Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Механико - математический факультет.

На правах рукописи
УДК 517.956

Зубова Мария Николаевна

УСРЕДНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВАХ, ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ ВДОЛЬ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Москва, 2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико - математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико - математических наук, профессор Т. А. Шапошникова.

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук, профессор А.А. Злотник, кандидат физико - математических наук Г.А. Иосифьян.

Ведущая организация: Владимирский государственный педагогический университет.

Защита состоится "5"октября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д. 501.001.85 в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП - 2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико - математический факультет, аудитория 16 - 24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико - математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "5"сентября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико - математических наук,
профессор Т.П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Вариационные неравенства возникают в различных задачах физики, таких, как, например, задачи о полупроницаемых стенках, задачи фильтрации, задачи управления температурой. Вариационные неравенства для бигармонического оператора и оператора Лапласа с ограничениями типа неравенств соответствуют задачам о равновесии пластины или мембраны, расположенной над препятствием. При большом числе подмножеств, на которых заданы ограничения, области, в которых ставятся подобные задачи, имеют весьма сложную структуру. Сложная структура области не вносит дополнительных трудностей в доказательство теорем существования и единственности этих задач, однако нахождение этих решений как точными, так и приближенными методами не представляется возможным. Лишь привлекая различные физические соображения, иногда удается приближенно найти основные характеристики изучаемого процесса при помощи замены решений исходных задач решениями более простых приближенных задач. В одних случаях задачи с ограничениями типа неравенств на подмножествах заменяются решениями вариационных неравенств с ограничениями на всем пространстве или на поверхности, вдоль которой были расположены эти подмножества, в других - решениями краевых задач с "усредненными"граничными условиями или условиями сопряжения на некоторой поверхности.

Подобными задачами занимается теория усреднения, начало которой было положено в работах Пуассона, Максвелла, Релея. Как самостоятельная наука теория усреднения была развита в работах таких математиков, как О.А. Олейник, Н.С. Бахвалов, В.В. Жиков, В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов, Е. Де Джорджи, Ж. Лионс, Э. Санчес - Паленсия, Г. Дель Мазо , Л. Тартар и многие другие.

Основы теории вариационных неравенств были заложены в 60-х годах прошлого века в работах Ж.-Л. Лионса и Г. Стампаккьи[1], Г. Дель Мазо[2], Г. Фикеры[3], Е. Санчес - Паленсия[4]. Впервые задачи усреднения вариацион-

[1] Lions J.-L. and Stampaccia, G. Inèquations variationelles non coercives // C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 261, 1965, pp 25-27.

[2] G. Dal Maso, Trebeschi P. Г - limit of periodic obstacles // Acta Appl. Math. 2001. v. 65. p 207-215

[3] Fichera G. Problemi elastostatici con vincoli unilateri: il problema di Signorini con ambigue condizoni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lincei, ser. 8, vol. 7, pp 91-140.

[4] Sanchez - Palencia E. Bovalue problems in domain containing perforated walls // Nonlinear P.D.E. and their applications. Coll'ege de Frace Seminar, Vol. III (Research Notes in Mathematics, Vol. 70, pp. 309-32 Pittman, London, 1982).

ных неравенств с ограничениями, зависящими от параметра, были рассмотрены в работах Г. Дель Мазо[5], К. Пикар[6]. Так, например, в работах Г. Дель Мазо изучалась асимптотика решений задачи о минимизации функционала $\int \mid Du \mid^2 + g(x,u)dx$ на множестве функций с двусторонними ограничениями $\phi_n \leq u \leq \psi_n$, в случае, когда ограничения являются элементами некоторых функциональных последовательностей. В монографии К. Пикар были рассмотрена задача усреднения вариационного неравенства для бигармонического оператора с односторонними ограничениями на подмножествах, зависящих от малого параметра, периодически расположенных по всей области. Для этого использовалось понятие Г - сходимости, емкости множеств и техника интегральных представлений. В работе К. Пикар и Г. Аттач[7] изучено асимптотическое поведение решений вариационных неравенств для эллиптических операторов с односторонними ограничениями, составляющими сходящуюся в некотором пространстве последовательность и заданными на всей области. В зависимости от предельного поведения функций, задающих ограничения, были выделены несколько качественно различных типов предельных задач.

