МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.98

Табалдыев Сейтек Болотбекович

Гомологические свойства некоторых функциональных, групповых и операторных алгебр

(01.01.01 — математический анализ)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор А. Я. Хелемский; доктор физико-математических наук, профессор Ю. В. Селиванов.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. А. Артамонов; кандидат физико-математических наук, доцент А. Ю. Пирковский.
Ведущая организация:	Казанский государственный университет

Защита диссертации состоится 5 октября 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 сентября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Т. П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предмет диссертации относится к топологической гомологии — области функционального анализа, изучающей банаховы и локально выпуклые топологические алгебры и их непрерывные представления (банаховы и топологические модули) с использованием методов гомологической алгебры. Появление топологической гомологии было стимулировано её “внегомологическими” приложениями. Например, необходимость изучения расширений банаховых алгебр была замечена ещё в 1954 году Н. Данфордом при исследовании спектральных операторов[1]. В 1962 году Г. Камовиц[2], используя банахов аналог комплекса Хохшильда, определил группы когомологий $\mathcal{H}^n(A, X)$, $n = 0, 1, \ldots$ банаховой алгебры A с коэффициентами в банаховом A-бимодуле X и, в частности, установил биекцию между множеством классов эквивалентности сингулярных расширений A с помощью X и элементами $\mathcal{H}^2(A, X)$. Впоследствии группы когомологий банаховых алгебр применялись к задачам, связанным с дифференцированиями, расширениями и возмущениями банаховых алгебр[3], с аменабельными локально компактными группами[4].

В 1970 году А. Я. Хелемским[5] был предложен способ перенести понятия производных функторов и резольвент на случай банаховых алгебр и модулей. Оказалось, что это возможно осуществить при помощи специального относительного варианта гомологической алгебры, в основе которого лежит понятие относительно проективного банахова модуля. Как и в теории ассоциативных алгебр этот подход предоставил возможность подойти к изучению когомологий банаховых алгебр с более общей точки зрения и, кроме того, открыл новые полезные объекты для изучения. С этого времени общие гомологические методы стали активно применяться в различных задачах теории банаховых алгебр. Они дали возможность получить информацию о существовании аналитической структуры в спектре коммутативной банаховой алгебры[6], получить гомологические критерии для топологических свойств, таких как паракомпактность[7] и

[1] Dunford N. Spectral operators. *Pacific J. Math.* **4** (1954), 321–354.

[2] Kamowitz H. Cohomology groups of commutative Banach algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), 352–372.

[3] Raeburn I., Taylor J. L. Hochschild cohomology and perturbations of Banach algebras. *J. Funct. Anal.* **25** (1977), 258–266.

[4] Johnson B. E. Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.* **127** (1972).

[5] Хелемский А. Я. О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами. *Матем. сб.* **81 (123)** (1970), 430–444.

[6] Пугач Л. И. Проективные и плоские идеалы функциональных алгебр, их связь с аналитической структурой. *Матем. заметки* **31** (1982), вып. 2, 223–229.

[7] Хелемский А. Я. Описание относительно проективных идеалов в алгебрах $C(\Omega)$. *ДАН СССР* **195** (1970), 1286–1289.

метризуемость, доказать сильные теоремы о структурных свойствах алгебр фон Ноймана и других самосопряженных[8] и несамосопряжённых операторных алгебр.

Один из естественных вопросов гомологической теории банаховых операторных алгебр, рассматриваемый в данной диссертации, — когда такие алгебры пространственно проективны? Напомним, что операторная алгебра A на банаховом пространстве E называется *пространственно проективной*, если левый банахов A-модуль E с естественным внешним умножением $a \cdot x = a(x)$ для всех $a \in A$ и $x \in E$ проективен. Одно необременительное достаточное условие пространственной проективности операторной алгебры — наличие по крайней мере одного столбца одномерных операторов в унитализации этой алгебры — принадлежит Ю. О. Головину. Напомним, что *столбцом одномерных операторов* называется множество операторов вида $f(\cdot)x$, где f — фиксированный ненулевой непрерывный линейный функционал на банаховом пространстве E, а x пробегает всё пространство E. Для важного класса несамосопряжённых операторных алгебр — для CSL-алгебр, в частности для гнездовых алгебр на гильбертовом пространстве, Головин[9] доказал необходимость этого условия в случае, когда алгебра неразложима. Для неразложимых пространственно проективных C^*-алгебр наличие столбца одномерных операторов следует из описания всех проективных гильбертовых модулей над C^*-алгебрами, данного А. Я. Хелемским[10].

