Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.929, 517.927, 517.984

Лесных Андрей Александрович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИХ ИЗУЧЕНИИ

Специальность: 01.01.01 — Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А. А. Шкаликов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Власов Виктор Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор Филимонов Андрей Матвеевич.
Ведущая организация:	Институт проблем механики РАН.

Защита диссертации состоится 5 октября 2007 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ, Главное Здание, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "___" ______________ 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Т.П. Лукашенко.

1 Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений, а также изучению связанных с этими уравнениями дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях.

Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) изучаются достаточно давно. Отдельные результаты были получены еще около 200 лет назад. Активно эта теория начала развиваться в начале-середине 20 века во многом благодаря приложениям к теории автоматического управления. Наиболее полно состояние теории на тот момент времени представлено в известных статьях и монографиях А.Д.Мышкиса[1], Р.Беллмана, К.Кука[2], Дж.Хейла[3], Л.Э.Эльсгольца[4], Н.Н.Красовского[5].

Функционально-дифференциальные уравнения традиционно разбиваются на уравнения запаздывающего, нейтрального и опережающего типов. При этом большинство приложений ФДУ связаны с уравнениями запаздывающего и нейтрального типа, поэтому уравнения именно этих двух типов привлекают наибольшее внимание исследователей. Причем нейтральные уравнения исследованы значительно меньше запаздывающих уравнений, так как их изучение в определенном смысле сложнее.

Одним из важнейших вопросов, возникающих в теории ФДУ, является вопрос об асимптотическом поведении решений при неограниченном возрастании независимого параметра. Этот вопрос давно является объектом большого числа исследований. Классические результаты в этой области содержатся в упомянутых выше монографиях. В последнее время существенного продвижения в этой области удалось добиться В.В.Власову, С.А.Иванову и Д.А.Медведеву.

Помимо асимптотического поведения решений ФДУ в диссертации изучаются обыкновенные дифференциальные операторы со спектраль-

[1] Мышкис А.Д. "Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом"// М. Наука, 1972

[2] Беллман Р., Кук К. "Дифференциально-разностные уравнения"// М. Мир, 1967

[3] Хейл Дж. "Теория функционально-дифференциальных уравнений"// М. Мир, 1984

[4] Эльсгольц Э.Л. "Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом"// М. Наука, 1964

[5] Красовский Н.Н. "Некоторые задачи теории устойчивости движения"// М.:Физматгиз, 1959

ным параметром в граничных условиях, связанные с ФДУ. По-видимому, Н.Н.Красовский[6] впервые рассмотрел запаздывающее уравнение как полугруппу линейных операторов. Инфинитезимальный производящий оператор такой полугруппы представляет собой обыкновенный дифференциальный оператор с нестандартной областью определения. А.А.Шкаликовым было показано, что теория таких операторов тесно связана с теорией краевых задач для дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях, которая имеет давнюю историю и ведет начало от работ Дж.Д.Биркгоффа[7,8] и Я.Д.Тамаркина[9]. В диссертации мы более полно проследим эти связи.

Теория обыкновенных дифференциальных операторов имеет множество приложений и в других областях математики. Например, в теории управления эти операторы возникают при рассмотрении эволюционного уравнения, задающего динамику исследуемой системы. Здесь важную роль играют полугрупповые свойства, которые изучаются в настоящей диссертации.

Основные результаты в теории полугрупп линейных операторов были получены в середине 20 века и отражены в первом издании известной монографии E.Hille, R.S.Phillips[10]. В настоящее время эта теория продолжает активно развиваться благодаря большому числу приложений в уравнениях с частными производными, интегро-дифференциальных уравнениях, стохастических процессах, квантовой механике и др. В настоящей диссертации рассмотрены приложения полученных результатов к задачам теории управления.

Таким образом, тема диссертации представляется вполне актуальной как с теоретической точки зрения, так и для приложений.

Цель работы.

Исследование асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений и изучение полугрупповых свойств связанных с ними обыкновенных дифференциальных операторов.

---

[6] Красовский Н.Н. "Некоторые задачи теории устойчивости движения"// М.:Физматгиз, 1959

[7] Birkhoff G.D. "On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing parameter"// Trans. Amer. Math. Soc., 1908, v.9, p.219–231

[8] Birkhoff G.D. "Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations"// Trans. Amer. Math. Soc., 1908, v.9, p.373–395

[9] Тамаркин Я.Д. "О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды"// Петроград, 1917

[10] E. Hille, R.S. Phillips "Semigroups and Functional Analysis"// AMS, 1957

Научная новизна.