Асимптотическое поведение решений вариационных неравенств для операторов второго порядка с периодическими быстро меняющимися коэффициентами в случае, когда функции, задающие препятствие, являются элементами некоторых функциональных последовательностей или ограничения заданы на перфорированной части границы, изучались такими авторами, как Г.А. Иосифьян[8], Г.В. Сандраков[9], С.Е. Пастухова[10]. Проблема усреднения решений задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического оператора в области, перфорированной вдоль многообразий, была изучена в работах О.А. Олейник[11], Т.А. Шапошниковой[12].

В диссертации рассмотрена задача усреднения вариационных неравенств

[5]G. Dal Maso Asymptotic Behaviour of Minimum Problems with Bilateral Obstracles //Annali di Matematica Pura ed Applicata 1981, v. 129, N 1, p.327-366

[6]Colette Picard "Problème biharmonique avec obstacles variables", Thèse, Universitè Paris-Sud, 1984.

[7]H. Attouch - C. Picard Variational inequalities with varying obstacles: The general Form of the limit problem // J. of Functional Analysis 50, 1983, pp 329-386.

[8]Иосифьян Г.А. Об усреднении некоторых задач с быстро осциллирующими ограничениями // Труды семинара имени И.Г. Петровского вып 23, 2003.

[9]Сандраков Г.В. Осреднение вариационных неравенств для задач с препятствиями // Мат. сборник т 196, 2005г, № 4, с. 79 - 98.

[10]Пастухова С. Е. Об усреднении одного вариационного неравенства для упругого тела с периодически расположенными трещинами // Матем. сб., 2000, т. 191, в. 2, с. 149 - 164

[11]Олейник О.А., Шапошникова Т.А. Об усреднении бигармонического уравнения в области, преформированной вдоль многообразий малой размерности // Дифференциальные уравнения т 32, № 6, с. 830-842.

[12]T.A. Shaposhnikova On the averaging of the Dirichlet problem for a multiharmonic equation in regions perforated along a manifold with large codimention // Труды Москов. Матем. Общ. т 61, с. 139-195.

для бигармонического оператора и оператора Лапласа с ограничениями типа неравенств, заданными на подмножествах, которые расположены вдоль многообразий произвольной размерности. При этом диаметр подмножеств, на которых заданы ограничения и период, с которым эти подмножества расположены, зависят от малого параметра. В работе рассмотрены все возможные случаи качественно различного асимптотического поведения решений в зависимости от размерности многообразия, от периода струкутры и от диаметра подмножеств, на которых заданы ограничения.

Цель работы. Целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения решений вариационных неравенств для бигармонического оператора и оператора Лапласа с ограничениями типа неравенств, заданными на периодически расположенных вдоль некоторого многообразия подмножествах, когда диаметр подмножеств, на которых заданы ограничения, а также период, с которым расположены эти множества, стремятся к нулю.

Методы исследования. В работе используются методы теории усреднения дифференциальных операторов, общей теории уравнений в частных производных, а также методы функционального анализа и теории пространств Соболева.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, приведены с полным доказательством и состоят в следующем:

1. Исследовано асимптотическое поведение решений вариационных неравенств для оператора Лапласа с ограничениями типа неравенств на ε - периодически расположенных вдоль некоторого многообразия подмножествах. Диаметр подмножеств $2a_{\varepsilon,s}$, $a_{\varepsilon,s} < \varepsilon$. Рассмотрены все качественно различные типы поведения решения допредельной задачи при $\varepsilon \to 0$, определяемые соотношением между $a_{\varepsilon,s}$ и ε, а также коразмерностью многообразия, вдоль которого расположены подмножества; получены постановки усредненных задач, доказана сходимость решений исходных неравенств к решению предельной задачи в соответствующем Соболевском пространстве. Во многих случаях получены оценки скорости сходимости решений допредельной задачи к решению усредненной задачи.