Тем не менее долгое время не было известно примеров пространственно проективных рефлексивных и/или полупростых неразложимых операторных алгебр на гильбертовом пространстве, которые не содержат столбца одномерных операторов. Пример такой алгебры (так называемая алгебра Соболева) представлен в данной диссертации, причём эта алгебра оказывается одновременно и полупростой, и рефлексивной. Также в диссертации изучены некоторые общие свойства неразложимых операторных алгебр, связанные с пространственной проективностью.

Следующая задача, рассмотренная в диссертации, связана с явлением аменабельности, возникшем в теории локально компактных топологических групп и затем обобщённым при помощи гомологической теории банаховых алгебр. В 1972 году Б. Е. Джонсон ввёл понятие аменабельной банаховой алгебры. Это название оправдано благодаря теореме Джонсона и Рингроуза: групповая алгебра $L^1(G)$ аменабельна тогда и только

[8] Хелемский А. Я. Гомологическая сущность аменабельности по Конну: инъективность предуального бимодуля. *Матем. сб.* **180** (1989), 1680–1690.

[9] Головин Ю. О. Критерий пространственной проективности неразложимой операторной CSL-алгебры. *Успехи матем. наук* **49** (1994), вып. 4, 161–162.

[10] Helemskii A. Ya. Projective homological classification of C^*-algebras. *Comm. in algebra* **26** (1998), № 3, 977–996.

тогда, когда группа G аменабельна.

Многие авторы исследовали аменабельность так называемых дуальных банаховых алгебр. Самые известные примеры дуальных банаховых алгебр — это произвольная алгебра фон Нойманна и алгебра мер $M(G)$ на любой локально компактной группе G. Для них предпочтительнее использовать более мягкое понятие аменабельности — так называемую *аменабельность по Конну*, учитывающее их дуальность как бимодулей над собой.

Для аменабельности по Конну алгебр фон Нойманна известен критерий на языке гомологии банаховых алгебр. А именно, А. Я. Хелемским[8] доказано, что алгебра фон Нойманна A аменабельна по Конну тогда и только тогда, когда предуальный бимодуль A_* инъективен. Однако продолжительное время не было известно, верен ли подобный критерий для других дуальных банаховых алгебр (задача 24[11]).

В диссертации показано, что отмеченный выше критерий Хелемского аменабельности по Конну алгебр фон Нойманна не переносится на алгебры мер $M(G)$. Более того, доказано, что для любой бесконечной дискретной группы G, например, уже для $G = \mathbf{Z}$, предуальный бимодуль $c_0(G)$ алгебры мер $M(G)$ (в случае дискретной группы $M(G) = l^1(G)$) не инъективен, хотя сама алгебра $M(G)$ заведомо аменабельна по Конну в случае аменабельной группы G.

Значительная часть диссертации посвящена вычислению и оценке основных гомологических характеристик коммутативных банаховых алгебр — глобальной размерности и биразмерности. При этом особое внимание уделено классу алгебр $C(\Omega)$ (непрерывных функций на компактах Ω).

Вопрос о вычислении гомологических размерностей алгебр $C(\Omega)$, несмотря на кажущуюся простоту, оказался весьма трудным. Даже для случая, когда $\Omega = [0, 1]$, значения глобальной размерности и биразмерности алгебры $C(\Omega)$ до сих пор неизвестны. Основной причиной затруднений, возникающих здесь, является сложное строение проективных тензорных произведений алгебр $C(\Omega)$ (так называемых алгебр Варопулоса).

