МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Березинская Светлана Николаевна

О механических системах с односторонними неголономными связями.

Специальность: 01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Е.И. Кугушев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор И.И. Косенко
	кандидат физико-математических наук А.С. Сумбатов
Ведущая организация:	Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Защита состоится 21 сентября 2007 года в 16:00 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан   2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент   В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория механических систем с односторонними связями, как и теория неголономных систем, являются важными разделами современной теоретической механики. Развитие методов их изучения и расширение класса изучаемых систем является важной и актуальной задачей теоретической механики. В диссертации исследуются новые типы односторонних связей — неголономные и условные. Показывается, что методы классической теории удара могут быть расширены и применены к системам с такими связями. В частности метод Рауса игнорирования циклических координат, применяемый при изучении систем с двухсторонними связями, распространяется на системы с односторонними связями.

Цель работы. Изучение систем с односторонними неголономными связями и условными связями и иллюстрация разработанных методов на решении конкретных задачах.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Они базируются на классических утверждениях механики. Среди новых результатов следует отметить расширение методов классической теории удара на системы с новыми типами односторонних связей (неголономные и условные) и распространение метода Рауса игнорирования циклических координат на системы с односторонними связями. Новыми являются также примеры механических систем с указанными типами односторонних связей.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы строго обоснованы, они базируются на утверждениях теоретической механики.

Используемые методы. В работе используются методы аналитической механики и функционального анализа, которые прилагаются к рассматриваемым механическим системам.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер, полученные в ней результаты дают возможность изучать свойства механических систем как с классическими, так и с новыми типами односторонних связей. Причем это относится как к голономным, так и к неголономным механическим системам.

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар по гамильтоновым системам и статистической механике кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством академика В.В. Козлова, чл.-корр. РАН Д.В. Трещева, проф. С.В. Болотина, 2003 г.;
- Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им.М.В. Ломоносова, апрель 2003 г.;
- Семинар по динамике относительного движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой, 2004 г.;
- Семинар отдела механики ВЦ РАН под рук. проф. С.Я. Степанова, проф. А.В. Карапетяна, 2004 г.;
- Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 23-28 августа 2004 г.;
- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством академика В.В. Румянцева, чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна, 2005 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 54 наименований. Общий объем диссертации — 90 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с односторонними и двусторонними голономными и неголономными связями, также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** рассматриваются механические системы с неголономными односторонними и условными односторонними связями.

Условия идеальности связей и принцип Даламбера–Лагранжа формулируются в интегральной форме и обобщаются на случай односторонних связей. На этой основе формулируются основные законы движения. Выводятся уравнения движения в форме уравнений Лагранжа 1-го и 2-го рода. Формулируется и доказывается метод Рауса понижения порядка системы. Рассмотрение ведется на языке возможных перемещений, используется аппарат функций ограниченной вариации.

Рассматривается система из N материальных точек, перемещающихся в пространстве под действием приложенных к ним сил. Координаты точек объединяются в вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$, $n = 3N$.

Удерживающие или *двухсторонние связи*, наложенные на систему, описываются как система уравнений $A(x,t)\dot{x} + b(x,t) = 0$, где $A = \|a_{ij}(x,t)\|$ — $n \times k$ матрица, $b \in R^k$.

Неудерживающие или *односторонние связи* включают в свое описание системы неравенств относительно координат и скоростей точек. Если связи удается привести к виду, не содержащему скоростей, то они называются *голономными*. Иначе — *неголономными*.

Голономные односторонние связи имеют вид $g(x,t) = (g_1, g_2, ..., g_m) \leq 0$, где $g_i(x,t) \leq 0$, $i = 1, ..., m$.

В диссертации рассматриваются неголономные односторонние связи линейные по скоростям. Они задаются системой неравенств $W(x,t)\dot{x} + h(x,t) \leq 0$, где W — матрица $n \times l$, $h \in R^l$.

В диссертации рассматриваются *условные связи* — это удерживающие связи, выполнение которых требуется только на границе каких-то других односторонних связей: $C(x)\dot{x} + d(x,t) = 0$ при условии, что $g_1(x) = 0$, где C — матрица $n \times r$, $d \in R^r$.

Пространством возможных перемещений $V(x,t)$ в точке (x,t) назовем множество векторов $\delta x \in R^n$, удовлетворяющих условиям

$$A(x,t)\delta x = 0, \quad \partial g(x,t)\delta x \leq 0, \quad C(x,t)\delta x = 0, \quad W(x,t)\delta x \leq 0,$$

(здесь i-я строка матрицы $\partial g(x,t)$ — это вектор $\partial g_i = \partial g_i(x,t)/\partial x$). Условия $A(x,t)\delta x = 0$ и $W(x,t)\delta x \leq 0$ проверяются при любых (x,t), а неравенства $\partial g_i(x,t)\delta x \leq 0$ надо проверять на границе связи, т.е. в тех точках, где $g_i(x,t) = 0$. Равенство $C(x,t)\delta x = 0$ надо проверять в тех точках, где $g_1(x,t) = 0$.

Во *втором разделе* обсуждается каким должны быть пространство траекторий движения. В системах с односторонними связями возможны скачки скорости (при ударах о связь) и, в частности, скорости точек системы могут быть кусочно-постоянными функциями времени. Поэтому для их описания предлагается использовать пространство функций ограниченной вариации, являющееся минимальным полным линейным пространством, содержащим кусочно-постоянные функции. Считается, что траектории движения таковы, что скорости движения представляют собой функции ограниченной вариации. При этом сами траектории являются, по крайней мере, абсолютно непрерывными функциями. Уравнения движения Ньютона $M\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ записываются в форме т.н. *уравнений с мерами*:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}\, dt, \quad M\dot{x}(t) = \dot{x}(t+0) + \int_{t_0}^{t} F(x, \dot{x}, t) dt$$

(M — матрица масс точек системы, F — сводный вектор сил), в которых интегралы понимаются как интегралы Римана–Стилтьеса. Используется также краткая запись этих уравнений: $Md\dot{x} = Fdt$, и терминология мер Лебега–Стилтьеса, в которой, например, $d\dot{x}(t)$ описывается как мера Лебега–Стилтьеса с производящей функцией $\dot{x}(t)$.

