скоростей. Формулы (3.2) применимы как для режимов скольжения, где $\dot{q}_i \ne 0$, так и в зонах застоя, где на многообразиях $\dot{q}_i = 0\ (i \in 1,2,...,n)$ возможны режимы бесконечно быстрой перемены знака функции $\mathrm{sign}(\dot{q}_i)$. Заменяемая эквивалентной непрерывной функцией по правилу Филиппова, эта функция даст значение силы трения покоя.

Формулируются достаточные условия неуправляемости систем с сухим трением в виде векторных неравенств. Показано, что для управляемости требуются некоторые минимальные необходимые ресурсы управления, т.е. условия вида $0 < a_{i0} \le a_i$ $(i = 1,2,...,n)$. Приведен пример системы с двумя степенями свободы, показывающий, что в общем случае оценка необходимых ресурсов управления выходит за рамки анализа геометрии «зон застоя» и требует учета динамических свойств конкретного механизма.

В §3.2 при условии

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, -\dot{\boldsymbol{q}}) = -\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{3.3}$$

формулируются условия управляемости систем (3.1) с сухим трением.

Утверждение 3.1. Для глобальной управляемости системы (3.1) необходимо и достаточно существования такой глобально достижимой точки $(\boldsymbol{q}_*, \dot{\boldsymbol{q}}_*)$, для которой симметричная точка $(-\boldsymbol{q}_*, \dot{\boldsymbol{q}}_*)$ (либо $(\boldsymbol{q}_*, -\dot{\boldsymbol{q}}_*)$), была бы глобально достижимой в обращенной системе вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\ ,\ \ \boldsymbol{u} \in U \tag{3.4}$$

Утверждение 3.2. Пусть в системе (3.1) функция Лагранжа $L(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})$ и вектор-функция $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ не зависят явно от переменной x, где $\boldsymbol{q} = (x, \psi^T)^T$, так что прямая система (3.1) имеет частное решение

$$\dot{x} \equiv v, \quad \psi \equiv \psi_* \tag{3.5}$$

а обращенная во времени система (3.4) – частное решение

$$\dot{x} \equiv v, \quad \psi \equiv -\psi_* \tag{3.6}$$

Если при этом для систем (3.1) и (3.4) имеется стабилизируемость соответственно к режимам (3.5) и (3.6), а также локальная управляемость в их окрестностях, то система (3.1) глобально управляема.

В §3.3 рассматривается система (рис. 3) из трех твердых тел массы m, соединенных линейными пружинами жесткости c, которая может двигаться прямолинейно по шероховатой плоскости при действии сил трения Амонтона – Кулона вида (3.2) при $\eta_i = f\ (i = 1,2,3)$. Кинематические ограничения отсутствуют (исключены конструктивно).

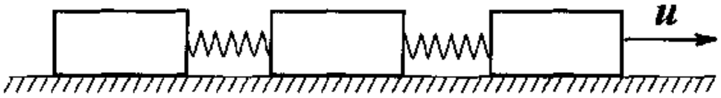

Рис. 3

Единственное управляющее воздействие – внешняя сила u, приложенная к первому телу и удовлетворяющая условию (в безразмерных переменных)

$$|u| \le a, \quad a = 3f + a_1 + \varepsilon \tag{3.7}$$

$\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало. Требуемый ресурс управления a превосходит суммарную силу трения $3f$ плюс характерное значение a_1, зависящее от выбранного способа рассуждения. Показано, что при

$$a_1 = {}^{f}\!/_{\pi}\sqrt{{}^{3}\!/_{c}} \tag{3.8}$$

система за конечное время может быть переведена из любого начального состояния $(\boldsymbol{q_0}, \dot{\boldsymbol{q}}_0) \in \boldsymbol{R}^6$ в некоторую точку с положительными значениями обобщенных скоростей. Этого оказалось достаточно для обоснования стабилизируемости к режимам (3.5), (3.6). При выполнении условий (3.7), (3.8) система (рис. 3) глобально управляема в $\boldsymbol{R}^6$.

В §3.4 рассмотрены примеры систем при качении с проскальзыванием. При малых ресурсах управления для них типична неуправляемость ввиду известного «стремления избегать трения» (P. Appell), переходя за конечное время в режим качения без проскальзывания.