Согласно известной *теореме о глобальной размерности* А. Я. Хелемского[12], любая коммутативная банахова алгебра A с бесконечным спектром имеет глобальную размерность $\operatorname{dg} A$ строго большую единицы (эта теорема не имеет аналогов ни для ассоциативных алгебр, ни для локально выпуклых алгебр). В то же время для целого ряда коммутативных банаховых алгебр, например, для $A = c_0$, ℓ_1 или $L^1(\mathbf{T})$, выпол-

[11] Runde V. *Lectures on amenability.* Lecture Notes in Mathematics, **1774**, Springer Verlag, Berlin, 2002.

[12] Хелемский А. Я. Низшие значения, принимаемые глобальной гомологической размерностью функциональных банаховых алгебр. *Труды семинара им. И. Г. Петровского* **3** (1978), 223–242.

нено $\operatorname{dg} A = 2$. Более общо, если A бесконечномерна и представима в виде $A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, где A_0 – бипроективная функциональная (т. е. полупростая и коммутативная) банахова алгебра, а остальные слагаемые суть унитализации бипроективных функциональных банаховых алгебр, то $\operatorname{dg} A = 2$. До сих пор, однако, не было известно ни одного примера алгебры глобальной размерности 2, не принадлежащей указанному классу.

В диссертации построен новый класс примеров коммутативных банаховых алгебр с указанной гомологической характеристикой. Это алгебры $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на таком метризуемом компакте Ω, у которого производное множество некоторого конечного порядка пусто.

В диссертации также рассмотрен вопрос о поведении гомологических размерностей унитальных банаховых алгебр и банаховых модулей над ними под действием операции проективного тензорного произведения. Вопросы такого рода изучались ранее многими авторами. Оказалось, что во всех конкретных ситуациях, рассмотренных в этих работах, *гомологические характеристики тензорных произведений банаховых алгебр или модулей равны сумме соответствующих характеристик сомножителей.* Например, "формулы аддитивности" для гомологических размерностей банаховых алгебр в довольно большой общности были получены Ю. В. Селивановым[13]: *Если A — унитализация бипроективной коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром, а B — произвольная унитальная банахова алгебра, то* $\operatorname{dg} A \widehat{\otimes} B = \operatorname{dg} A + \operatorname{dg} B$ *и* $\operatorname{db} A \widehat{\otimes} B = \operatorname{db} A + \operatorname{db} B$.

Отметим, что в случае общих унитальных банаховых алгебр контрпримеров к этим равенствам не найдено. Также важно отметить, что подобные формулы аддитивности — специфическое свойство банаховых алгебр, не имеющее аналогов в чистой алгебре.

В данной диссертации формулы аддитивности для гомологических размерностей банаховых алгебр и модулей получены для нового класса коммутативных банаховых алгебр; а именно, для упомянутых выше алгебр $C(\Omega)$ на метризуемых компактах Ω, у которых производное множество некоторого конечного порядка пусто. А кроме того, эти формулы установлены также для соответствующих алгебр Варопулоса.

Алгебры $C(\Omega)$ естественно и полезно рассматривать в рамках гомологической теории строгих банаховых алгебр, т. е. таких алгебр, умножение которых, как билинейный оператор, допускает линеаризацию, непрерывную по отношению к слабой тензорной норме в $A \otimes A$. Строгие банаховы алгебры были введены в работе Н. Варопулоса[14] под именем инъ-

[13] Selivanov Yu. V. Homological dimensions of tensor products of Banach algebras. *Banach Algebras'97* (ed. E. Albrecht and M. Mathieu). Berlin, Walter de Gruyter, 1998, 441–459.

[14] Varopoulos N. Th. Some remarks on Q-algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **22** (1972), № 4, 1–11.

ективных алгебр. Гомологическая теория строгих алгебр была построена Е. Ш. Курмакаевой[15]. Прежде всего, для них неверна "теорема о глобальной размерности". Действительно, по теореме Курмакаевой для любого бесконечного метризуемого компакта Ω выполнены равенства $\mathrm{dg}_{\check{\otimes}}\, C(\Omega) = \mathrm{db}_{\check{\otimes}}\, C(\Omega) = 1$. Отсюда, в частности, следует, что строгие гомологические размерности в общем случае не аддитивны. (Символы $\mathrm{dg}_{\check{\otimes}}$ и $\mathrm{db}_{\check{\otimes}}$, соответственно, обозначают глобальную размерность и биразмерность для строгих алгебр.) В то же время вопрос о том, какие значения, кроме 0 и 1, принимают строгие гомологические размерности алгебр $C(\Omega)$ или других строгих функциональных алгебр до сих пор не был исследован. (Отметим, что в "стандартной" гомологической теории банаховых алгебр подобный вопрос до сих пор остается открытым[16].)