В *третьем и четвертом разделах* принцип Даламбера–Лагранжа для систем с двухсторонними идеальными связями формулируется в интегральной форме, которая эквивалентна классической, локальной. Затем этот принцип распространяется на системы с односторонними связями. Дадим его формулировку.

Пусть $x(t)$ — траектория движения. Считается, что систему можно освободить от связей и добавить реакцию связей таким образом, что $x(t)$ останется траекторией движения освобожденной системы. При этом будут выполнены уравнения движения с мерами: $Md\dot{x} = F(x, \dot{x}, t)dt + d\rho(t)$, где $\rho(t)$ — некоторые функции ограниченной вариации, являющиеся производящими функциями реакций связей $d\rho(t)$ (они могут иметь скачки, сосредоточенные на множестве тех моментов времени, в которые траектория $x(t)$ выходит на границу односторонних ограничений).

Возможной вариацией кривой $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ будем называть любую непрерывную вектор-функцию $\nu(t) = (\nu_1(t), \upsilon_2(t), ..., \nu_n(t))$, если в каждый момент времени вектор $\nu(t)$ является вектором возможных перемещений, т.е. $\nu(t) \in V(x(t), t)$ для всех t.

Связи называются *идеальными*, если для любой траектории системы $x(t)$ и для любой ее возможной вариации $\nu(t)$ интегральная элементарная работа сил реакции связей неотрицательна, т.е. $\Phi(\nu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\nu(t), d\rho(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i(t) d\rho_i(t) \geq 0$. Для удерживающих связей вариация $-\nu(t)$ является возможной одновременно с $\nu(t)$, и это неравенство эквивалентно равенству $\Phi(\nu) = 0$. Для односторонних связей оно означает, что, при выходе траектории системы на границу удерживающих связей, реакция связей направлена внутрь области, допустимой этими связями.

Принцип Даламбера–Лагранжа. Пусть абсолютно непрерывная кривая $x(t)$ удовлетворяет идеальным связям, наложенным на систему, а ее производная существует почти всюду и является функцией ограниченного изменения. Кривая $x(t)$ является траекторией движения тогда и только тогда, когда для любой возможной вариации $\nu(t)$ выполнены соотношения $\Psi(\nu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (M d\dot{x} - F(x, \dot{x}, t)\, dt, \nu(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{i=1}^{n} (m_i d\dot{x}_i - F_i(x, \dot{x}, t) dt)\, \nu_i(t) \geq 0$.

Используя известные утверждения функционального анализа выводим отсюда *уравнения Лагранжа 1-го рода.* Кривая $x(t)$ является траекторией движения системы с идеальными связями тогда и только тогда, когда найдутся такие векторные меры Лебега–Стилтьеса $d\lambda = (d\lambda_1, d\lambda_2, ..., d\lambda_k)$, $d\mu = (d\mu_1, d\mu_2, ..., d\mu_m)$, $d\xi = (d\xi_1, d\xi_2, ..., d\xi_r)$ и $d\eta = (d\eta_1, d\eta_2, ..., d\eta_l)$, что $M d\dot{x} = F dt + A' d\lambda + \partial g' d\mu + C' d\xi + W' d\eta$, где знак $()'$ означает транспонирование матриц. При этом каждая мера $d\mu_i$ и $d\eta_j$ неположительна и сосредоточена на множестве моментов времени, в которые $g_i(x(t), t) = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} w_{ji}(x, t)\dot{x}_i + h_j(x, t) = 0$ соответственно. Каждая мера $d\xi_i$ сосредоточена на множестве моментов времени, в которые $g_1(x(t), t) = 0$.

В *пятом разделе* приводятся условия на скачках, представляющие собой соотношения между скоростями точек системы сразу до и после удара о границу односторонней связи. Функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$ и $\eta(t)$, как функции ограниченной вариации, однозначно раскладываются на сумму трех функций — абсолютно непрерывной, непрерывной сингулярной и функции скачков. В точках скачка мер (и только в них) траекторная скорость $\dot{x}$ также может иметь скачок. Обозначив эти скачки соответственно $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\dot{x}$, получаем условие на скачках: $M\Delta\dot{x} = A'\Delta\lambda + \partial g'\Delta\mu + C'\Delta\xi + W'\Delta\eta$.

В *шестом разделе* первой главы из принципа Даламбера–Лагранжа выводятся известные основные законы динамики системы.

Теорема об изменении количества движения. Если удерживающие, и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поступательный сдвиг всех точек системы как твердого тела вдоль какого-нибудь направления постоянного во времени, то проекция количества движения системы на это направление является абсолютно непрерывной функцией и скорость ее изменения равна суммарной проекции на это направление вектора активных сил.

Теорема об изменении момента количества движения. Если удерживающие и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поворот всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной оси проходящей через начало координат, то момент количества движения системы относительно этой оси является абсолютно непрерывной функцией и скорость его изменения равна суммарной проекции на эту ось векторов моментов активных сил.