2. Исследовано асимптотическое поведение решений вариационных неравенств для бигармонического оператора с ограничениями типа неравенств на ε периодически расположенных вдоль некоторого многообразия подмножествах. Диаметр подмножеств $2a_{\varepsilon,s}$, $a_{\varepsilon,s} < \varepsilon$. Рассмотрены все качественно различные типы поведения решения допредельной задачи при $\varepsilon \to 0$, определяемые соотношением между $a_{\varepsilon,s}$ и ε, а также коразмерностью многообразия, вдоль которого расположены подмножества; получены постановки усредненных задач и доказана сходимость решений исходных вариационных неравенств к решению усредненной задачи в соответствующем Соболевском пространстве. Во многих случаях установлены оценки скорости сходимости решений допредельной задачи к решению усредненной задачи.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер; результаты диссертации относятся к теории усреднения вариационных неравенств. Методика исследования, применявшаяся в диссертации, может быть использована при изучении других вариационных неравенств с ограничениями различного типа.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре "Уравнения с частными производными и теория усреднения"кафедры дифференциальных уравнений механико - математического факультета МГУ под руководством Жикова В.В., Шамаева А.С., Шапошниковой Т.А., 17 марта 2006г; на международной конференции Functional Differential Equations, Россия, Москва, проходившей 14 - 21 августа 2005г; на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной 103 - летию со дня рождения И.Г. Петровского, Россия, Москва, проходившей 16 - 22 мая 2004г.

Публикации. Содержание диссертации опубликовано в 5 работах. Список работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, вспомогательных утверждений и двух глав, разбитых на 13 параграфов, а также из приложения с иллюстрациями и списка цитируемой литературы. Параграфы имеют двойную нумерацию, а формулы, теоремы, замечания и рисунки - сквозную. Диссертация содержит 15 теорем и 7 лемм. Кроме того, текст снабжен 3 рисунками. Список литературы включает 49 наименований, общий объем диссертации 99 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дан краткий обзор работ, близких к теме диссертации, сформулированы основные задачи и кратко изложены главные результаты работы.

В **параграфе 0.2** сформулированы вспомогательные утверждения из функционального анализа, общей теории уравнений с частными производными и теории вариационных неравенств, а также приводятся утверждения, часто используемые в диссертации.

В первой главе изучено асимптотическое поведение решений вариационных неравенств для оператора Лапласа, соответствующих односторонним ограничениям на подмножествах, которые представляют собой шары радиуса $a_{\varepsilon,s}$, $0 < a_{\varepsilon,s} \leq d\varepsilon$, $d = const > 0$, ε - периодически расположенные вдоль многообразия M_{n-s} размерности $n-s$, $M_{n-s} \subset \Omega$.

Сформулируем основные результаты, полученные в первой главе. Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$; $M_{n-s}-$ гладкое многообразие размерности $n-s$, $s \geq 0$. Пусть $P^j_{n-s}-$ точка принадлежащая M_{n-s}, $\quad j = 1, \ldots, N_\varepsilon$ и $N_\varepsilon = d_0\varepsilon^{s-n}$, $d_0 = const > 0$. Обозначим через $T^j_{a_{\varepsilon,s}}$ шар радиуса $a_{\varepsilon,s}$ с центром в точке P^j_{n-s}, где ε малый параметр, $a_{\varepsilon,s} < \varepsilon$. Предположим, что $T^i_{a_{\varepsilon,s}} \cap T^j_{a_{\varepsilon,s}} = \emptyset$ для $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, N_\varepsilon$. Через T^j_τ в дальнейшем будем обозначать шар радиуса τ с центром в точке P^j_{n-s}, а через ∂T^j_τ границу этого шара. Будем предполагать, что точки P^j_{n-s} расположены так, что шары радиуса ε с центрами в этих точках образуют конечнократное покрытие многообразия M_{n-s}, причем кратность этого покрытия ограничена постоянной, не зависящей от ε. Пусть $G^{(n-s)}_\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} T^j_{a_{\varepsilon,s}}$.

В параграфах **1.2 - 1.5** исследуется асимптотика при $\varepsilon \to 0$ решений следующей задачи: найти элемент

$$u_\varepsilon \in K_\varepsilon = \{g \in H^0_1(\Omega) | g(x) \geq \phi(x) \text{ п.в.на } G^{(n-s)}_\varepsilon\}, \tag{1}$$

удовлетворяющий вариационному неравенству

$$\int\limits_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla(v - u_\varepsilon)dx \geq \int\limits_\Omega f(v - u_\varepsilon)dx, \tag{2}$$

где v - произвольный элемент K_ε, $\nabla u \nabla g \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}$. Существование и единственность решения задачи (1), (2) следуют, например, из теоремы существования и единственности решений вариационных неравенств для оператора с выпуклыми ограничениями (см. [13] гл.2,§ 3).