В настоящей работе дан полный ответ на этот вопрос. А именно, установлено, что у строгой глобальной размерности и у строгой биразмерности нет запрещенных значений в классе алгебр $C(\Omega)$.

Цель работы. Основная цель этой работы — исследование гомологических свойств некоторых "алгебр анализа": функциональных, групповых и операторных алгебр. Эти алгебры изучаются в рамках общей теории банаховых алгебр или в рамках теории так называемых строгих алгебр. Главные результаты группируются вокруг следующих тем:
— исследование свойств операторных алгебр, связанных с проективностью пространственного модуля;
— решение задачи об инъективности предуального бимодуля для алгебры мер на дискретной группе;
— вычисление гомологических характеристик алгебр непрерывных функций на компактах с определенными свойствами, а также тензорных произведений этих алгебр.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. На защиту выносятся следующие основные результаты автора:

1) Представлен пример (алгебра Соболева) неразложимой пространственно проективной рефлексивной и одновременно полупростой операторной алгебры на гильбертовом пространстве, которая не содержит столбца одномерных операторов. Получены общие результаты о связи неприводимости, пространственной проективности операторной алгебры, нетривиальности её коммутанта и возможным наличием в самой

---

[15] Курмакаева Е. Ш. Зависимость строгой гомологической размерности $C(\Omega)$ от топологии Ω. *Матем. заметки* **55** (1994), вып. 3, 76–83.

[16] Helemskii A. Ya. 31 problems of the homology of the algebras of analysis. *Linear and complex analysis, Problem Book 3. Part 1.* Lecture Notes in Math. **1573**. Springer, Berlin, 1994, 54–78.

алгебре или в её унитализации столбца одномерных операторов. Изучен вопрос о пространственной проективности алгебры Харди, а также вопрос о слабой аменабельности алгебры Соболева.

2) Доказана неинъективность предуального бимодуля для алгебр мер на бесконечных дискретных группах. Учитывая, что алгебра мер на аменабельной группе аменабельна по Конну, этот факт отрицательно решает известный вопрос об инъективности предуального бимодуля для таких алгебр[11].

3) Приведены новые примеры коммутативных полупростых банаховых алгебр глобальной гомологической размерности и гомологической биразмерности два.

4) Изучен вопрос о поведении гомологических характеристик унитальных банаховых алгебр под действием операции проективного тензорного произведения. Для нового класса банаховых алгебр доказаны формулы аддитивности для глобальной гомологической размерности и гомологической биразмерности банаховых алгебр.

5) Изучены свойства строгих гомологических характеристик строгих банаховых алгебр. Доказаны формулы аддитивности для строгой глобальной гомологической размерности и строгой гомологической биразмерности слабых тензорных произведений некоторых алгебр непрерывных функций. В качестве следствия установлено, что у этих характеристик нет запрещенных значений в классе алгебр $C(\Omega)$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы настоящей работы могут найти применение в гомологической теории банаховых алгебр, теории операторов и операторных алгебр, абстрактном гармоническом анализе.

Методы исследования. В диссертации используются методы линейного функционального анализа (теории банаховых пространств и алгебр), гармонического анализа, гомологической алгебры, теории множеств и топологии. Кроме того, применяются специфические методы гомологической теории банаховых алгебр (техника допустимых резольвент и “топологических” производных функторов, специальные резольвенты и “диагональные отображения” тензорных произведений банаховых пространств и модулей).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством профессора А. Я. Хелемского (неоднократно с 1996 по 2007 год), на семинаре механико-математического факультета КГУ под руководством профессора А. Н. Шерстнёва (Казань, 2007), а также на различных зарубежных семинарах — в Париже (университет Париж 6-7, Франция, 2003), в Реймсе (университет Реймса, Франция, 2003), в Сарагосе (университет Сарагосы, Испания, 2005).