В *седьмом разделе* выводятся уравнения Лагранжа 2-го рода. Пусть удерживающие связи голономны, и $q = (q_1, q_2, ..., q_s)$ являются обобщенными координатами. Пусть на систему наложены односторонние голономные связи $g_i(q,t) \le 0, \quad i = 1, 2, ..., m$; группа условных связей $C(q,t)\dot{q} + d(q,t) = 0$, при $g_1(q,t) = 0$, где C — $s \times r$ матрица, $d \in R^r$; неголономные односторонние связи $W(q,t)\dot{q} + h(q,t) \le 0$, где s — число связей, W — $s \times l$ матрица, $h \in R^l$. Введем вектор обобщенных сил $Q = (\partial x/\partial q)'F$. Тогда уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}dt = Qdt + \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)' d\mu + C'(q,t)d\xi + W'(q,t)d\eta.$$

В *восьмом разделе* формулируется теорема Аппеля, о том, что при ударе о границу односторонней связи проекция вектора обобщенных импульсов $p(t) = \partial T/\partial \dot{q}$ на плоскость касательную поверхности удара сохраняются.

В *девятом разделе* метод Рауса игнорирования циклических координат распространяется на системы с односторонними связями.

Пусть силы имеют силовую функцию $U(q,t)$. Введем функцию Лагранжа $L(q,\dot{q},t) = T + U$. Обобщенная координата q_i называется *циклической*, если она не входит явно в функцию Лагранжа L $\partial L/\partial q_i = 0$. Назовем ее *отделяющейся*, если от нее не зависят связи, т.е. для всех j, p и k выполняется условие

$$\frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial d_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial w_{pk}}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial h_j}{\partial q_i} = 0.$$

Пусть координаты $q_r, q_{r+1}, ..., q_s$ являются отделяющимися циклическими. Им соответствуют циклические интегралы $\partial L/\partial \dot{q}_i = \beta_i = \mathrm{const}$, $i = r, r+1, ..., s$. Считая выполненными обычные условия независимости, разрешаем эти соотношения относительно циклических скоростей и составляем функцию Рауса $R(q_\Pi, \dot{q}_\Pi, \beta, t) = L - \dot{q}_C \beta$. ($q_\Pi = (q_1, ..., q_{r-1})$ и $\dot{q}_\Pi = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_{r-1})$ — позиционные координаты и скорости).

Теорема Рауса. Пусть $q(t)$ — траектория движения нашей системы, тогда для позиционных координат выполнены уравнения Лагранжа второго рода, в которых в качестве функции Лагранжа берется функция Рауса:

$$d\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\Pi}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_\Pi} dt = \left(\frac{\partial g}{\partial q_\Pi}\right)' d\mu + C' d\xi + W' d\eta.$$

Во **второй главе** для введенных новых типов связей рассматриваются уравнения движения в рамках классической лагранжевой теории удара. Данные уравнения имеют больший практический смысл по сравнению с уравнениями с мерами. Исследования конкретных систем, произведенные в третьей главе, опираются именно на эти уравнения. В диссертации они называются "основные уравнения теории удара". Переход от уравнений с мерами к уравнениям теории удара можно произвести, если функции, описывающие связи, имеют второй класс гладкости. Тогда скорость движения имеет только две составляющие — абсолютно непрерывную функцию и функцию скачков.

В *первых двух разделах* известные положения теории систем с односторонними связями распространяются на случай неголономных и условных связей. Рассмотрение производится на языке возможных перемещений. Пусть в момент времени $\tilde{t}$ произошел удар, т.е. система вышла на границу односторонних ограничений. Предполагается, что существуют значения $v^- = \dot{x}(\tilde{t}-0)$ и $v^+ = \dot{x}(\tilde{t}+0)$. Величина $P = M(v^+ - v^-) = M\Delta v$ называется *ударным импульсом* реакции односторонних связей. Связи называются *идеальными при ударе*, если на множестве возможных перемещений выполняется $P\delta x \geq 0$. В этом случае выполняется *основное уравнение теории удара* на множестве возможных перемещений $(M\Delta v, \delta x) \geq 0$.

Выводятся *уравнение Лагранжа первого рода для удара*: если кривая $x(t)$, удовлетворяющая идеальным связям является траекторией движения то в момент удара о границу связей найдутся такие вектора $\lambda \in R^k, \mu \in R^m, \xi \in R^j, \eta \in R^l$, что

$$M\Delta v = A'\lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)' \mu + C'\xi + W'\eta.$$

При этом векторы μ и η покоординатно неположительны $\mu \leq 0$ и $\eta \leq 0$, т.е. $\mu_i \leq 0, i = 1, 2, ..., m$, и $\eta_j \leq 0, j = 1, 2, ..., l$.

В *третьем разделе* формулируется основное уравнение удара в лагранжевых координатах. Пусть q — лагранжевы координаты $(x = x(q,t))$, $T = T(q, \dot{q}, t) = \dfrac{1}{2}(M\dot{x}, \dot{x})$ — кинетическая энергия. Уравнение удара в лагранжевых координатах:

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A'\lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)' \mu + C'\xi + W'\eta, \text{ где } \mu \leq 0,\ \eta \leq 0.$$

В *четвертом разделе* известные основные законы динамики удара распространяются на новые типы односторонних связей.

Теорема об изменении количества движения. Если связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поступательный сдвиг всех точек системы как твердого тела вдоль какого-нибудь направления постоянного во времени, то проекция количества движения системы на это направление сохраняется.

Теорема об изменении момента количества движения. Если связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поворот всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной оси, то скорость изменения проекции момента количества движения системы на эту ось сохраняется.

В *пятом разделе* распространяется на новые типы связей теорема Аппеля, о том, что при ударе о границу односторонней связи проекция вектора обобщенных импульсов $p(t) = \partial T/\partial \dot{q}$ на плоскость касательную поверхности удара сохраняются.