В параграфе **1.2** исследован случай, когда многообразие M_{n-s} таково, что $s \geq 2$ и $n \geq 2$. Доказана следующая

[13] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2$ и Ω содержит многообразие M_{n-s}, $2 \leq s \leq n$. Пусть u_ε - решение задачи (1), (2). Тогда u_ε сходится к u_0 в $H_1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, где u_0 - решение краевой задачи*

$$\Delta u_0 = f\,, x \in \Omega,\ u_0|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Если u_0 — гладкое решение задачи (3), справедлива оценка:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_1(\Omega)} \leq K a^{n-2}_{\varepsilon,s} \varepsilon^{s-n},\ \text{когда}\ n \geq 3,$$

и

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_1(\Omega)} \leq K \mid \ln a_{\varepsilon,s} \mid^{-1},\ \text{когда}\ n = 2.$$

В параграфах **1.3 - 1.5** рассматривается случай, когда $n \geq 2$ и область Ω содержит многообразие M_{n-s}, причем $s = 0,\ 1$. Пусть ε и $a_{\varepsilon,s}$ удовлетворяют одному из следующих трех условий:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a^{2-n}_{\varepsilon,s}\varepsilon^{n-s} = 0,\ \text{если}\ n \geq 3, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2-s}|\ln a_{\varepsilon,s}| = 0,\ \text{если}\ n = 2; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a^{2-n}_{\varepsilon,s}\varepsilon^{n-s} = +\infty,\ \text{если}\ n \geq 3, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2-s}|\ln a_{\varepsilon,s}| = +\infty,\ \text{если}\ n = 2; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a^{2-n}_{\varepsilon,s}\varepsilon^{n-s} = C > 0,\ \text{если}\ n \geq 3, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2-s}|\ln a_{\varepsilon,s}| = C > 0,\ \text{если}\ n = 2. \end{cases} \tag{6}$$

В каждом из случаев (4) - (6) исследована асимптотика решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$; получена усредненная задача, доказана сходимость последовательности u_ε к решению усредненной задачи, а в случае (5) приведена оценка скорости сходимости.

В параграфе **1.3** исследован случай (4) соотношения между $a_{\varepsilon,s}$ и ε и доказана следующая

Теорема 2. *Пусть u_ε - решение задачи (1), (2) и выполнено условие (4). Тогда u_ε сходится слабо в $H^0_1(\Omega)$ к u_0 при $\varepsilon \to 0$, где u_0 - решение задачи: найти элемент*

$$u_0 \in K_0 = \{v \in H^0_1(\Omega) \mid\ v(x) \geq \phi(x)\ \text{п. в. в}\ M_{n-s}\}, \tag{7}$$

удовлетворяющий неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u_0 \nabla (h - u_0) dx \geq \int\limits_{\Omega} f(h - u_0) dx \qquad (8)$$

для любой функции $h \in K_0$.

В параграфе **1.4** исследован случай (5) и доказана следующая

Теорема 3. *Пусть* u_ε *- решение задачи (1), (2);* u_0 *- решение задачи (3), и выполнены условия (5). Тогда* u_ε *сходится в* $H_1^0(\Omega)$ *к* u_0 *при* $\varepsilon \to 0$, *и, если* u_0 *гладкое решение задачи (3), то справедливы оценки:*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_1(\Omega)} \leq K a^{n-2}_{\varepsilon,s} \varepsilon^{s-n}, \text{ если } n \geq 3$$

и

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_1(\Omega)} \leq K \varepsilon^{s-2} \mid \ln a_{\varepsilon,s} \mid^{-1}, \text{ если } n = 2.$$

В параграфе **1.5** исследован так называемый "критический"случай (6) предельного поведения решений u_ε задачи (1), (2). Пусть $G_0 = \{x : |x| < a\}-$ шар в R^n радиуса a, $G_0 \subset Q$, где $Q = \{x | -1/2 \leq x_j < 1/2, \ j = 1, \dots, n\}$ - куб с единичным ребром. Будем предполагать, что $G_\varepsilon^{(n-s)}$ это совокупность множеств вида $a_{\varepsilon,s} G_0$, содержащихся в Ω. Доказана

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (6),* $s = 0, 1$*;* u_ε *- решение задачи (1), (2). Тогда* u_ε *слабо сходится в* $H_1^0(\Omega)$ *к* u_0 *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $u_0 \in H_1^0(\Omega)$ *- функция, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u_0 \nabla h dx + \tilde{C} \int\limits_{M_{n-s}} (u_0 - \phi)^- h d\hat{x} = \int\limits_{\Omega} f h dx, \qquad (9)$$