Глава 4. Глобальная управляемость при наличии односторонних связей

В §4.1 механическая система (1.3) рассматривается при наложении идеальных односторонних связей

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \geq \boldsymbol{0} \tag{4.1}$$

Гладкие функции $f_j(\boldsymbol{q})$ $(j = 1,2,...,l)$ удовлетворяют условиям $\partial f_j / \partial \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ в точках $\boldsymbol{q}_*$, для которых $f_j(\boldsymbol{q}_*) = 0$, т.е. в конфигурационном пространстве M границами множеств (4.1) служат регулярные поверхности. Фазовое пространство $TM = \{(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \boldsymbol{T}^r \times \boldsymbol{R}^{2n-r} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \geq \boldsymbol{0}\}$. Как и прежде, полагаем $B(\boldsymbol{q}) \geq 0$, $B(\boldsymbol{q}) = 0$, причем считаем, что точка $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ не принадлежит сразу двум или более поверхностям $f_j(\boldsymbol{q}) = 0$ $(i \in 1,2,...,l)$. В частных случаях ограниченность функции $B(\boldsymbol{q})$ может быть обусловлена соотношениями (4.1).

В окрестности j-й связи вводится вектор $(s, \boldsymbol{y}^T)$, $\dim \boldsymbol{y} = n - 1$, где $s = f_j(\boldsymbol{q})$, а на оставшуюся компоненту вектора конфигурации $\boldsymbol{y}$ связь не наложена. Если при движении системы поверхность $s = 0$ достигнута при $\dot{s} \neq 0$, то решение доопределяется в рамках классической теории абсолютно упругого удара:

$$\dot{s}_+ = -\dot{s}_- , \qquad \boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{p}_- , \qquad T_+ = T_- \tag{4.2}$$

Индексы плюс и минус соответствуют величинам до и после удара, время которого пренебрежимо мало, T – кинетическая энергия в терминах скоростей

$(\dot{s}, \dot{\boldsymbol{y}}^T)$, $\boldsymbol{p} = \partial T / \partial \dot{\boldsymbol{y}}$ - обобщенный импульс компоненты $\boldsymbol{y}$. В условиях допущений (4.2) для сохранения независимого характера соотношений (1.3) и (4.1) рассматриваются лишь такие объекты, в которых нет стесненных ударов.

В §4.2 формулируются достаточные условия стабилизируемости систем (1.3), (4.1), (4.2). С этой целью даются признаки связности функций Ляпунова на множестве $P = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{T}^r \times \boldsymbol{R}^m : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{0}\}$, которое считается связным. Все гиперповерхности $f_j(\boldsymbol{y}) = 0$ $(j = 1, 2, ..., l)$ – регулярны. Вводятся обозначения

$$\partial P = P \setminus P_0, \qquad P_0 = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{T}^r \times \boldsymbol{R}^m : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) > \boldsymbol{0}\}$$

Пересечение k гиперповерхностей $f_j(\boldsymbol{y}) = 0$ $(k < l)$ считается такой поверхностью Σ_s размерности $s = r + m - k$, в точках которой k векторов $\boldsymbol{g}_j = \partial f_j / \partial \boldsymbol{y}$ линейно независимы. Каждой точке $\boldsymbol{y}_* \in \partial P$ ставится в соответствие множество $N(\boldsymbol{y}_*)$ номеров всех гиперповерхностей $f_j(\boldsymbol{y}) = 0$, которым она принадлежит. Через $\Gamma(\boldsymbol{y}_*)$ обозначается определитель Грама, построенный на векторах градиентов $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{y}_*)$ $(\forall i \in N(\boldsymbol{y}_*))$. Для функции $V(\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{y} \in P)$ вектор $\boldsymbol{b} = \partial V / \partial \boldsymbol{y}$, вычисленный в точке $\boldsymbol{y}_* \in \partial P$, вместе с k векторами $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{y}_*)$ порождает другой определитель Грама $(k+1)$-го порядка, обозначаемый $\Gamma_V(\boldsymbol{y}_*)$. В окрестности точки $\boldsymbol{y}_* \in \Sigma_s$ существуют локальные координаты ξ_j $(j = 1, 2, ..., s)$ и матрица $\partial^2 V_0 / \partial \boldsymbol{\xi}^2$, где $V_0(\boldsymbol{\xi}) = V(\boldsymbol{y})$. Из множества условных критических точек функции $V(\boldsymbol{y})$ на ∂P выделяется подмножество $Q_V(\partial P) = \{\boldsymbol{y} \in \partial P : \Gamma_V(\boldsymbol{y}) = 0,\ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{g}_i > 0\ \forall i \in N(\boldsymbol{y})\}$ и вводится обозначение $\psi_V(\varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \partial P : \Gamma_V(\boldsymbol{y}) \leq \varepsilon \Gamma(\boldsymbol{y})\}$.