В *шестом разделе* рассматривается метод Рауса игнорирования циклических переменных, обоснованный в первой главе. Здесь он обосновывается в терминах лагранжевой теории удара. На примере односторонних голономных связей $g(q,t) \leq 0$ показывается, что для введенной функции Рауса при ударе условия скачка будут выглядеть так

$$\Delta \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\Pi} = \left(\frac{\partial g}{\partial q_\Pi}\right)' \mu.$$

Эти условия такие, какие были бы выписаны для системы, описываемой позиционными координатами и скоростями с лагранжианом в виде функции Рауса. Значит, в случае, когда циклические переменные отделяющиеся мы можем их исключать и рассматривать с систему с односторонними связями, но с меньшим числом степеней свободы.

В заключительном *седьмом разделе* главы доказывается, что в системах с односторонними линейными неголономными связями в общем случае движение носит безударный характер, т.е. при выходе на границу ограничений скачка скорости не происходит.

Рассмотрим натуральную механическую систему $L = \frac{1}{2}(M(q)\dot{q}, \dot{q}) + U(q)$. Пусть на систему наложены только неголономные односторонние связи $W(q)\dot{q} + d(q) \leq 0$, причем все компоненты вектора d неотрицательны $d \geq 0$. Считаем, что при ударе полная энергия может только рассеиваться. В точках скачка координаты и, значит, потенциальная энергия остаются непрерывными. Следовательно, в них может рассеиваться только кинетическая энергия: $(M\dot{q}^+, \dot{q}^+) \leq (M\dot{q}^-, \dot{q}^-)$.

Допустим, что в момент $t = \tilde{t} - 0$ траектория вышла на ограничение $W\dot{q}^- + d = 0$. Показывается, что $\dot{q}^+ = \dot{q}^-$, т.е. скачки скорости отсутствуют.

Третья глава посвящена рассмотрению примеров конкретных механических систем с неголономными (и условными) односторонними связями на основе теории, развитой во второй главе.

В *первом разделе* рассматривается задача о плоском теле с каналом. Это плоское тело, свободно двигающееся по гладкой плоскости. Внутри тела вырезан тонкий канал K. Пусть в плоскости задана абсолютная система координат $O\xi\eta$ и в точке $(0,0)$ установлен "столбик". В начальный момент тело расположено так, что этот столбик попадает в канал K. На движение тела наложена односторонняя связь, состоящая в том, что "столбик" располагается в канале K. Толщину "столбика" и ширину канала считаем нулевыми.

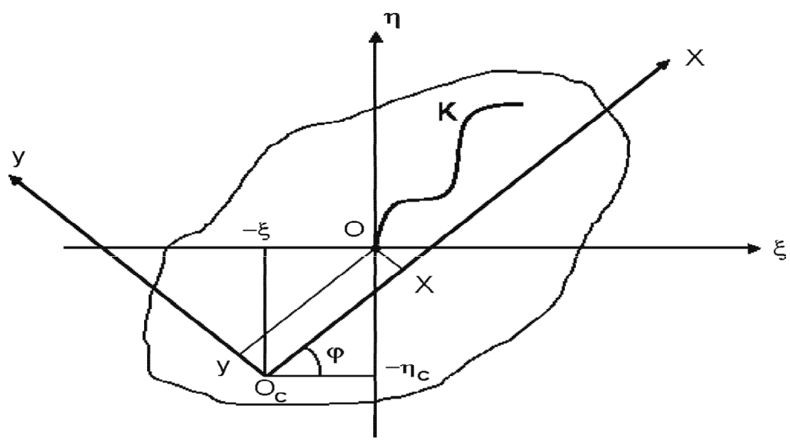


Рис. 1: Плоское тело с каналом

Свяжем с телом систему координат O_cxy (см. рис. 1), начало которой O_c совпадает с центром тяжести тела. Будем считать, что канал K в теле это гладкая кривая, которая задается параметрически

$$x = x_K(s), \quad y = y_K(s), \quad 0 \le s \le a,$$

где s — натуральный параметр, длина вдоль кривой K. Сама кривая имеет длину $a > 0$. Положение тела описывается тройкой (x, y, φ), где (x, y) — координаты начала абсолютной системы координат O в связанной системе, а φ — угол наклона оси O_cx связанной системы координат по отношению к оси $O\xi$ абсолютной системы. Массу тела считаем единичной. Лагранжиан системы $L = \dfrac{1}{2}(\dot{s}^2 + r^2(s)\dot{\varphi}^2 + 2\mu(s)\dot{s}\dot{\varphi}) + \dfrac{J\dot{\varphi}^2}{2}$, где J — центральный момент инерции тела, $r = (x_K, y_K)$, $v = \dfrac{dr}{ds}$, $\mu = (r \times v)_z = -x'_K y_K + y'_K x$, и использовано, что $v^2 = 1$, т.к. s — это натуральный параметр.

На систему наложено две односторонних связи: $-s \le 0, \quad s-a \le 0$. Координата φ является циклической и отделяющейся. Циклический интеграл имеет вид $(r^2+J)\dot\varphi + \mu\dot s = \beta$. Функция Рауса

$$R = L - \beta\dot\varphi = \frac{\dot s^2}{2}\Big(1 - \frac{\mu^2}{r^2+J}\Big) + \dot s\frac{\mu\beta}{J+r^2} - \frac{\beta^2}{2(J+r^2)}.$$

Это система с одной степенью свободы. Она интегрируется в квадратурах. При абсолютно упругих соударениях интеграл энергии позволяет нарисовать фазовый портрет. Общий характер движения — периодическое вращение по углу φ и периодические же движения с ударами в канале.