для произвольной функции $h \in H_1^0(\Omega)$; $\tilde{C} = \omega(n)(n-2)a^{n-2}C_1^{-1}$. *Кроме того, имеют место сходимости:*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \text{ когда } \varepsilon \to 0,$$

$$\|\nabla((u_0 - \phi)^+ + \phi + \omega_\varepsilon (u_0 - \phi)^- - u_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \text{ когда } \varepsilon \to 0.$$

Здесь $\omega_\varepsilon \in H^0_{1,loc}(R^n)$ - срезающая функция, построенная следующим образом: пусть

$$w_\varepsilon^j = \{|x - P_j|^{2-n} - (a_{\varepsilon,s})^{2-n}\} / \{(\varepsilon b)^{2-n} - (a_{\varepsilon,s})^{2-n}\}, \ j = 1, \dots, N_\varepsilon,$$

для $x \in T^j_{\varepsilon b} \setminus T^j_{a_{\varepsilon,s}}$, где $b = const, a_{\varepsilon,s} < \varepsilon b < \varepsilon/2$, N_ε -количество шаров, составляющих $G_\varepsilon^{(n-s)}$. Положим $w_\varepsilon = w_\varepsilon^j$ при $x \in T^j_{\varepsilon b} \setminus T^j_{a_{\varepsilon,s}}$, $w_\varepsilon = 0$ при $x \in T^j_{a_{\varepsilon,s}}$ и $w_\varepsilon = 1$ при $x \in R^n \setminus \cup_{j=1}^{N_\varepsilon} T^j_{\varepsilon b}$.

В параграфе **1.6** рассмотрена задача усреднения аналогичного вариационного неравенства с ограничениями, заданными на подмножестах, расположенных вдоль границы области. Пусть Ω - ограниченная область в $R^n \cap \{x_n > 0\}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2, причем $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x \in R^n | x_n = 0\} \neq \emptyset$.

Обозначим $G_0 = \{x \in R^n : |x - P_0| < a\}$, где P_o - центр куба $Q = \{x \in R^n : 0 < x_j < 1,\ j = 1, \ldots, n\}$. Предположим, что $\overline{G_0} \subset Q$. Положим $G_\varepsilon = \sum_{z \in Z'} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon z) = \cup_{j=1}^{\infty} G^j_{a_\varepsilon}$, где Z' - множество векторов вида $z = (z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$, $z_j \,(j = 1, \ldots, n-1)$ - целочисленные; $G^j_{a_\varepsilon} - n-$ мерный шар с центром в точке P_j радиуса $a_\varepsilon a$, $0 < a_\varepsilon a < \varepsilon/2$. Не ограничивая общности, считаем, что $G^1_{a_\varepsilon}, \ldots, G^{N(\varepsilon)}_{a_\varepsilon}$ - все те шары из совокупности G_ε, для которых $\overline{Y}^j_\varepsilon \subset \Omega \cup \Gamma_1$, $j = 1, \ldots, N(\varepsilon)$, где $Y^j_\varepsilon = \{x : |x_i - P^j_i| < \varepsilon/2,\ i = 1, \ldots, n\}$, где $N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{1-n} mes \Gamma_1$.

Исследована асимптотика при $\varepsilon \to 0$ решений следующей задачи: найти элемент

$$u_\varepsilon(x) \in K_\varepsilon = \{v \in H_1(\Omega, \Gamma_2) |\, v(x) \geq \phi(x) \,\text{п.в. на}\, G^j_{a_\varepsilon},\ j = 1, \ldots, N(\varepsilon)\},$$

удовлетворяющий вариационному неравенству

$$\int\limits_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx \geq \int\limits_\Omega f(v - u_\varepsilon) dx, \tag{10}$$

где $v-$ произвольный элемент K_ε.