Утверждение 4.1. Пусть функция Ляпунова $V(\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{y} \in P)$ не имеет критических точек на P_0, за исключением, быть может, точки $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что множество $\psi_V(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ состоит из конечного числа связных компактных подмножеств. Если множество $Q_V(\partial P)\setminus \boldsymbol{0}$ состоит из конечного числа изолированных точек, в которых матрица $\partial^2 V_0/\partial\xi^2$ имеет отрицательное собственное значение, то $V(\boldsymbol{y})$ – связная функция Ляпунова на P.

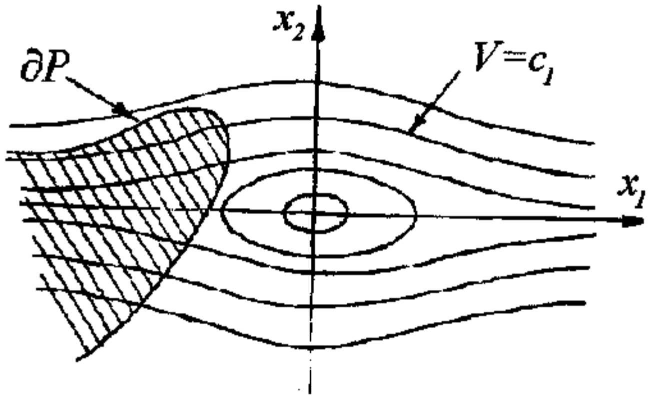

Рис. 4

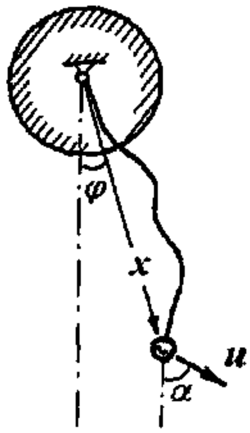

Рис. 5

Например, на рис. 4 изображены линии равного уровня функции

$$V(x_1,x_2)=x_2^2+x_1^2/(1+x_1^2)$$

и заштрихована область $\boldsymbol{R}^2\setminus P_0$, граница ∂P которой асимптотически приближается (сверху вниз налево) к линии $V=c_1$. Функция Ляпунова $V(x_1,x_2)$ – связная на $\boldsymbol{R}^2$, однако не связная на P. Условия утверждения 4.1 не выполнены ввиду некомпактности множества $\psi_V(\varepsilon)$.

Рассматривается пример математического маятника в вертикальной плоскости (рис. 5) с односторонними связями $R\le x\le l$, где l - длина нити, R - радиус неподвижного диска с центром в точке подвеса, φ, x - полярные координаты маятника. В силу утверждения 4.1 в безразмерных переменных $\sigma=(l-R)/l$, $z=(x-l)/l$, $\boldsymbol{y}=(\varphi,z)^T$ приведенная потенциальная энергия маятника $V(\boldsymbol{y})=1-(z+1)\cos\varphi$ – связная функция Ляпунова на множестве $P=\{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{S}^1\times\boldsymbol{R}^1:\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\ge\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=(-z,z+\sigma)$.

Утверждение 4.2. Пусть в системе (1.3) с односторонними связями (4.1) (и условиями (4.2) при ударах) потенциал $B(\boldsymbol{q})$ – связная функция Ляпунова на P, а все множества $H_c(B(\boldsymbol{q}))$ $(c \in E_B)$ – компактны. Тогда если при свободном движении $(\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0})$ система не допускает частного решения $\dot{q}_j \equiv 0$ (исключая положения равновесия), то она стабилизируема по входу u_j $(j \in 1,2,...,n)$ на множестве $TM \setminus \Omega(u_j)$.

В §4.3 для доказательства свойств управляемости систем с односторонними связями используется утверждение 4.2 и свойство обратимости во времени траекторий системы, склеенных процедурами припасовывания.

Утверждение 4.3. Необходимым и достаточным условием глобальной управляемости натуральной лагранжевой системы (1.3), (4.1), (4.2) является существование глобально достижимой кривой, содержащей как некоторую точку $(\boldsymbol{q}_*, \dot{\boldsymbol{q}}_*)$, так и ей симметричную $(\boldsymbol{q}_*, -\dot{\boldsymbol{q}}_*)$.