Во *втором разделе* исследуется система с условной односторонней связью — однородный диск на горизонтальной плоскости, движение которого ограничено абсолютно шероховатой прямой.

По гладкой плоскости Oxy скользит однородный диск единичной массы и радиуса R. Положение диска можно описать тремя параметрами (x, y, φ), где (x, y) — координаты центра диска, а φ — угол его поворота. Движение диска ограничено полуплоскостью $y \ge R$. При выходе на границу, т.е. на прямую $y = R$, обод диска касается прямой $y = 0$. Предположим, что контакт диска с этой прямой является абсолютно шероховатым: $R - y \le 0$ и $\dot x + R\dot\varphi = 0$ при $y - R = 0$. Обозначим J — центральный момент инерции диска. Для использования теоремы Рауса, перейдем к координатам (u, y, φ), где $u = x + R\varphi$. Тогда связи и лагранжиан системы приобретут следующий вид:

$R - y \le 0$; $\dot u = 0$, при $y - R = 0$;

$L = \dfrac{1}{2}((\dot u - R\dot\varphi)^2 + \dot y^2) + \dfrac{J\dot\varphi^2}{2}.$

Координата φ является циклической и отделяющейся. Исключив методом Рауса циклическую переменную получим систему с теми же связями и Лагранжианом $R = \dfrac{1}{2}\dot y^2 + \dfrac{J\dot u^2}{2(J+R^2)} - \dfrac{R\beta\dot u}{J+R^2} - \dfrac{\beta^2}{2(J+R^2)}$.

Рассмотрим абсолютно упругий (сохраняется энергия системы) одиночный удар. Поскольку в момент удара мы выходим на границу сразу двух неудерживающих связей, то скорости после удара $\dot y^+$ и $\dot u^+$ восстанавливаются неоднозначно. Если обозначить h — энергию системы, то

$$\dot y^{-2} + \frac{J\dot u^{-2}}{J+R^2} = \dot y^{+2} + \frac{J\dot u^{+2}}{J+R^2} = 2h.$$

Из условия односторонности имеем $\dot{y}^+ \geq 0$, т.е. (на плоскости (u^+, y^+)) реализуется только правая половина дуги эллипса.

Рассмотрим простой случай $\dot{y}^- < 0$, $\dot{x}^- > 0$, $\dot{\varphi}^- = 0$. Здесь $\dot{u}^- = \dot{x}^- > 0$. Выберем на дуге нижнюю точку $\dot{y}^+ = 0$, $\dfrac{J\dot{u}^{+2}}{J+R^2} = 2h$, $\quad \dot{u}^+ < 0$. Тогда $\dot{x}^+ < \dot{x}^-$ и при $\dfrac{R^2}{J} \leq 1$ или при достаточно большом значении $\dot{y}^{-2}$ будет $\dot{x}^+ < 0$. Видно, что здесь в принципе возможно даже возникновение ситуации при которой диск будет отскакивать в сторону противоположную первоначальному горизонтальному движению.

Для однозначности решения рассматривается модель удара, из которой можно получить дополнительные условия — это задание степени “шероховатости” прямой, о которую ударяется диск. Скорость $\dot{u}$ характеризует величину отклонения значений $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$ от таких, при которых диск катится по горизонтальной прямой без проскальзывания (т.е. от $\dot{u} = 0$). Для абсолютно гладкого случая положим $\dot{u}^+ = \dot{u}^-$, а для абсолютно шероховатого $\dot{u}^+ = 0$. В линейном приближении этот закон можно задать следующим образом: $\dot{u}^+ = k\dot{u}^-$, где $(1-k)$, $0 \leq k \leq 1$ — степень шероховатости. Тогда $\dot{y}^+ = \sqrt{2h(1-k^2) + k^2\dot{y}^{-2}}$.

В *третьем разделе* рассматривается система с двусторонней неголономной связью — двусторонний конек Чаплыгина. Исследуется его свободное движение и удар о горизонтальную прямую.

Пусть по плоскости движется плоское тело с коньком, причем центр масс тела совпадает с коньком. Обозначим (x, y) координаты центра масс тела (рис. 2). Конек углом φ наклона своего лезвия

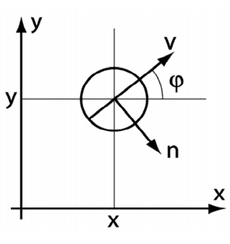


Рис. 2: Двусторонний конек

к оси Ox. Ограничение на движение состоит в том, что скорость точки тела, совпадающего с коньком, направлена по лезвию конька: $-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi = 0$.

Считаем массу конька единичной. Обозначим J — момент инерции тела относительно центра масс. Уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$\ddot{x} = -\sin\varphi\lambda,\ \ddot{y} = \cos\varphi\lambda,\ \ddot{\varphi} = 0,$$

где $\lambda(t)$ некая функция. Анализ уравнений показывает, что $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = v^2 = const$, т.е. величина линейной скорости центра масс постоянна. Также $\varphi = at + b$, т.е. конек вращается с постоянной угловой скоростью a. С этой же угловой скоростью поворачивается и вектор линейной угловой скорости центра масс. Значит, центр масс движется по окружности радиуса $r = v/a$, и вектор конька направлен по касательной к этой окружности (рис. 3).