Результаты диссертации докладывались также на Международных конференциях "C^*-алгебры и эллиптическая теория" (центр Банаха, Бедлево, Польша, 2004), "Банаховы алгебры 2005" (университет Бордо, Бордо, Франция, 2005), "Операторные алгебры и топология" (МГУ, Москва, 2007), на весенней школе по некоммутативной геометрии (центр Банаха, Варшава, Польша, 2005).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1–5], список которых приведён в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав (пронумерованных с 0 по 5) и списка литературы, содержащего 91 наименование. Глава 0 разделена на 4 параграфа. Общий объём диссертации — 83 страницы.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткий исторический обзор и объясняется происхождение задач, рассмотренных в диссертации. Там же описана структура и результаты диссертации, приведены определения пространственной проективности операторной алгебры, столбца одномерных операторов, аменабельных по Джонсону и по Конну банаховых алгебр, инъективного банахова бимодуля, а также определение строгой банаховой алгебры.

Глава 0 имеет вводный характер. В ней приведены основные определения, обозначения и предварительные сведения из теории множеств, общей топологии, теории банаховых пространств, банаховых и операторных алгебр и модулей над ними, приведены основные понятия гомологии для банаховых и строгих банаховых алгебр. В § 0.1 доказано небольшое техническое обобщение одной теоремы Серпинского из теории множеств, играющей решающую роль для доказательства основных теорем главы 5. Доказана вспомогательная лемма из общей топологии, используемая в главе 4.

В § 0.2 приведены различные сведения о модулях. Напомним, что морфизм левых банаховых A-модулей $\varphi : X \to Y$ называется *допустимым*, если его ядро и образ замкнуты и имеют банаховы дополнения в X и Y, соответственно. В частности, сюръективный морфизм φ допустим тогда и только тогда, когда он имеет правый обратный непрерывный линейный оператор $s : Y \to X$.

Левый банахов A-модуль P называется *проективным*, если каждый допустимый сюръективный морфизм левых A-модулей $\sigma : X \to P$ имеет правый обратный морфизм левых банаховых A-модулей. Это означает, что P — прямое слагаемое банахова A-модуля X. Проективные бимодули определяются аналогично. В этом же параграфе доказана вспомогательная лемма о бипроективных алгебрах, используемая в главе 3.

В § 0.3 приведены определения гомологических размерностей. Пусть A — унитальная банахова алгебра. *Проективной резольвентой* левого банахова A-модуля X называется комплекс левых банаховых A-модулей

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\varphi_1} P_1 \xrightarrow{\varphi_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0,$$

который точен и, сверх того, допустим (т. е. все морфизмы в нем являются допустимыми морфизмами); кроме того все A-модули P_n $(n \geqslant 0)$ проективны. *Длиной* такой резольвенты называется наименьшее n такое, что $P_i = 0$ при $i > n$, или ∞, если такого n не существует. Длина самой короткой проективной резольвенты A-модуля X называется его *гомологической размерностью*. Она обозначается ${}_A\mathrm{dh}\, X$. Определение гомологической размерности для банаховых A-бимодулей аналогично.

Верхняя грань гомологических размерностей всех унитальных левых банаховых A-модулей называется *глобальной размерностью* алгебры A. Гомологическая размерность A, как банахова A-бимодуля, называется *биразмерностью* или *когомологической размерностью* A. Последний термин связан с эквивалентным определением этого понятия, а именно, это — наименьшее n такое, что группы когомологий $\mathcal{H}^k(A, X)$, с коэффициентами во всех бимодулях X и для всех $k > n$, тривиальны. Глобальная размерность A обозначается через $\mathrm{dg}\, A$ или, более подробно, через $\mathrm{dg}_{\widehat{\otimes}}\, A$, а биразмерность через $\mathrm{db}\, A$ или через $\mathrm{db}_{\widehat{\otimes}}\, A$. Напомним, что для любой A выполнено неравенство $\mathrm{dg}\, A \leqslant \mathrm{db}\, A$.