Показано, что для системы (1.3), (4.1), (4.2) с двумя степенями свободы глобально достижимые кривые могут быть найдены явно.

Выделяются три качественно разных случая. Первый – когда в окрестности состояния покоя нет точек «запретной» области – является тривиальным и не рассматривается. Второй случай соответствует равновесию при ненулевой силе реакции односторонней связи, т.е. в пространстве конфигураций состоянию покоя отвечает внутренняя точка «запретной» области. В третьем случае эта точка является граничной, поэтому реакция односторонней связи равна нулю.

Для равновесия второго типа выводится необходимое условие управляемости, исключающее инвариантные множества в виде «скользящих» режимов. При выполнении этого условия система с двумя степенями свободы может иметь достижимую кривую, описывающую режим автоколебаний с ударами о связь. Достаточное условие существования такой кривой формулируется в виде конечности значения вспомогательного интеграла, записанного явно в результате асимптотического разложения.

В §4.4 рассматриваются системы со вторым типом положения равновесия.

Например, маятник (рис. 4) при действии внешней ограниченной управляющей силы u, приложенной к точке под острым углом α к вертикали, может быть переведен за конечное время из любого начального состояния $(x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ в любое требуемое $(x_f, \dot{x}_f, \varphi_f, \dot{\varphi}_f)$ при наличии односторонних связей. Удары маятника о диск и удары при натяжении нити считаются абсолютно упругими.

Рассматривается также система (рис. 6) из двух тел пренебрежимо малых размеров массами m_1 и m_2, скрепленных пружиной. Ее жесткость достаточна для того, чтобы в состоянии равновесия системы тела не соприкасались. Возможные удары между телами и тела m_1 о преграду считаются абсолютно упругими. Внешняя управляющая сила u приложена к m_2, $|u| \le a$ (где a – заданная сколь угодно малая величина). Потенциальная энергия системы является связной функцией Ляпунова на $P = \{\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^2 : q_1 \ge 0,\ q_2 + d \ge 0\}$. Предлагаемая здесь глобально достижимая кривая описывает режим периодических ударов m_1 о преграду, когда точка m_2 удерживается в покое частью управления. Система на рис. 6 - глобально управляема.

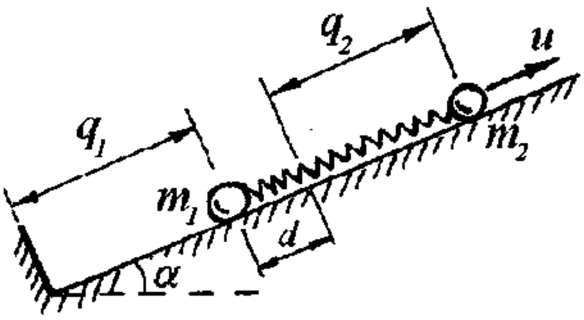

Рис. 6

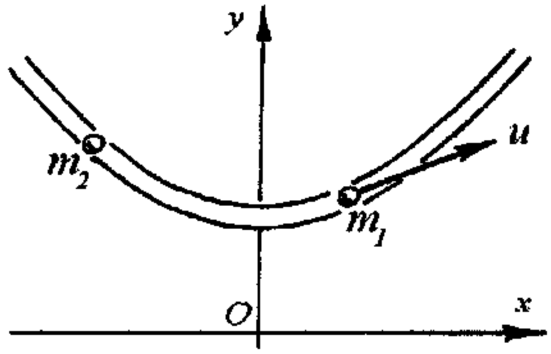

Рис. 7

В §4.5 рассматривается случай третьего типа, отвечающий нулевой реакции односторонней связи при равновесии. Формулируются достаточные условия перехода системы в скользящий режим в малой окрестности состояния покоя. Приводится пример глобально управляемой системы с двумя степенями свободы (рис. 7) и единственной управляющей силой u, действующей на точку m_1

коллинеарно скорости. Здесь взаимодействие между точками m_1 и m_2 (внутри гладкой бесконечной трубки) происходит только в моменты соударений.

Во всех случаях при описании движений в малой окрестности состояния равновесия при действии односторонней связи используется введенная В.Ф. Журавлевым (1978) негладкая замена переменных, а также предложенная А.П. Ивановым и А.П. Маркеевым (1984) каноническая форма кинетической энергии в специальных переменных.