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены точные оценки решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами. Оценки получены новым методом, позволившим существенно ослабить условия на коэффициенты уравнений.

2. Получены новые результаты о поведении решений запаздывающих уравнений с переменными коэффициентами.

3. Определен класс полурегулярных краевых задач и доказана теорема о том, что полурегулярность является необходимым и достаточным условием для того, чтобы специальный линеаризатор (построенный ранее Шкаликовым А.А.) генерировал C_0-полугруппу.

Методы исследования.

В работе использованы методы теории функционально-дифференциальных уравнений, теории целых функций, спектральной теории операторов и теории полугрупп.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть полезны в исследованиях по теории функционально-дифференциальных уравнений, спектральной теории операторов и теории автоматического управления.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на конференциях “Крымская осенняя математическая школа”, Севастополь, 2005; “Крымская осенняя математическая школа”, Севастополь, 2006; “Современные методы теории функций и смежные проблемы”, Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2007; “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная 106-летию со дня рождения И.Г.Петровского, Москва, 2007; на семинарах “Несамосопряженные операторы” под руководством профессоров А.Г.Костюченко и А.А.Шкаликова в 2006 г. в МГУ им. М.В.Ломоносова; “Операторные модели” под руководством профессора А.А.Шкаликова, доц.

И.А.Шейпака, доц. А.М.Савчука и асс. А.А.Владимирова в 2005–2007 гг. в МГУ им. М.В.Ломоносова; “Спектральный анализ дифференциальных и разностных операторов” под руководством профессоров А.Г.Костюченко, В.В.Власова и К.А.Мирзоева в 2007 г. в МГУ им. М.В.Ломоносова; “Некоторые задачи механики сплошных сред” под руководством профессоров С.В.Нестерова и Л.Д.Акуленко в ИПМ РАН в 2007 г.; “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” под руководством профессора А.Д.Мышкиса в Московском Государственном Университете путей сообщения в 2007 г.

Публикации.

Результаты работы изложены в 5 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Публикаций, сделанных в соавторстве, нет.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка используемой литературы. Общий объем диссертации – 85 страниц. Список литературы содержит 80 наименований. Нумерация теорем и лемм в автореферате совпадает с нумерацией в диссертации.

2 Краткое содержание диссертации.

В первой главе изучается дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа общего вида, в котором сдвиги по времени и коэффициенты задаются функциями ограниченной вариации а на коэффициенты наложены минимальные ограничения, гарантирующие лишь корректную разрешимость начальной задачи. Для решений соответствующей начальной задачи получена точная оценка в пространстве Соболева W_2^m. Для этого используется хорошо известный операционный подход, основанный на представлении решения начальной задачи в виде преобразования Лапласа. При таком подходе ключевую роль играют вопросы о распределении нулей характеристического определителя[2] и его оценки на контурах интегрирования. В случае, когда $\Delta(\lambda)$ есть квазиполином вида $g(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} p_j \lambda^{m_j} e^{\beta_j \lambda}$, где p_j, m_j, β_j – некоторые числа, эти вопросы достаточно хорошо изучены (см., например, монографии и работы Левина Б.Я.[11], Понтрягина Л.С.[12], Садовничего В.А.,

[11]Левин Б.Я. "Распределение корней целых функций"// М. Гостехиздат, 1956

[12]Понтрягин Л.С. "О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций"// Изв. АН СССР,

Любишкина В.А., Белабасси Ю.[13]). Характеристический определитель, который получается для изучаемого уравнения, имеет более общий вид, для которого развитая ранее техника не применима. В диссертации предлагается новый подход для получения оценок таких функций, основанный на технике двух работ Шкаликова А.А.[14,15]. Результаты и методы этой главы могут быть без существенных изменений перенесены на случай векторных уравнений.

Сначала рассматривается начальная задача для однородного уравнения.

$$\sum_{j=0}^{m} \int_0^h u^{(j)}(t-\theta)\, d\sigma_j(\theta) = 0, \quad t > h \tag{1}$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h], \tag{2}$$

где функции $\sigma_j(\theta) \in BV[0,h]$. Характеристический определитель уравнения (1) задается формулой

$$\Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \lambda^j \int_0^h e^{-\lambda\theta}\, d\sigma_j(\theta).$$

Характер распределения нулей функции $\Delta(\lambda)$ описывается следующей теоремой.