В § 0.4 приведены определения строгих гомологических размерностей для строгих банаховых алгебр. Пусть A — строгая банахова алгебра. Напомним, что левый банахов A-модуль X называется *строгим*, если существует такой непрерывный линейный оператор $R : A \check{\otimes} X \to X$, что $R(a \otimes x) = a \cdot x$ для любых $a \in A$, $x \in X$. Понятия *проективного строгого модуля* и *строгой гомологической размерности* определяются аналогично обычным. Строгая гомологическая размерность строгого левого модуля X обозначается через ${}_A\mathrm{dh}_{\check{\otimes}}\, X$. Верхняя грань строгих гомологических размерностей всех унитальных строгих левых банаховых A-модулей называется *строгой глобальной размерностью* алгебры A и обозначается $\mathrm{dg}_{\check{\otimes}}\, A$.

Напомним, что левый A-модуль называется (алгебраически) *неприводимым*, если он не имеет ненулевых собственных подмодулей, и не является (одномерным) модулем с нулевым умножением. Верхняя грань строгих гомологических размерностей всех неприводимых строгих левых банаховых A-модулей называется *строгой малой глобальной размерностью* алгебры A и обозначается $\mathrm{ds}_{\breve{\otimes}}\, A$. (В случае, если A не имеет неприводимых строгих левых банаховых модулей, мы полагаем $\mathrm{ds}_{\breve{\otimes}}\, A = -\infty$). Гомологическая размерность алгебры A, рассмотренной как строгий банахов A-бимодуль, называется *строгой биразмерностью* или *строгой когомологической размерностью* A и обозначается $\mathrm{db}_{\breve{\otimes}}\, A$. Напомним, что для любой строгой банаховой алгебры A выполнены неравенства $\mathrm{ds}_{\breve{\otimes}}\, A \leqslant \mathrm{dg}_{\breve{\otimes}}\, A \leqslant \mathrm{db}_{\breve{\otimes}}\, A$.

Также в § 0.4 получены некоторые оценки для строгих гомологических размерностей слабых тензорных произведений строгих банаховых модулей и строгих банаховых алгебр, хорошо известные ранее для случая общих банаховых алгебр.

Глава 1 посвящена изучению пространственных модулей над операторными алгебрами. Главным результатом главы является построение примера равномерно замкнутой операторной алгебры A на гильбертовом пространстве, которая: а) неразложима, рефлексивна и полупроста, б) коммутативна, и потому не содержит столбца одномерных операторов, в) и тем не менее она пространственно проективна, т. е. проективным является само гильбертово пространство как естественный A-модуль. Этот пример есть так называемая *алгебра Соболева* (теоремы 3, 4 и 5). В предложении 12 отмечено, что алгебра Соболева не является слабо аменабельной.

Кроме того, в главе 1 доказаны некоторые общие утверждения о связи неприводимости, топологической неприводимости, пространственной проективности операторной алгебры, нетривиальности её коммутанта и возможным наличием в самой алгебре или в унитализации этой алгебры столбца одномерных операторов.

Пусть A — операторная алгебра на банаховом пространстве E. Предположим, что A или E имеет свойство аппроксимации. В предложении 6 доказано, что если алгебра A неприводима и пространственно проективна, то она содержит столбец одномерных операторов. Если же A топологически неприводима, полупроста и пространственно проективна, то, по предложению 10, она неприводима. В предложениях 9 и 11 доказано, что унитализация A^+ алгебры A содержит столбец одномерных операторов тогда и только тогда, когда A пространственно проективна и её коммутант скалярен.

Также в первой главе изучен вопрос о пространственной проективности алгебры Харди. Как хорошо известно, алгебра Харди $H^\infty(T)$, действующая на пространстве Харди $H^2(T)$ на единичной окружности T

поточечным (почти всюду) умножением, является полупростой, неразложимой и рефлексивной. Показано (предложение 13), что алгебра Харди $H^\infty(T)$ не является пространственно проективной.