Глава 5. Влияние параметров на управляемость систем твердых тел

В §§5.1, 5.2 в качестве примера рассматривается двузвенный маятник в горизонтальной плоскости при действии внутреннего момента (от первого звена ко второму). Модель может соответствовать манипулятору при отказе управления в первом шарнире. Показано, что существенно различаются свойства управляемости объекта в зависимости от параметра $\lambda = l_1 / l_2$, где l_1, l_2 – длины звеньев. В случае $\lambda < 1$ система допускает равномерное вращение первого звена (при управляемых колебаниях второго), что соответствует достижимой кривой на многообразии нулевого кинетического момента. Это позволяет, например, положительно ответить на два вопроса: всегда ли удастся перевести объект из любого состояния покоя в любое другое

1) в фазовом пространстве при возможности однократного (мгновенного) изменения массы груза на конце второго стержня?

2) внутри гиперповерхности нулевого кинетического момента, если к системе добавлена третья степень свободы (рис. 8) за счет малого груза, совершающего колебания на пружине вдоль первого стержня?

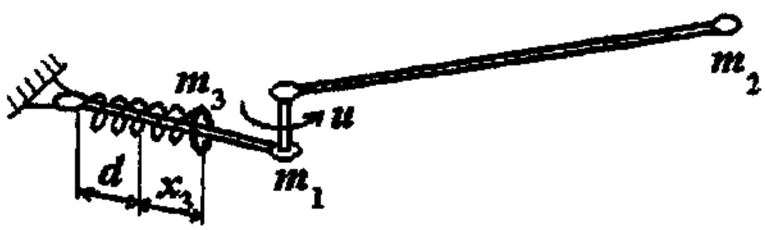

Рис. 8

В случае $\lambda \geq 1$ ответ на первый вопрос получается отрицательным (второй вопрос не рассматривается). Для двузвенника с одним управляющим моментом в первом шарнире случай $\lambda = 1$ был в некотором смысле вырожденным: только он соответствует неуправляемости (§2.4).

В §5.3 вводится понятие параметрической управляемости как свойства точной модели («нежесткой») механической системы быть управляемой, когда приближенная («жесткая») модель не является управляемой. Уравнения движения второй модели могут получаться из уравнений первой путем обращения в нуль некоторого малого параметра ε. Пусть вектор состояния в фазовом пространстве TM составлен из двух частей в виде $\boldsymbol{y} \in TM_1$ (упрощенной модели; $\dim \boldsymbol{y} = n$) и $\boldsymbol{z} \in TM_2$ (дополнительных координат, уточняющих модель). Если скорости дополнительных степеней свободы при $\varepsilon \to 0$ стремятся к нулю, то «уточненный» объект может иметь вид регулярно возмущенной системы

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \varepsilon, \boldsymbol{u}), \qquad \dot{\boldsymbol{z}} = \varepsilon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \varepsilon), \qquad \boldsymbol{u} \in U \tag{5.1}$$

Если же эти скорости при $\varepsilon \to 0$ стремятся к бесконечности, то система

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \varepsilon, \boldsymbol{u}), \qquad \varepsilon \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \varepsilon), \qquad \boldsymbol{u} \in U \tag{5.2}$$

будет сингулярно возмущенной. В обоих случаях объекту (5.1) (или (5.2)) можно поставить в соответствие упрощенную модель (при $\varepsilon = 0$):

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_0, 0, \boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{u} \in U \tag{5.3}$$

символизирующую, например, абсолютную твердость тел (в сравнении с их малой изменяемостью). При этом решения сравниваемых систем для значений параметров $\varepsilon = 0$ и $1 >> \varepsilon > 0$ полагаются близкими, т.е. считаем обеспеченными для (5.1) – условия теоремы Пуанкаре, а для (5.2) – теоремы Тихонова (где равенству $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, 0) = \boldsymbol{0}$ соответствует $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, т.е. в уравнении (5.3) берется $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{0}$).

Определение 5.1. Систему (5.1) (либо (5.2)) назовем параметрически управляемой на множестве $P_1 \subset TM_1$, если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ ее можно перевести из любого состояния $\boldsymbol{y}_0 \in P_1$ в любое требуемое $\boldsymbol{y}_f \in P_1$ допустимым управлением за конечное время, а при $\varepsilon = 0$ это сделать в общем случае невозможно.