Теорема 1.1 *Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда все нули $\Delta(\lambda)$ лежат в некоторой левой полуплоскости $\{Re\,\lambda \leq C\}$, и поэтому существует число $\varkappa = \sup\{Re\,\lambda : \Delta(\lambda) = 0\} < \infty$. Кроме того, число нулей $n_\Delta(P(a,b,h))$ определителя $\Delta(\lambda)$, лежащих в прямоугольнике $P(a,b,h) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re\,\lambda \in (a,\varkappa),\ \mathrm{Im}\,\lambda \in (b, b+h)\}$, ограничено постоянной, не зависящей от $b \in \mathbb{R}$, и существует предел*

$$q = \lim_{a \to \varkappa} \lim_{h \to 0} \max_{b \in \mathbb{R}} n_\Delta(P(a,b,h)).$$

Число q, определенное в теореме 1.1, имеет простой смысл. Например, если имеется только один корень функции $\Delta(\lambda)$ с действительной частью

Сер. Матем., 1942, т.6, 3, с.115-134

[13]Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белабасси Ю. "О нулях целых функций одного класса"// Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1982, вып.8, с.211-217

[14]Шкаликов А.А. "Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций"// Мат. сб., 1984, т.123, N3, 317-347

[15] Шкаликов А.А. "Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях"// Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1983, вып.9, с.190-229

равной $\varkappa$, а все остальные корни лежат в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda \le \varkappa - \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, то число q равно кратности этого корня.

Основной результат первой главы представляет следующая теорема.

Теорема 1.2 *Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \ne 0$. Тогда при достаточно больших $T > 0$ для решения $u(t)$ задачи (1), (2) имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^m(T,T+h)} \le CT^{q-1}e^{\varkappa T}\|u_0\|_{W_2^m(0,h)},$$

где числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1.1, а постоянная C не зависит от начальной функции $u_0(t)$.

В доказательстве этой теоремы используется операционный подход, а для обоснований ключевую роль играют следующие леммы.

Лемма 1.1 *Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \ne 0$. Тогда характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами.*

a) Для достаточно больших $Re\,\lambda$ имеется асимптотика

$$\Delta(\lambda) \asymp \lambda^m.$$

b) В любой полуплоскости $\{Re\,\lambda > C_1\}$ для характеристического определителя и его производных справедливы оценки

$$|\Delta^{(j)}(\lambda)| < C_2(|\lambda| + 1)^m, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

c) Для всех $\varepsilon \in (0, 1/2]$ в любой полуплоскости $\{Re\,\lambda > C_1\}$ вне ε-окрестности нулей $\Delta(\lambda)$ для достаточно больших λ справедлива оценка

$$|\Delta(\lambda)| > C_2|\lambda|^m,$$

где постоянная C_2 зависит только от ε и C_1.

Лемма 1.7 *Пусть функция $R(\lambda)$ аналитична в некоторой области, лежащей в некоторой вертикальной полосе $\{Re\,\lambda \in (C_1, C_2)\}$, за исключением полюсов, удовлетворяющих условиям леммы 1.6. Тогда ε-окрестность полюсов для достаточно малого числа ε представляется в виде объединения непересекающихся компонент G_k, в каждой из которых количество полюсов с учетом кратности есть $q_k + 1$. Причем $q_k + 1 \le q$ для некоторого числа q и всех k. Пусть $\lambda_k^0, \ldots, \lambda_k^{q_k}$ – полюса $R(\lambda)$, лежащие в G_k, и вне*

ε-окрестности этих полюсов для функции $R(\lambda)$ и ее производных выполняется оценка

$$\left|R^{(j)}(\lambda)\right| < C \quad j = 0, \dots, q-1.$$

Тогда при $T > 0$ справедливо представление

$$\int_{\partial G_k} e^{\lambda(T+x)} R(\lambda) \int_0^1 f(\xi) e^{-\lambda\xi}\, d\xi\, d\lambda = T^{q-1} e^{\varkappa T} c_k \varphi_k(x, T),$$

где $\varkappa = \sup_k \max_{j=0,\dots,q_k} Re\, \lambda_k^j$, последовательность чисел $\{c_k\}$ принадлежит пространству l_2, а система функций $\{\varphi_k(x,T)\}$ – бесселева по x в $L_2(0,1)$, т.е. для всех $T > 0$ и для любой функции $g(x) \in L_2(0,1)$ сходится ряд $\sum_k \left|(g(x), \varphi_k(x,T))\right|^2$, причем сходимость равномерна по $T > 0$.