Доказаны:

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (4) с $s = 1$; u_ε - решение неравенства (10). Тогда $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H_1(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где функция $u_0 \in K_0 = \{v \in H_1(\Omega, \Gamma_2) \mid v \geq \phi$ п.в. на $\Gamma_1\}$ удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\int\limits_\Omega \nabla u_0 \nabla (h - u_0) dx \geq \int\limits_\Omega f(h - u_0) dx, \tag{11}$$

для любого $h \in K_0$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (5); u_0- обобщенное решение задачи (3). Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ слабо в $H^0_1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Если u_0 - гладкое решение* *задачи (3), то* $\|u_0 - u_\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega)} \le K a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{1-n}$, *когда* $n \ge 3$, $\|u_0 - u_\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega)} \le K \mid \ln a_\varepsilon \mid^{-1} \varepsilon^{-1}$, *когда* $n = 2$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (6),* u_ε *- решение вариационного неравенства (10);* u_0 *- обобщенное решение нелинейной краевой задачи:*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f \ \text{ в } \Omega;\ u_0 = 0 \ \text{ на } \Gamma_2; \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + A(n)(u_0 - \phi)^- = 0 \ \text{ на } \Gamma_1, \end{cases} \tag{12}$$

где $A(n) = (n-2)\omega(n)a^{n-2}C^{-1}$, $n \ge 3$; $A(2) = 2\pi C^{-1}$. *Тогда* $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ *слабо в* $H_1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *и*

$$\|u_0 - u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \ \text{если } \varepsilon \to 0,$$

$$\|\nabla[(u_0-\phi)^+ + \phi + w_\varepsilon(u_0-\phi)^-] - \nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \to 0,$$

если $\varepsilon \to 0$, *где* ω_ε *- та же функция, что и в теореме 4.*

Во второй главе диссертации изучено асимптотическое поведение решений вариационных неравенств для бигармонического оператора в области Ω пространства R^n с односторонними ограничениями на подмножествах $G_\varepsilon^{(n-s)}$, ε - периодически расположенных вдоль многообразия M_{n-s}, размерность которого равна $(n-s)$, $s \ge 0$. Когда $s = 0$, считаем, что M_n - подобласть Ω. Рассмотрены все возможные типы асимптотического поведения решений u_ε вариационных неравенств при $\varepsilon \to 0$ в зависимости от коразмерности многообразия s, соотношения между малым параметром ε - периодом структуры и $a_{\varepsilon,s}$ - коэффициентом сжатия подмножеств, на которых заданы односторонние ограничения. Предположения об области Ω, многообразии M_{n-s} и подмножестве $G_\varepsilon^{(n-s)}$ остаются такими же, как и в п. 1.2 - 1.5.

В параграфах **2.2 - 2.6** исследована асимптотика при $\varepsilon \to 0$ решений следующей задачи: найти элемент

$$u_\varepsilon \in K_\varepsilon = \{g \in H_2^0(\Omega) | g(x) \ge \phi(x) \text{ п.в. на } G_\varepsilon^{(n-s)}\}, \tag{13}$$

удовлетворяющий вариационному неравенству

$$\int\limits_\Omega D^2 u_\varepsilon D^2(v - u_\varepsilon)dx \ge \int\limits_\Omega f(v - u_\varepsilon)dx, \tag{14}$$

где v — произвольный элемент K_ε. Здесь $D^2 v D^2 u = \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$. Существование и единственность решения задачи (13), (14) следуют, например, из теоремы существования и единственности решений вариационных неравенств для оператора с выпуклыми ограничениями (см. [14] гл.2, § 3).

В параграфе **2.2** исследован случай, когда $n = 2, 3$ и коразмерность s многообразия, вдоль которого расположены подмножества, положительная. Доказана следующая

Теорема 8. *Предположим, что размерность пространства $n = 2$ или $n = 3$, $a_{\varepsilon,s} \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$, u_ε - решение задачи (13), (14). Тогда u_ε слабо сходится к u_0 в $H_2^0(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, где*

$$u_0 \in K_0 = \{v \in H_2^0(\Omega) \mid \ v(x) \geq \phi(x) \text{ на } M_{n-s}\} \tag{15}$$

удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_\Omega D^2 u_0 D^2(h - u_0)dx \geq \int\limits_\Omega f(h - u_0)dx \tag{16}$$

для любой функции $h \in K_0$.