Подробно рассматривается система (1.3) с циклической первой координатой, когда в обозначениях $\boldsymbol{q} = (q_1, \boldsymbol{x}^T)^T$, $\boldsymbol{x} = (q_2, q_3, ..., q_n)^T$ матрица инерции A и потенциал B зависят только от $\boldsymbol{x}$. В практически важном случае, отвечающем движению с начальным (или конечным) положением равновесия, закон сохранения $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1 = 0$ задает инвариантное многообразие $\Gamma \subset TM$. Функция Рауса $R = L - \dot{q}_1 \, \partial L / \partial \dot{q}_1$ определяет в пространстве $(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ динамическую подсистему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}_x, \qquad \boldsymbol{u}_x \in U \subset \boldsymbol{R}^{n-1} \tag{5.4}$$

Инвариантное множество $p_1 = 0$ описывается уравнением

$$\dot{q}_1 + \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{5.5}$$

Для жесткой системы вектор конфигурации $(q_1, \boldsymbol{s}^T)^T$ имеет размерность $k < n$, причем каждая координата вектора $\boldsymbol{s}$ встречается среди координат вектора $\boldsymbol{x}$. Закон сохранения импульса для жесткой системы приводится к виду

$$\dot{q}_1 + \eta^T(\boldsymbol{s})\dot{\boldsymbol{s}} = 0 \tag{5.6}$$

Вводятся в рассмотрение матрицы $G = \partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{x}$ и $N = \partial \eta / \partial \boldsymbol{s}$.

Утверждение 5.1. Пусть система (1.3) с малым параметром ε имеет циклическую координату q_1, которой соответствует закон сохранения (5.5) (при $\varepsilon > 0$) либо (5.6) (при $\varepsilon = 0$). Пусть при этом для динамической подсистемы (5.4) область нуль-управляемости совпадает со всем фазовым пространством $(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$. Тогда если $N^T = N$, $G^T \neq G$, то система (1.3) параметрически управляема на множестве (5.5).

В §5.4 даются примеры сингулярно возмущенных систем. Показана параметрическая управляемость на множестве $p_1 = 0$ двузвенника с дополнительной степенью свободы (рис. 7), которой пренебрегают в жесткой модели при $m_3 \to 0$ (либо $c \to \infty$, где c – жесткость пружины). Показана также параметрическая управляемость (на $p_1 = 0$) двузвенника, уточненная модель которого учитывает упругость второго звена. В §5.5 дан пример регулярно возмущенной системы в виде планетарного механизма с проскальзыванием дисков. Параметрическая управляемость обусловлена возможностью изменять силу взаимного давления дисков при малых деформациях водила.

Глава 6. Некоторые примеры оптимального синтеза

Рассмотренные в шестой главе три задачи иллюстрируют частные свойства синтеза оптимального управления, причем первая и (частично) третья задачи – в глобальном, а вторая - в локальном аспекте. Во всех случаях использован принцип максимума Понтрягина, понимаемый как достаточное условие оптимальности в форме регулярного синтеза.

В §6.1 показано, что в общем случае управляемой лагранжевой системы с одной степенью свободы задача оптимального быстродействия решается явно. Рассматривается частная задача оптимального управления эллиптическим маятником при действии на точку подвеса внешней силы u, ограниченной по модулю наперед заданной величиной. Уравнения движения редуцируются на двумерный цилиндр $\varphi \times \dot{\varphi}$ в виде

$$\ddot{\varphi} = -\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{(1+\varepsilon)}\left[u + \frac{d}{dt}(\varepsilon\dot{\varphi}\cos\varphi)\right] \qquad (6.1)$$

где φ - угол от вертикали, ε - отношение массы маятника к массе тележки. Задача оптимального быстродействия $u:(\varphi,\dot{\varphi}) \to (0,0)$ при $\varepsilon = 0$ решается путем явного интегрирования сопряженной системы (из принципа максимума Понтрягина) в эллиптических функциях Якоби. Оптимальное управление найдено в форме регулярного синтеза, для чего построен фазовый портрет на цилиндре. Для близкой задачи $\varepsilon << 1$ линия переключения оптимального управления строится численно.

В §6.2 обсуждается локальное устройство поверхностей переключения оптимального управления в окрестности нуля фазового пространства, где лагранжева система (1.3) вырождается в линейную и в случае выполнения рангового критерия управляемости распадается на несколько «канонических» систем вида

$$x^{(n)} = u \ , \quad |u| \le 1 \tag{6.2}$$

Для канонической системы рассматривается задача синтеза оптимального быстродействия, т.е. отыскания такого закона управления $u(x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)})$, чтобы в силу уравнения (6.2) движение из произвольной точки $(x_0, \dot{x}_0, ..., x_0^{(n-1)}) \in \boldsymbol{R}^n$ в $(0, 0, ..., 0)$ происходило за наименьшее время.