Лемма 1.7 является аналогом леммы 3.3 из работы Шкаликова А.А.[15].

Используя теорему 1.2 нетрудно получить оценку решений начальной задачи для неоднородного уравнения

$$\sum_{j=0}^{m} \int_0^h u^{(j)}(t-\theta)\, d\sigma_j(\theta) = w(t), \quad t > h \tag{3}$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h]. \tag{4}$$

Теорема 1.3 *Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда для решения $u(t)$ задачи (3), (4) имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^m(T-h,T)} \leq C_1 T^{q-1} e^{\varkappa T} \|u_0\|_{W_2^m(0,h)} + C_2 \sqrt{T} \Big(\int_0^T (T - \tau + 1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)|^2\, d\tau \Big)^{1/2}, \tag{5}$$

где числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1.1, а постоянные C_1,C_2 не зависят от функций $u_0(t)$,$w(t)$.

Ранее, в работах Власова В.В., Иванова С.А. и Медведева Д.А.[16,17] оценки теорем 1.2, 1.3 и следствия 1.1 были получены для уравнений либо с конечным числом запаздываний, либо для случая, когда функция $\sigma_m(\theta)$ имеет скачок в обеих точках $\theta = 0$ и $\theta = h$. Для их получения использовались другие методы.

[16]Власов В.В., Иванов С.А. "О точных оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа"// ДАН, 2006, т.406, N5

[17]Vlasov V.V., Medvedev D.A. "On asymptotic behavior and estimates of solutions to neutral equations"// Functional differential equations, 2006, v.13, N2, 207-223

Во второй главе изучаются ФДУ с переменными коэффициентами. Такие уравнения изучены значительно меньше уравнений с постоянными коэффициентами. Ряд результатов можно найти упомянутых выше монографиях. Среди недавних работ отметим работы Власова В.В. [18,19], где изучаются уравнения с операторными коэффициентами и где могут быть найдены дальнейшие ссылки.

Рассматривается векторное дифференциально-разностное уравнение запаздывающего типа с переменными коэффициентами

$$u'(t+h) + \int_0^h a(\theta,t)u(t+\theta)\, d\sigma(\theta) = 0, \qquad t > h,$$

где $a(\theta,t)$ – матрица коэффициентов, а функция ограниченной вариации $\sigma(\theta)$ задает сдвиги по времени. Для изучения асимптотического поведения решений этого уравнения нам будет удобно ввести следующее понятие типа роста по аналогии с теорией целых функций.

Определение 2.1 *Пусть функция $f(t)$ определена на $\mathbb{R}^+$. Тогда типом роста $\varkappa$ функции $f(t)$ называется нижняя грань чисел A таких, что для некоторой постоянной C выполняется оценка*

$$\|f(t)\| \leq Ce^{At}, \qquad t \geq 0. \tag{6}$$

Тип роста $\varkappa$ называется точным типом роста, если существует такая постоянная C, что оценка (6) выполняется при $A = \varkappa$. Типом роста некоторого семейства функций называется верхняя грань типов роста всех функций этого семейства. Тип роста $\varkappa$ семейства функций называется точным типом роста этого семейства, если для каждой функции $f(t)$ из этого семейства найдется постоянная C такая, что оценка (6) выполняется при $A = \varkappa$.

Результаты и методы второй главы диссертации наиболее близки к результатам и методам работ Bellman R., Cook K.L.[20], Banks H.T.[21],

[18] Vlasov V.V. "Spectral problems arising in the theory of differential equations with delay"// J. Math. Sci., 2004, v.124, N4

[19] Власов В.В. "О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве"// Мат. сб., 1995, т.186, N8, 67-92

[20] Bellman R., Cook K.L. "Stability theory and adjoint operators for linear differential-difference equations"// Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v.92, 470-500

[21] Banks H.T. "The representation of solutions of linear functional differential equations"// J. Diff. Eq., 1969, v.5, 399-410

Hale J.K., Meyer K.R.[22]. В частности, обобщается ряд результатов Bellman R., Cook K.L.[20], полученных для уравнения с конечным числом запаздываний, на случай уравнения, запаздывания в котором задаются функцией ограниченной вариации.