В параграфе **2.3** исследован случай, когда $n \geq 4$ и множество $G_\varepsilon^{(n-s)}$ расположено вдоль многообразия M_{n-s}, $4 \leq s \leq n$. Доказана следующая

Теорема 9. *Пусть $n \geq 4$ и Ω содержит многообразие M_{n-s}, $4 \leq s \leq n$. Тогда решение задачи (13), (14) u_ε сильно сходится к u_0 в $H_2^0(\Omega)$, при $\varepsilon \to 0$ где u_0 — решение задачи*

$$\Delta^2 u_0 = f\,, x \in \Omega,\ u_0|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{17}$$

Если u_0 гладкое решение задачи (17), то справедливы оценки:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_2^0(\Omega)} \leq K a_{\varepsilon,s}^{\frac{s-4}{2}} \mid \ln a_{\varepsilon,s} \mid^{-2},\ \text{если } s \geq 5,$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_2^0(\Omega)} \leq K \mid \ln a_{\varepsilon,s} \mid^{-1},\ \text{если } s = 4.$$

В параграфах **2.4 - 2.6** рассмотрен случай, когда $n \geq 4$ и область Ω содержит многообразие M_{n-s}, причем $s = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Пусть последовательности $\{\varepsilon\}$ и $\{a_{\varepsilon,s}\}$ удовлетворяют одному из следующих трех условий:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_{\varepsilon,s}^{4-n}\varepsilon^{n-s} = 0,\ \text{если } n \geq 5, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{4-s}|\ln a_{\varepsilon,s}| = 0,\ \text{если } n = 4; \end{cases} \tag{18}$$

[14] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

$$
\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_{\varepsilon,s}^{4-n}\varepsilon^{n-s} = +\infty, \text{ если } n \geq 5, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{4-s}|\ln a_{\varepsilon,s}| = +\infty, \text{ если } n = 4; \end{cases} \tag{19}
$$

$$
\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_{\varepsilon,s}^{4-n}\varepsilon^{n-s} = C > 0, \text{ если } n \geq 5, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{4-s}|\ln a_{\varepsilon,s}| = C > 0, \text{ если } n = 4. \end{cases} \tag{20}
$$

В каждом из случаев (18) - (20) исследовано асимптотическое поведение решения задачи (13), (14) при $\varepsilon \to 0$, получена усредненная задача, доказана сходимость последовательности u_ε к решению усредненной задачи, в случае (19) найдена оценка скорости сходимости.

В параграфе **2.4** исследован случай (18) и доказана следующая

Теорема 10. *Пусть выполнено условие (18), $n \geq 4$ и Ω содержит многообразие M_{n-s}, причем $s = 0, 1, 2, 3$. Тогда решение задачи (13), (14) u_ε сходится слабо в $H_2^0(\Omega)$ к решению $u_0(x)$ задачи (15), (16) при $\varepsilon \to 0$.*

В параграфе **2.5** исследован случай (19) и доказана следующая

Теорема 11. *Пусть выполнено условие (19). Тогда решение задачи (13), (14) u_ε сходится сильно в $H_2^0(\Omega)$ к u_0 - решению задачи (17) при $\varepsilon \to 0$, причем если u_0 - гладкое решение задачи (17), то*

$$
\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_2^0(\Omega)} \leq K a_{\varepsilon,s}^{n-4}\varepsilon^{s-n}, \ \textit{когда } n \geq 5
$$

и

$$
\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_2^0(\Omega)} \leq K \mid \ln a_{\varepsilon,s} \mid^{-1} \varepsilon^{s-4}, \ \textit{когда } n = 4.
$$

В параграфе **2.6** исследован так называемый "критический"случай (20) предельного поведения решений u_ε задачи (13), (14) и доказана

Теорема 12. *Пусть выполнено условие (20); $s = 0, 1, 2, 3$, u_ε - решение задачи (13), (14). Тогда u_ε слабо сходится в $H_2^0(\Omega)$ к u_0 при $\varepsilon \to 0$, где $u_0 \in H_2^0(\Omega)$ - функция, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$
\int\limits_\Omega D^2u_0D^2h dx + B(n)\int\limits_{M_{n-s}} (u_0-\phi)^- h d\hat{x} = \int\limits_\Omega fh dx, \tag{21}
$$

для произвольной функции $h \in H_2^0(\Omega)$. Константа $B = \frac{n(n-2)(n-4)\omega(n)}{2C}$, когда $n \geq 5$ и $B = \frac{\omega(n)}{2C}$, когда $n = 4$. Существование и единственность решения задачи, соответствующей интегральному тождеству (21), следует из теоремы 2.2 (гл. 2 п. 2.2)[15].