Предлагается способ решения такой задачи в пространстве новых координат $z_1, z_2, ..., z_n$, получаемых в виде функций от первых интегралов системы (6.2) при постоянном управлении. Поочередное обнуление этих координат уменьшает размерность подпространства, в котором целиком лежит конечная часть оптимальной траектории, т.е. оптимальная стратегия имеет вид

$$(z_1, z_2, ..., z_n) \xrightarrow{u=-\operatorname{sign} z_n} (z_1, z_2, ..., z_{n-1}, 0) \xrightarrow{u=-\operatorname{sign} z_{n-1}}$$

$$... \to (z_1, 0, ..., 0) \xrightarrow{u=-\operatorname{sign} z_1} (0, 0, ..., 0)$$

Первые интегралы системы (6.2) при $u = \pm 1$ получаются явно в виде многочленов от $x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}$. Запись выражений для новых координат $z_1, z_2, ..., z_n$ требует решения алгебраических уравнений в радикалах и доступна (в рамках предлагаемого алгоритма) при $n \le 4$. Ранее общий подход к решению задачи синтеза в системе (6.2) (при любом $n \in N$, но без дополнительного условия оптимальности быстродействия) был предложен В.И. Коробовым с применением введенной им «функции управляемости».

В §6.3 рассматривается частный случай механической системы (1.3) с «угловыми» координатами, функция Лагранжа которой состоит лишь из кинетической энергии. Модель может описывать робот-манипулятор вне поля тяготения. Уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right) = \boldsymbol{u} \tag{6.3}$$

где $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)^T$, $|u_i| \le a_i$, $a_i -$ заданы $(i = 1, 2, ..., n)$. Предполагаются ограниченными элементы матрицы $A(\boldsymbol{q})$ и их частные производные. Требуется в области $D \in \boldsymbol{R}^{2n}$ найти управление $u_i = u_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}_f)$, переводящее систему (6.3) из произвольного состояния $(\boldsymbol{q_0}, \dot{\boldsymbol{q}}_0) \in D$ в требуемое $(\boldsymbol{q}_f, \boldsymbol{0})$ за наименьшее время.

Ввиду недоступности такой задачи ставится задача синтеза субоптимального управления, т.е. близкого к оптимальному по быстродействию в том смысле, что регулятор должен: 1) в линейном приближении (т.е. в малой окрестности целевой точки) совпадать с оптимальным; 2) в случае одной степени свободы $(n = 1)$ совпадать с оптимальным; 3) обеспечивать асимптотическую устойчивость в большом тривиального решения в некоторой конечной окрестности целевой точки.

Предлагается переход к новым координатам

$$\boldsymbol{\eta} = A(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_f), \quad \boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{6.4}$$

и доказывается, что трем перечисленным требованиям удовлетворяет обратная связь вида

$$u_i = -a_i \operatorname{sign}(a_i \eta_i + \tfrac{1}{2} p_i |p_i|) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6.5}$$

Доказывается также, что регулятор (6.5) является робастным, т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость также в случае малых возмущений параметров либо дополнительных малых сил, не учтенных моделью.

Численные эксперименты подтверждают, что регулятор (6.5) решает поставленную задачу синтеза для большой области начальных условий и для широкого диапазона массо-инерционных параметров систем (6.3) различной кинематических схем с двумя и более степенями свободы. При этом во многих случаях время переходного процесса соизмеримо с оптимальным (которое находилось численно по методу и с помощью программы В.Д. Осоргина).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе рассмотрены свойства глобальной управляемости лагранжевых систем с ограниченной потенциальной энергией. Этот класс механизмов имеет много приложений в виде многозвенных маятников, моделирующих роботы-манипуляторы, подвижные части летательных аппаратов и т.п. Отличительной особенностью объектов является то, что их фазовое пространство – цилиндрическое, число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы, а сами управления ограничены заранее заданными величинами.

1. Введено понятие связной функции Ляпунова и указаны достаточные условия связности функций Ляпунова на многомерном цилиндре.

2. Формализм прямого метода Ляпунова в теории устойчивости распространен на случай цилиндрического пространства. Получены аналоги теоремы Барбашина–Красовского об устойчивости в большом, теоремы Румянцева об устойчивости по части переменных.