Для доказательства основных результатов второй главы уравнение (2) представляется в возмущенном виде

$$a(\theta,t)=\alpha(\theta,t)+\delta(\theta,t),$$

где $\delta(\theta,t)$ – возмущение, и наряду с уравнением (2) рассматривается невозмущенное уравнение

$$u'(t+h)+\int_0^h \alpha(\theta,t)u(t+\theta)\,d\sigma(\theta)=0,\qquad t>h. \tag{7}$$

Следующая теорема показывает, что тип роста решений меняется непрерывно при непрерывном изменении коэффициентов уравнения.

Теорема 2.1 *Пусть матрица коэффициентов $\alpha(\theta,t)\equiv\alpha(\theta)$ не зависит от t, $\varkappa$ – тип роста решений невозмущенного уравнения* (7)*. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число δ_0 такое, что если при больших t выполнена оценка $\|\delta(\theta,t)\|<\delta_0$, то тип роста решений возмущенного уравнения* (2) *не превосходит $\varkappa+\varepsilon$.*

На основании этой теоремы получено следующее утверждение о типе роста при асимптотически постоянных коэффициентах.

Следствие 2.1 *Пусть $\alpha(\theta,t)=\alpha(\theta)$ не зависит от t, $\varkappa$ – тип роста решений невозмущенного уравнения* (7)*, $\|\delta(\theta,t)\|<\varphi(t)$, $\varphi(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда тип роста решений возмущенного уравнения* (2) *не превосходит типа роста решений невозмущенного уравнения* (7)*.*

Известно что тип роста решений для уравнений с постоянными коэффициентами равен $\sup\{\mathrm{Re}\, s:\Delta(s)=0\}$. Поэтому из этого следствия немедленно получаем, что для уравнений с асимптотически постоянными коэффициентами тип роста решений тоже равен этой величине. Для уравнений с конечным числом запаздываний этот результат ранее другим более трудным способом был получен Wright E.M.[23,24].

---

[22] Hale J.K., Meyer K.R. "A class of functional equations of neutral type"// Mem. Amer. Math. Soc., 1967, N76

[23] Wright E.M. "The linear difference-differential equation with asymptotically constant coefficients"// Amer. J. Math., 1948, v.70, 221-238

[24] Wright E.M. "Perturbed functional equations"// Quart. J. Math., 1949, v.20, 155-165

При дополнительных условиях на скорость убывания возмущения $\delta(\theta, t)$, получена более точная экспоненциальная оценка.

Теорема 2.2 *Пусть* $\alpha(\theta, t) = \alpha(\theta)$ *не зависит от* t, $\varkappa$ *– тип роста решений невозмущенного уравнения* (7), $\|\delta(\theta, t)\| < \varphi(t)$ *и* $\varphi(t) < 1/t^{\beta}$. *Тогда для любого решения* $u(t)$ *уравнения* (2) *и для любого* $\varepsilon > 0$ *имеется оценка*

$$\|u(t)\| < c_1 \exp\left((\varkappa + \varepsilon)t + c_2 t^{1-\beta)}\right), \qquad \text{при } \beta \neq 1,$$

или

$$\|u(t)\| < c_1 \exp\left((\varkappa + \varepsilon)t + c_2 \ln t\right), \qquad \text{при } \beta = 1.$$

Если $\varkappa$ *– точный тип роста решений уравнения* (7), *то оценки справедливы при* $\varepsilon = 0$.

Следующие результаты показывают невозрастание типа роста при возмущениях из $L_1(0, +\infty)$.

Теорема 2.3 *Пусть* $\alpha(\theta, t) = \alpha(\theta)$ *не зависит от* t, $\varkappa$ *– тип роста решений невозмущенного уравнения* (7), $\|\delta(\theta, t)\| < \varphi(t)$ *и* $\varphi(t) \in L_1(0, +\infty)$. *Тогда тип роста решений уравнения* (2) *не превосходит* $\varkappa$.

Теорема 2.4 *Пусть* $\alpha(\theta, t) = \alpha(t)$ *не зависит от* t, $\varkappa$ *– точный тип роста решений невозмущенного уравнения* (7), $\|\delta(\theta, t)\| < \varphi(t)$ *и* $\varphi(t) \in L_1(0, +\infty)$. *Тогда точный тип роста решений уравнения* (2) *не превосходит* $\varkappa$.