В параграфе **2.7** исследована задача усреднения аналогичного вариационного неравенства с ограничениями, заданными на подмножестах, расположенных вдоль границы области. Область Ω и подмножества, на которых заданы ограничения, здесь такие же, как и в п. 1.6. Пусть

$$u_\varepsilon \in K_\varepsilon = \{g \in H_2(\Omega, \Gamma_2) | g(x) \geq \phi(x) \text{ п.в.на } G_\varepsilon^{(n-1)}\}, \tag{22}$$

удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int\limits_\Omega D^2 u_\varepsilon D^2(v - u_\varepsilon)dx \geq \int\limits_\Omega f(v - u_\varepsilon)dx, \tag{23}$$

где v - произвольный элемент K_ε. Здесь $\phi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $f \in L_2(\Omega)$, под пространством $H_m(\Omega, \gamma)$ мы понимаем пополнение по норме $H_m(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, обращающихся в нуль в окрестности γ, где γ некоторое s - мерное многообразие в $\overline{\Omega}$. Получены следующие результаты:

Теорема 13. *Пусть выполнены условия (18) с $s = 1$. Тогда решение задачи (22), (23) $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ слабо в $H_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, где u_0- решение задачи: найти элемент*

$$u_0 \in K_0 = \{v \in H_2(\Omega, \Gamma_2) \mid \ v(x) \geq \phi(x) \textit{ п. в. на } \Gamma_1\}, \tag{24}$$

удовлетворяющий неравенству

$$\int\limits_\Omega D^2 u_0 D^2(h - u_0)dx \geq \int\limits_\Omega f(h - u_0)dx \tag{25}$$

для любой функции $h \in K_0$.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия (19) с $s = 1$. Тогда решение задачи (22), (23) u_ε сходится сильно к u_0 - решению задачи (17) в $H_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Если u_0 - гладкое решение (17), то*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_2(\Omega)} \leq K a_\varepsilon^{n-4} \varepsilon^{1-n}, \textit{ когда } n \geq 5$$

и

$$\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{H_2(\Omega)} \leq K \mid \ln a_\varepsilon \mid^{-1} \varepsilon^{-3}, \textit{ когда } n = 4.$$

[15] Ж.-Л. Лионс Некоторые методы решения нелинейных краевых задач М.: Мир 1972

Теорема 15. *Пусть выполнены условия (20) с* $s = 1$. *Тогда последовательность решений задачи (22), (23)* u_ε *сходится слабо к* $u_0(x)$ *в* $H_2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где функция* $u_0(x) \in H_2(\Omega, \Gamma_2)$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} D^2 u_0 D^2 h dx + B(n) \int\limits_{\Gamma_1} (u_0 - \phi)^- h dx = \int\limits_{\Omega} f h dx \tag{26}$$

для произвольного $h \in H_2(\Omega)$, *где* $B = \frac{n(n-2)(n-4)\omega(n)}{2C}$, *когда* $n \geq 5$ *и* $B = \frac{\omega(n)}{2C}$, *когда* $n = 4$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физизико - математических наук, профессору Татьяне Ардолионовне Шапошниковой за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Зубова М.Н. Об усреднении вариационных неравенств для бигармонического оператора с ограничениями на подмножествах, ε - периодически расположенных вдоль многообразий // ДАН РАН 2007 т. 414 №2 с. 142 - 145.

[2] Зубова М.Н. Об усреднении вариационного неравенствадля бигармонического оператора с ограничениями на подмножествах, периодически расположенных вдоль многообразий большой коразмерности // тр. ИСА РАН 2005, т. 17(1), с. 166 - 175.

[3] Зубова М.Н. Об усреднении вариационных неравенств для бигармонического опреатора с ограничениями на ε - периодически расположенных подмножествах // Дифференциальные уравнения 2006, т 42, №6, с. 801 - 813.

[4] Shaposhnikova T.A., Zubova M.N. On gomogenization of variational inequalities whith obstracles on ε -periodically situated inclusions, FDE 2005, v.12, p. 463-473.

Постановка задачи принадлежит Т.А. Шапошниковой, решение задачи принадлежит М.Н. Зубовой.

[5] Зубова М.Н. Шапошникова Т.А. Усреднение некоторых вариационных неравенств с ограничениями на подмножествах, ε - периодически расположенных вдоль границы области Вест. МГУ, сер. Математика и механика 2007, №2, с. 26 - 37.

Постановка задачи и доказательство теоремы 1 принадлежит Т.А. Шапошниковой, доказательство теоремы 2 принадлежит М.Н. Зубовой.

Издательство ЦИПИ при механико - математическом факультете
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Подписано в печать
Формат 60×90 1 / 16. Усл. печ. л. 1
Тираж 100 экз. Заказ