В **главе 2** доказано (теорема 6), что предуальный бимодуль алгебры мер любой бесконечной дискретной группы не является инъективным, несмотря на то, что в случае аменабельной группы алгебра мер аменабельна по Конну. Таким образом, известный результат А. Я. Хелемского об эквивалентности аменабельности по Конну и инъективности предуального бимодуля для алгебр фон Ноймана не переносится на алгебры мер. Далее, в предложении 15 указана простая формула для виртуальной нормальной диагонали алгебры $M(G)$ для дискретной аменабельной группы G. Наконец, в предложении 16 приведен пример некоторого канонического бимодуля, который не является нормальным.

Главы 3–5 посвящены изучению гомологических свойств алгебр непрерывных функций на компактах и тензорных произведений этих алгебр. В **главе 3** построены новые примеры алгебр $C(\Omega)$ глобальной размерности и биразмерности 2.

Пусть Ω — топологическое пространство, а $\Omega^{(n+1)}$ — его $(n+1)$-е производное множество.

Теорема 8. *Пусть Ω — бесконечный метризуемый компакт, у которого $\Omega^{(n+1)} = \emptyset$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Тогда* $\operatorname{dg} C(\Omega) = \operatorname{db} C(\Omega) = 2$.

Компакты, удовлетворяющие условиям теоремы 8, допускают полное описание. В самом деле, по теореме Мазуркевича — Серпинского[17] каждый счётный компакт гомеоморфен некоторому отрезку трансфинитных чисел в порядковой топологии. Пусть ω_0 — первый счётный ординал, и пусть

$$\omega_0^{\omega_0} = \omega_0 + \omega_0^2 + \ldots + \omega_0^n + \ldots.$$

Очевидно, что отрезок $\Omega = [0, \omega_0^{\omega_0}]$ является наименьшим возможным счётным компактным топологическим пространством, таким что его производное множество $\Omega^{(n)}$ порядка n не пусто для каждого $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, мы можем написать эквивалентную формулировку теоремы 8:

Теорема 9. *Пусть $\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_0^{\omega_0}$. Тогда*

$$\operatorname{dg} C([0,\alpha]) = \operatorname{db} C([0,\alpha]) = 2.$$

В конце главы сформулированы некоторые нерешённые задачи.

Глава 4 посвящена вычислению гомологических размерностей тензорных произведений унитальных банаховых алгебр. Доказаны формулы

[17] Mazurkiewicz S., Sierpiński W. Contributions à la topologie des ensembles dénombrales. *Fund. Math.* **1** (1920), 17–27.

аддитивности для некоторых из них. Пусть Ω — такой же компакт, как в теореме 8. Как известно, любой такой компакт счётен. Согласно лемме 1 из § 0.1, в пространстве Ω всюду плотно множество всех его изолированных точек. Выберем произвольные точку $\omega \in \Omega'$ и последовательность попарно различных изолированных точек $s_n \in \Omega \setminus \Omega'$, сходящуюся к ω. Банахово пространство ℓ^∞ ограниченных последовательностей является левым банаховым $C(\Omega)$-модулем относительно внешнего умножения $a \cdot x = \{a(s_n)x_n\}$, где $a \in C(\Omega)$, $x = \{x_n\} \in \ell^\infty$.

Сначала доказана формула аддитивности для модулей:

Теорема 10. *Если B — произвольная унитальная банахова алгебра, а X — произвольный унитальный левый банахов B-модуль, то (с предыдущими обозначениями)*

$$ {}_{C(\Omega) \widehat{\otimes} B}\mathrm{dh}\, \ell^\infty \widehat{\otimes} X = {}_{C(\Omega)}\mathrm{dh}\, \ell^\infty + {}_{B}\mathrm{dh}\, X = 2 + {}_{B}\mathrm{dh}\, X. $$

Следующие две теоремы являются основными в главе.

Теорема 11. *Если B — произвольная унитальная банахова алгебра, то*

$$ \mathrm{dg}\, C(\Omega) \widehat{\otimes} B = \mathrm{dg}\, C(\Omega) + \mathrm{dg}\, B = 2 + \mathrm{dg}\, B. $$

Теорема 12. *Если B — произвольная унитальная банахова алгебра, то*

$$ \mathrm{db}\, C(\Omega) \widehat{\otimes} B = \mathrm{db}\, C(\Omega) + \mathrm{db}\, B = 2 + \mathrm{db}\, B. $$

Отметим два следствия основных теорем.