Если все решения уравнения (7) ограничены, то либо тип роста решений этого уравнения меньше нуля, либо точный тип роста равен нулю. В первом случае на основании теоремы 2.3 получаем, что тип роста решений уравнения (2) меньше нуля. А во втором случае на основании теоремы 2.4 получаем, что точный тип роста решений уравнения (2) равен нулю. В обоих случаях все решения уравнения (2) ограничены. Этот результат для уравнений с конечным числом запаздываний был получен Bellman R., Cook K.L.[20].

В третьей главе изучаются полугрупповые свойства дифференциальных операторов связанных с ФДУ. Рассмотрим начальную задачу для простейшего ФДУ

$$\begin{aligned}
&a_0 u'(t) + a_1 u'(t-h) + b_0 u(t) + b_1 u(t-h) = 0, \quad t > 0,\\
&u(t) = u_0(t), \quad t \in [-h, 0],
\end{aligned}$$

где $a_0 \neq 0$, и введем в пространстве $W_2^1(-h, 0)$ семейство операторов U_t сдвигов вдоль решений

$$(U_t u_0)(s) = u(t+s), \quad t \geq 0, \quad s \in [-h, 0].$$

Тогда это семейство является C_0-полугруппой, генератор A которой имеет вид

$$Ay = y',$$
$$D(A) = \big\{y \in W_2^2(-h,0),\ a_0u'(0) + a_1u'(-h) + b_0u(0) + b_1u(-h) = 0\big\}.$$

Спектральную задачу $Ay = \lambda y$ можно записать в виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром в граничном условии

$$y' - \lambda y = 0,$$
$$(a_0\lambda + b_0)y(0) + (a_1\lambda + b_1)y(-h) = 0.$$

Эта краевая задача является частным случаем следующей краевой задачи с параметром в граничных условиях общего вида, которая изучается в диссертации,

$$l(y,\lambda) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)y = 0 \qquad (8)$$

$$U_j(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\lambda)y^{(k-1)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,\dots,n, \qquad (9)$$

где $p_s(x,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{s} p_{\nu s}(x)\lambda^\nu$, $p_{\nu s}(x) \in C^\infty[0,1]$, $p_{ss}(x) = \mathrm{const}, s = 1,\dots,n$, $p_{nn} \neq 0$, $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ – полиномы. Краевые условия (9) предполагаются нормированными в смысле определения Шкаликова А.А.[15], порядок j-го краевого условия равен $\varkappa_j$, а суммарный порядок краевых условий равен $\varkappa = \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_n$, причем $\varkappa \geq n$.

Задаче (8),(9) можно поставить в соответствие оператор, линеаризующий эту задачу. Конечно, существует много способов такой линеаризации. Но есть специальный линеаризатор этой задачи, который мы будем обозначать $\mathcal{H}$, построенный Шкаликовым А.А.[15], который играет особую роль. В третьей главе диссертации мы убеждаемся в этом еще раз. Мы получаем необходимое и достаточное условие для того, чтобы этот оператор являлся генератором C_0-полугруппы. В предыдущих работах (см., например, работы Grabowski P.[25], Morgul O., Rao B.P., Conrad F.[26]) были получены лишь достаточные условия в некоторых частных случаях. Данная глава обобщает эти результаты и содержит приложения к задачам теории управления.

[25] Grabowski P. "Well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems using Shkalikov's theory"// Opuscula Mathematica, 2006, v.26, N1, 45-97

[26] Morgul O., Rao B.P., Conrad F. "On the stabilization of a cable with a tip mass"// IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, v.39, N10, 2140-2145

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\omega^n + p_{11}\omega^{n-1} + \cdots + p_{n-1,n-1}\omega + p_{nn} = 0$$

и обозначим через $\omega_1, \ldots, \omega_n$ его корни, которые предполагаются простыми и вещественными. Введем числа

$$\mu_{J_k} = \sum_{\alpha \in J_k} \omega_\alpha,$$

где $J_k, k = 1, \ldots, n$ – произвольное k-элементное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, $\mu_{J_0} = 0$, и характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix}.$$

Тогда характеристический определитель имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa} \sum_{J_k} [F^{J_k}] e^{\lambda \mu_{J_k}},$$

где $\varkappa$ – суммарный порядок краевых условий (9), и использовано обозначение $[\eta] = \eta_0 + O(\lambda^{-1})$.