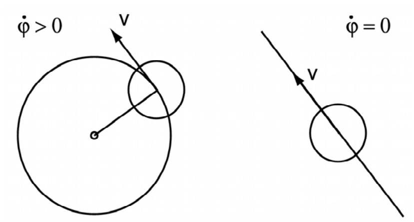


Рис. 3: Свободное движение двустороннего конька

Далее рассматривается удар двухстороннего конька о голономную связь. Пусть на движение двухстороннего конька наложена голономная односторонняя связь $-y \le 0$. Условия скачка имеют вид

$$\Delta\dot{x} = -\xi\sin\varphi,\ \Delta\dot{y} = \xi\cos\varphi - \eta,\ \Delta\dot{\varphi} = 0,$$

где ξ и η — некоторые неизвестные нам константы, $\eta \le 0$. Рассмотрим абсолютно упругий удар, т.е. такой, при котором сохраняется энергия. Тогда охраняется модуль скорости центра масс: $\dot{x}^{+^2} + \dot{y}^{+^2} = \dot{x}^{-^2} + \dot{y}^{-^2}$. Угол поворота φ при ударе не меняется и скорости центра масс до и после удара параллельны. После удара конек будет двигаться по окружности того же радиуса. Эта окружность касается окружности, имевшейся до удара, и движение идет в противоположную сторону. В целом картина движения в этом случае такова.

Тело двигается по окружности с постоянной скоростью так, что конек все время касается окружности. При ударе линейная скорость центра масс меняется на противоположную, и тело начинает двигаться по окружности того же радиуса, которая касается предыдущей окружности в точке удара. После второго соударения процесс периодически продолжается (рис. 4).

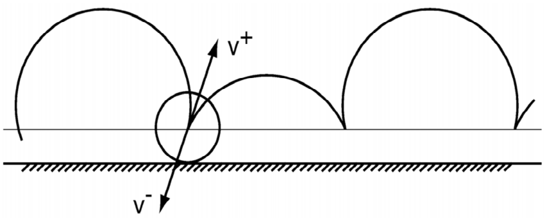


Рис. 4: Удар двустороннего конька о полуплоскость

В *четвертом разделе* рассматривается система с односторонней неголономной связью — односторонний конек Чаплыгина. По гладкой плоскости движется диск радиуса ρ. Он снабжен "односторонним коньком", который накладывает на движение диска одностороннюю неголономную связь $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi \leq 0$.

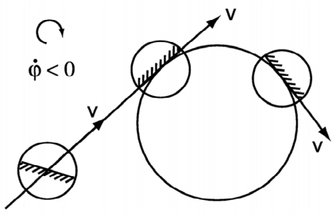


Рис. 5: Свободное движение одностороннего конька

Движение системы описывается следующим образом. Диск все время вращается с постоянной угловой скоростью. Центр диска движется по прямой до тех пор, пока лезвие конька не повернется в положение, направленное по скорости движения центра. Затем движение перейдет по касательной к обычной круговой траектории диска с двухсторонним коньком (рис. 5). Сойти с этой окружности траектория не сможет.

На движение одностороннего конька накладывается односторонняя голономная связь $-y \leq 0$. Будем считать удар об эту связь абсолютно упругим.

Как и раньше обозначим угол между лезвием конька и горизонтальной осью φ, а угол между вектором скорости и горизонтальной осью — α. Направление скорости после удара о прямую $y = -\rho$, где ρ — радиус диска конька, зависит от соотношения углов φ и α во время удара.

1) Пусть $\varphi \geq \alpha$. Тогда модуль скорости сохраняется и угол падения равен углу отражения (рис. 6).

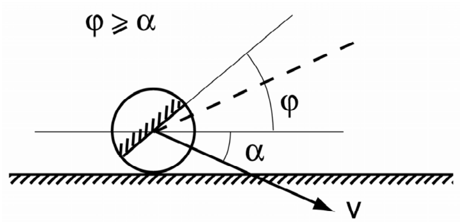
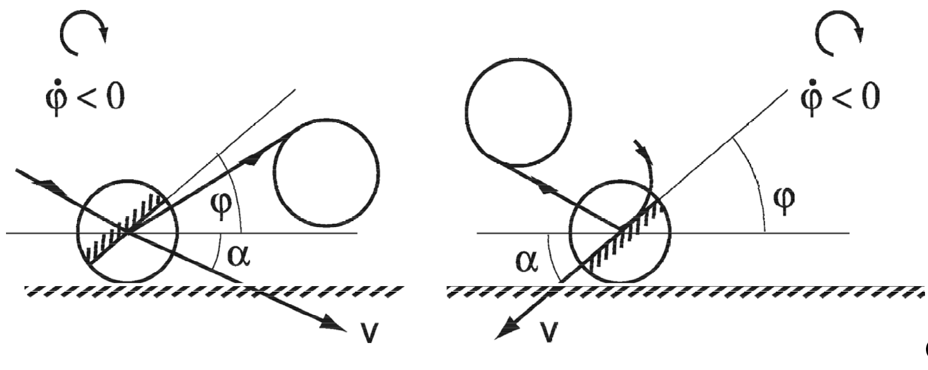


Рис. 6: Момент удара одностороннего конька $\varphi \geq \alpha$

На рисунке показаны примеры движения конька в этом случае с отрицательной угловой скоростью (рис. 7). На первом из них конек сначала движется по прямой, т.е. находясь на неограничении $\dot{x}^- \sin\varphi - \dot{y}^- \cos\varphi < 0$. Во время удара о горизонтальную прямую его скорость скачком меняется так, что ее величина остается постоянной, а угол падения равен углу отражения. После удара конек продолжает двигаться по прямой, пока односторонняя неголономная связь не выходит на ограничение $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$, и конек начинает двигаться по окружности радиуса $r = |v|/|\dot{\varphi}|$.