3. Получены достаточные условия стабилизируемости лагранжевых систем в цилиндрическом фазовом пространстве. Предложен способ синтеза релейного управления, при котором отсутствуют «зоны застоя» в фазовом пространстве. Приведены примеры, включая системы с распределенными параметрами, взятые в конечномерном приближении.

4. Получены достаточные условия глобальной управляемости натуральных лагранжевых систем, включая системы с циклическими координатами, с несколькими устойчивыми состояниями равновесия, со стационарными движениями. Например, показана глобальная управляемость многозвенного маятника в горизонтальной плоскости при действии одного управляющего момента, приложенного в неподвижном шарнире. Приведены другие примеры.

5. Показано, что глобальная управляемость на цилиндре влечет глобальную

управляемость в соответствующем накрывающем пространстве.

6. Предложены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости лагранжевых систем с применением «достижимых кривых». Метод позволяет обнаруживать глобальную управляемость не только натуральных лагранжевых систем, но и некоторых систем с трением, а также систем с абсолютно упругими ударами. Приведены примеры.

7. Получены достаточные условия глобальной управляемости систем с двумя степенями свободы и идеальными односторонними связями. С этой целью доказаны достаточные условия связности функций Ляпунова в цилиндрическом фазовом пространстве с кинематическими ограничениями.

8. Исследована зависимость свойства управляемости от массо-инерционных параметров системы. Например, рассмотрена динамика горизонтального двузвенного маятника с нулевым кинетическим моментом при действии одного внутреннего управляющего момента. Показано, что в общем случае транспортная задача управления такой системой при однократном мгновенном изменении массы груза разрешима лишь при условии, что второе звено длиннее первого. Показано, что эта система становится управляемой (на многообразии нулевого кинетического момента) при подходящем «размораживании» параметров, добавляющем новые степени свободы.

9. Введено понятие параметрической управляемости и доказаны ее некоторые достаточные условия. Приведены примеры параметрически управляемых регулярных и сингулярных систем.

10. Решена задача синтеза оптимального по быстродействию управления эллиптическим маятником на двумерном цилиндре.

11. Предложен подход к решению задачи синтеза оптимального быстродействия в линейной канонической системе путем перехода к подходящим координатам, выраженным через первые интегралы системы с постоянными управлениями.

12. Предложен способ синтеза эффективного по быстродействию ограниченного управления системой твердых тел при отсутствии потенциальных сил. Показана робастность предложенного регулятора и близость траекторий к оптимальным.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монография:

1. Каюмов О.Р. Глобально управляемые механические системы. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007 г. 165 с.

Статьи:

2. Каюмов О.Р. Оптимальное управление эллиптическим маятником. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1985. №4. С. 38-44.
3. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1986. №6. С. 16-24.
4. Каюмов О.Р. Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством. *Изв. вузов. Математика.* 1987. №10. С 61-63.
5. Каюмов О.Р. К синтезу управления системой твердых тел. *Труды Пятой Всесоюзной конференции по аналитической механике, теории устойчивости и управлению движением (г. Казань, 1987). (Задачи устойчивости, управления, колебания).* М: ВЦ АН СССР. 1990. С.101-109.
6. Борецкий И.Ф., Каюмов О.Р. Глобально управляемые системы твердых тел. *Прикладная математика и механика.* 1998. Т.62. Вып.3. С. 405-412.
7. Каюмов О.Р. Глобально управляемые системы твердых тел с несколькими устойчивыми состояниями покоя. *Прикладная математика и механика.* 2002. Т.66. Вып. 5. С.775-781.
8. Каюмов О.Р. Параметрическая управляемость одной механической системы *Материалы всероссийской конференции с международным участием. Математика, ее приложения и математическое образование.* Улан-Удэ. 2005. С. 116-123.
9. Каюмов О.Р. Параметрическая управляемость некоторых механических систем. *Нелинейные колебания механических систем: VII Всероссийская научная конференция. Труды. Нижний Новгород.* 2005. с. 305-307.
10. Каюмов О.Р. Параметрическая управляемость некоторых систем твердых тел. *Прикладная математика и механика.* 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 581-604.
11. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых систем твердых тел при действии трения. *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2007. №1. С. 37-50.
12. Каюмов О.Р. Связные функции Ляпунова и их применение. *IX Четаевская международная конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением". 12-16 июня 2007 г. г. Иркутск. Труды.* С.
13. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых механических систем с абсолютно упругими ударами. *Прикладная математика и механика.* 2007. Т. 71. (в печати).