Следствие 10. *Пусть Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — метризуемые компакты, у каждого из которых некоторое производное множество конечного порядка пусто. Пусть $A = C(\Omega_1) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} C(\Omega_n)$ — проективное тензорное произведение банаховых алгебр $C(\Omega_i)$. Тогда $\mathrm{dg}\, A = \mathrm{db}\, A = 2m$, где m — число бесконечных пространств среди Ω_i.*

Следствие 11. *Пусть A — такая же банахова алгебра, как в следствии 10, и пусть B — произвольная унитальная банахова алгебра. Тогда $\mathrm{dg}\, A \widehat{\otimes} B = \mathrm{dg}\, A + \mathrm{dg}\, B$ и $\mathrm{db}\, A \widehat{\otimes} B = \mathrm{db}\, A + \mathrm{db}\, B$.*

В **главе 5** мы доказываем, что для каждого целого неотрицательного n и для $n = \infty$ существует такой компакт Ω, что строгая глобальная размерность и строгая биразмерность банаховой алгебры $C(\Omega)$ равны n.

Здесь получены “формулы аддитивности” для строгих гомологических размерностей:

Теорема 13. *Пусть K — дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geqslant \aleph_{2n}$. Пусть K_+ — его одноточечная компактификация, а M — метризуемый компакт. Тогда*

$$\operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(M \times K_+^n) = \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(M) + n \cdot \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(K_+) = \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(M) + 2n,$$

$$\operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(M \times K_+^n) = \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(M) + n \cdot \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(K_+) = \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(M) + 2n.$$

Кроме того, доказана формула аддитивности для строгой малой глобальной размерности:

Теорема 14. *Пусть K — дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geqslant \aleph_n$, и пусть K_+ — его одноточечная компактификация, а M — метризуемый компакт. Тогда*

$$\operatorname{ds}_{\check{\otimes}} C(M \times K_+^n) = \operatorname{ds}_{\check{\otimes}} C(M) + n \cdot \operatorname{ds}_{\check{\otimes}} C(K_+) = \operatorname{ds}_{\check{\otimes}} C(M) + n.$$

Также построен пример алгебры $C(\Omega)$ бесконечной строгой малой глобальной размерности:

Теорема 15. *Пусть K — дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geqslant \aleph_\omega$, и пусть K_+ — его одноточечная компактификация, а $K_+^{\aleph_0}$ — топологическая счётная степень K_+. Тогда в алгебре $C(K_+^{\aleph_0})$ имеется максимальный идеал бесконечной строгой гомологической размерности и, как следствие,*

$$\operatorname{ds}_{\check{\otimes}} C(K_+^{\aleph_0}) = \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(K_+^{\aleph_0}) = \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(K_+^{\aleph_0}) = \infty.$$

Основным результатом главы 5 является

Следствие 15. *Размерности $\operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(\Omega)$ и $\operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(\Omega)$ могут принимать все целые неотрицательные значения и значение бесконечность.*

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям профессору А. Я. Хелемскому и профессору Ю. В. Селиванову за постановку задач и полезные обсуждения.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Табалдыев С. Б. Неинъективность предуального бимодуля алгебры мер бесконечных дискретных групп. *Матем. заметки* **73** (2003), вып. 5, 735–742.

2. Табалдыев С. Б. Аддитивность гомологических размерностей для некоторого класса банаховых алгебр. *Функц. анал. и прил.* **40** (2006), вып. 3, 93–95.

3. Табалдыев С. Б. О строгих гомологических размерностях алгебр непрерывных функций. *Матем. заметки* **80** (2006), вып. 5, 757–769.

4. Tabaldyev S. B. The Sobolev algebra and indecomposable spatially projective operator algebras. *Topological Homology: Helemskii's Moscow seminar.* New York: Nova Science, 2000, 201–210.

5. Tabaldyev S. B. Some Banach algebras of global dimension two. *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), 927–932.