На втором рисунке конек сначала движется по окружности радиуса r. После удара о горизонтальную прямую направление вектора скорости конька уже не совпадает с направлением лезвия конька, поэтому конек начинает двигаться по прямой до тех пор, пока эти



C

Рис. 7: Примеры ударов одностороннего конька $\varphi \geq \alpha$

направления не совпадут, и конек выходит на движение по окружности первоначального радиуса r.

2) Пусть $\varphi < \alpha$. Тогда угол падения уже не может быть равен углу отражения, так как в этом случае вектор скорости лежит в недопустимой для движения конька области (рис. 8). Допустимая область отраженной скорости конька — клин с углом раствора φ, образованный лезвием конька и горизонтальной осью. В рамках имеющихся предположений о системе однозначного ответа о движении конька дать нельзя. Один из возможных путей нахождения точного значение угла отражения — это исключить одновременное срабатывание двух связей.

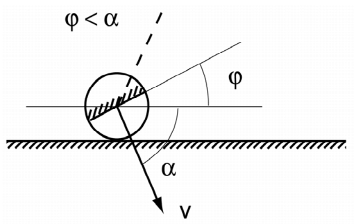


Рис. 8: Момент удара одностороннего конька $\varphi < \alpha$

Для этого рассмотрим более сложную систему, в которой у некоторых связей имеется запаздывание реакции, что исключает их одновременность с другими связями. Ведем в систему дополнительный параметр s, характеризующий степень этого запаздывания. Такая система будет совпадать с нашей исходной при $s = 0$, а знание о ее поведении при $s \to 0$ можно использовать для устранения неопределенности. Чтобы ввести запаздывание реакции связи у конька, будем считать, что у конька есть люфт в том смысле, что он может проехать в запрещенном направлении расстояние s. Будем называть такой конек *"односторонний конек с люфтом"*.

Когда конек с люфтом ударяется о горизонтальную плоскость, его скорость отражается под тем же углом и конек проезжает расстояние s в запрещенном направлении. Теперь, когда конек не ощущает воздействия первой связи, он испытывает удар о лезвие конька. Считаем s таким малым, что лезвие конька не успевает повернуться, т.е. нет эффекта наличия угловой скорости. Значит вектор скорости отразится от лезвия конька под тем же углом. Спустя некоторое время, конек с люфтом снова ударяется о горизонтальную плоскость и снова связи включаются не одновременно. Происходит серия соударений — поочередно о горизонтальную плоскость и лезвие конька (см. рис. 9).

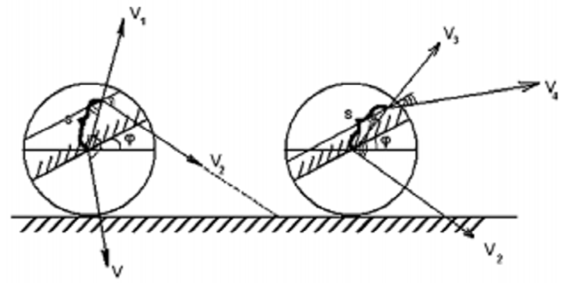


Рис. 9: Односторонний конек с люфтом

Поскольку прямые, о которые происходит удар, параллельны и углы отражения вектора скорости не меняются, то схема изменения этих углов такая как, на рисунке 10, где ψ_i — угол i-го отражения вектора скорости при выходе на ограничение.

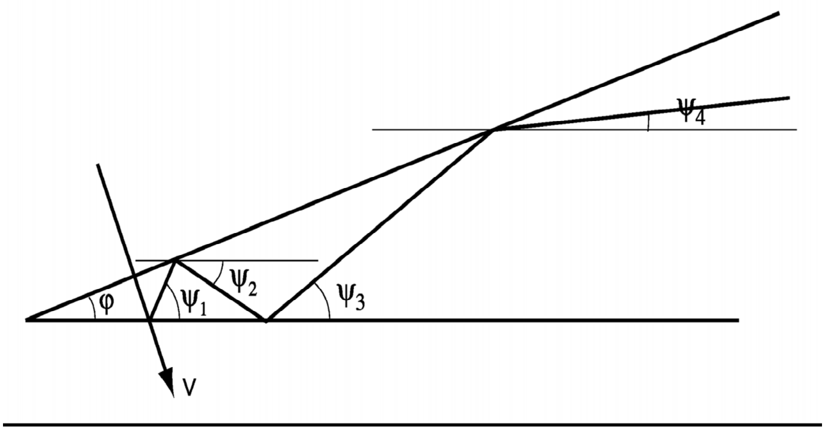


Рис. 10: Преобразования углов отражения для случая $\varphi < \alpha$

Простые геометрические подсчеты показывают закономерность изменения углов:

$$\begin{array}{ll}
\psi_1 = \alpha, & \psi_2 = -(\alpha - 2\varphi), \\
\psi_3 = \alpha - 2\varphi, & \psi_4 = -(\alpha - 4\varphi), \\
\psi_5 = \alpha - 4\varphi, & \psi_6 = -(\alpha - 6\varphi), \\
\psi_7 = \alpha - 6\varphi & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Т.к. абсолютная величина углов ψ_i монотонно убывает, то наступит

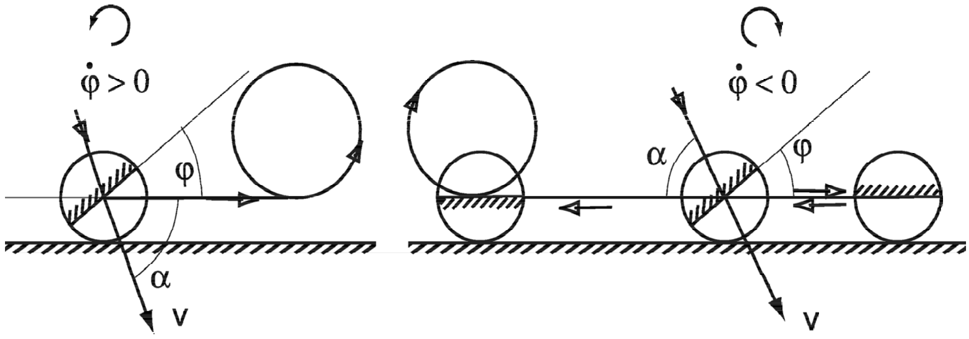


Рис. 11: Примеры ударов одностороннего конька $\alpha = 2k\varphi$

момент, когда цепь ударов прекратится. Это условие запишем так: $\psi_i \geq 0$ для четных i.