Пусть отрезок $M = [M_0, M_1]$ есть выпуклая оболочка всех точек μ_{J_k}.

Определение 3.1 *Краевая задача* (8), (9) *называется регулярной в правой (левой) полуплоскости, если* $F_0^{M_1} \neq 0$ *(*$F_0^{M_0} \neq 0$*); регулярной – если она регулярна и в правой, и в левой полуплоскостях; полурегулярной – если она регулярна либо в правой, либо в левой полуплоскости, но не регулярна.*

Такое определение регулярности согласуется с определением Шкаликова А.А.[15] и уточняет определение Тамаркина Я.Д.[9]. Основной результат третьей главы содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1 *Оператор* $\mathcal{H}$ *является генератором* C_0*-полугруппы в том и только том случае, когда задача* (8), (9) *регулярна в правой полуплоскости.*

В качестве приложений полученных результатов в третьей главе рассмотрены следующие задачи.

Рассмотрена задача о стабилизации троса к массой на конце[25,26], которая сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned} &u''(x) = \lambda^2 u(x), \\ &(m\lambda^2 + b\lambda)u(1) + (1 + a\lambda)u'(1) = 0, \\ &u(0) = 0. \end{aligned}$$

Линеаризатор Шкаликова $\mathcal{H}$, соответствующий этой задаче, определен в пространстве

$$\mathcal{W}^0_{2,U} = \Big\{(u, v, w) \in W^1_2 \oplus W^0_2 \oplus \mathbb{C}: \ u(0) = 0\Big\},$$

имеет область определения

$$D(\mathcal{H}) = \Big\{(u, v, w) \in W^2_2 \oplus W^1_2 \oplus \mathbb{C}: \ u(0) = v(0) = 0, \ w = au'(1) + mv(1)\Big\}$$

и действует по правилу

$$\mathcal{H}(u, v, w) = \big(v, u'', -u'(1) - bv(1)\big).$$

Grabowski P.[25] показал, опираясь на результаты работы Шкаликова А.А.[15], что для того, чтобы оператор $\mathcal{H}$ являлся генератором C_0-полугруппы, достаточно, чтобы выполнялось условие $m + a \neq 0$. Также для некоторых значений параметров было показано, что оператор $\mathcal{H}$ не является генератором C_0-полугруппы. С помощью теоремы 3.1 в третьей главе настоящей диссертации показано, что условие $m + a \neq 0$ является как достаточным, так и необходимым для того, чтобы оператор $\mathcal{H}$ являлся генератором C_0-полугруппы. Из той же теоремы 3.1 следует, что для того, чтобы оператор $\mathcal{H}$ являлся генератором C_0-группы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(m + a)(m - a) \neq 0$.

Другой пример – известная задача Редже (см. работы Regge T.[27] и Шкаликова А.А.[28])

$$\begin{aligned}
&-y'' + \lambda^2 y + q(x)y = 0,\\
&y'(1) + \lambda y(1) = 0,\\
&y(0) = 0.
\end{aligned}$$

Известно[28], что эта задача всегда нерегулярна. Более того, при $q(x) \equiv 0$ у этой задачи нет собственных функций. Тем не менее, как показано в настоящей диссертации, она регулярна справа при любом потенциале $q(x)$, а ее линеаризатор есть генератор C_0-полугруппы.

Автор искренне благодарен своему научному руководителю профессору А.А.Шкаликову за постановку задач, за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения.

[27] Regge T. "Analytic properties of the scattering matrix"// Nuovo Cimento (10), 1958, v.8, 671-679

[28] Shkalikov A.A. "Spectral analysis of the Regge Problem"// Russ. J. Math. Phys., 2001, v.8, N3, 356-364

Работы автора по теме диссертации.

[1] Лесных А.А. *Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Мат. заметки, 2007, т.81, вып.4, с.569–585

[2] Лесных А.А. *Полурегулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Воронежской зимней математической школы, 2007, с.128–129

[3] Лесных А.А. *Многоточечные полурегулярные краевые задачи* // "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", тезисы конференции, посвященной 106-летию И.Г.Петровского, Москва, 2007, с.174–175

[4] Лесных А.А. *Оценки решений запаздывающих уравнений с переменными коэффициентами* // Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т.12, вып.5, с.83–93

[5] Лесных А.А. *Оценки решений неоднородных нейтральных уравнений* // Спектральные и эволюционные задачи, Симферополь, 2006, т.17, с.50–55