При уменьшении параметра s кратные соударения будут происходить все быстрее, рис. 10 как бы сжимается, но углы остаются теми же. В результате конек отскочит от горизонтальной прямой под углом ψ_N.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда конек подходит к горизонтальной плоскости под углом $\alpha = 2k\varphi$ с некоторым натуральным $k > 1$ (рис. 11). Тогда после удара конек будет двигаться вдоль плоскости. Если угловая скорость положительная $\dot{\varphi} > 0$, то в какой-то момент конек начнет двигаться по окружности. Если же $\dot{\varphi} < 0$, то рассмотренная модель последовательного наложения связей не позволяет определить характер движения конька, если направление лезвие совпадет с горизонталью.

Для разрешения этого вопроса можно предложить новую модель, в которой уже будет учитываться угловая скорость вращения диска. Предположим, что лезвие успело повернуться на малый угол ϕ. Теперь оно не параллельно прямой, значит будет опять серия ударов и можно применить метод отложенных связей. Находим угол выхода из этого "клина" и устремляем угол ϕ к нулю. Получим, что конек будет стоять на месте, но его лезвие совершит поворот на 180^o, после чего конек начнет двигаться по горизонтали в обратную сторону.

В завершение раздела приводится пример, когда происходит заклинивание в системе с односторонней неголономной связью.

Рассмотрим удар одностороннего конька о горизонтальную прямую, если в начальный момент времени $\dot{\varphi} = 0$, вектор скорости перпендикулярен лезвию, лезвие параллельно прямой, о которую будет

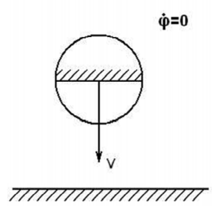


Рис. 12: Особый случай $\dot{\varphi} = 0$.

удар (см.рис 12).

Применим метод отложенных связей. Вектор скорости будет бесконечное число раз менять свое направление с вертикального вниз на вертикальное вверх и наоборот. Если говорить формально, то из-за отсутствия сходимости по скорости данный метод применять нельзя для решения этого случая. Однако, по положению есть сходимость к ситуации, при которой конек после удара двигаться не будет.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы:

Рассмотрены два подхода к исследованию движения механических систем с неголономными односторонними и условными связями: на основе уравнений с мерами, и на основе классической лагранжевой теории удара.

На системы с этими типами связей распространены известные положения теории систем с односторонними голономными связями: условия идеальности связей, приципⁿ Даламбера–Лагранжа, условия на скачке, теорема Аппеля, теоремы об изменении импульса и кинетического момента системы.

Метод Рауса исключения циклических координат распространен на системы с односторонними связями.

Для систем с неголономными односторонними связями доказано общее свойство безударного выхода на связь.

Рассмотрены примеры механических систем, иллюстрирующие выведенные утверждения.

Система с односторонними связями — плоское твердое тело с каналом при помощи метода Рауса сведена к системе с одной степенью свободы.

Система с условной связью — однородный диск на горизонтальной плоскости, движение которого ограничено абсолютно шероховатой прямой. При помощи метода Рауса система сведена к системе с одной степенью свободы. Показана возможность обратных движений после удара.

Исследован удар симметричного конька Чаплыгина о прямую. Получены периодические движения.

Изучено движение симметричного конька с односторонней неголономной связью. Оно раскладывается в композицию прямолинейных движений центра масс с равномерным вращением и движений по окружности. Проведено исследование удара симметричного одностороннего конька Чаплыгина о прямую. Для анализа случая кратного удара предложен метод отложенных связей.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Березинская С. Н., Кугушев Е.И. Об уравнениях движения механических систем с условными односторонними связями. Препринт ИПМ РАН им. М.В.Келдыша, 2002, N 16, с. 32.

2. О.В. Сорокина, С.Н. Березинская, В.В. Белецкий, Е.И. Кугушев О периодических движениях динамических биллиардов. Препринт ИПМ РАН им. М.В.Келдыша, 2003, N 14, с. 32.

3. С.Н. Березинская, О.В. Сорокина, Е.И. Кугушев Об односторонних неголономных связях. Препринт ИПМ РАН им. М.В.Келдыша, 2003, N 16, с. 20.

4. Березинская С.Н. О механических системах с односторонними неголономными связями.// Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике. Август 2004, Великие Луки, Тезисы докладов, М., ВЦ РАН 2004, с. 45-46.

5. Березинская С.Н. Несколько задач на системы с односторонними неголономными связями. // Сборник трудов конференции-конкурса молодых ученых, Москва, 12.10-14.10.2004г., под ред. Г.Г. Черного и В.А. Самсонова, М., МГУ, 2004 г. с. 63-71.

6. Березинская С.Н., Кугушев Е.И., Сорокина О.В. О движении механических систем с односторонними связями. // Вестн. Моск. ун-та, сер.1 мат.,мех., 2005, N3, 18-24с.

Подписано в печать г.
Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 1.0
Заказ Тираж 50 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета