На правах рукописи
УДК 517.518.4

Алферова Елена Дмитриевна

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Т. П. Лукашенко.
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор В. А. Скворцов; кандидат физико–математических наук Е. А. Власова.
Ведущая организация:	Московский государственный технологический университет "СТАНКИН".

Защита диссертации состоится 5 октября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу:

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан 5 сентября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор Т. П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена исследованию условий выполнения аналога равенства Парсеваля для рядов Фурье по системе Хаара.

Равенство Парсеваля — равенство, выражающее квадрат нормы элемента в векторном пространстве со скалярным произведением через квадраты модулей коэффициентов Фурье этого элемента по некоторой ортогональной системе элементов.

Выполнение равенства Парсеваля для данного элемента $x \in X$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд Фурье этого элемента по ортогональной системе $\{e_n\}$ сходился к самому элементу x по норме пространства X. Выполнение равенства Парсеваля для любого элемента $x \in X$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ была полной системой в X.

В случае, когда пространство $X = L^2[-\pi, \pi]$ состоит из действительных функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$, функция $f \in L^2[-\pi, \pi]$, в качестве полной ортогональной системы функций взята тригонометрическая система функций и $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx +$ $+ b_n \sin nx$, где знак $\sim$ понимается в смысле сходимости в метрике L^2; тогда равенство Парсеваля имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(f) + b_n^2(f)$$

и называется классическим равенством Парсеваля; оно было указано М. Парсевалем (M. Parseval, 1805). В этом равенстве $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$ — коэффициенты Фурье функции f.

Если $g \in L^2[-\pi, \pi]$ и $g \sim \frac{a_0'}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx$, то равенство Парсеваля выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n' + b_n b_n')$$

и называется обобщенным равенством Парсеваля.

Вышеприведенные формулы имеют место не только для случая $f \in L^2$, $g \in L^2$, но и в ряде других случаев. Два функциональных класа K и K' будем называет дополнительными, если обобщенное равенство Парсеваля имеет место для любых $f \in K$ и $g \in K'$. При этом сумма ряда в правой части понимается в смысле суммирования каким-либо методом. Исследования на тему какие классы функций являются дополнительными проводились еще в XIX веке[1].

Часто тригонометрический ряд, соответствующий функции $f(x)$, удобнее задавать в следующей форме: $f(x) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, при этом коэффициенты Фурье c_n функции f определяются формулами $c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для такого представления тригонометрического ряда широко известно классическое равенство Парсеваля, относящееся к рядам Фурье–Стилтьеса.

Доказано[2], что если $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$, $G(x)$ — 2π-периодическая с точностью до линейной составляющей функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, то:

$$\frac{1}{2\pi}(R-S)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\, d\overline{G(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$ и $\widehat{dG}(k) = \frac{1}{2\pi}(R-S)\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikx}\,dG(x)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$, ряд в правой части равенства может не сходиться, но суммируется методом средних арифметических, интеграл в равенстве Парсеваля и интегралы, определяющие коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$, понимаются как интегралы Римана–Стилтьеса.

В.С. Горячева показала[3], что в этом утверждении можно разрешить функции $f(x)$ иметь конечное число разрывов первого рода при условии, что функция $G(x)$ в них непрерывна, а также привела примеры, когда для

[1] *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М., Физматлит, 1961.

[2] *Зигмунд А.,* Тригонометрические ряды. Т.1. Москва. Мир, 1965.

[3] *Горячева В.С.,* О равенстве Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2002. №1. с. 32-36.

некоторых пар функций равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса не выполняется. Из примера, построенного ею, видно, что для тригонометрической системы существуют такие ограниченная функция f и непрерывная функция ограниченной вариации G, что определен и конечен интеграл Лебега–Стилтьеса $(L-S)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,d\overline{G(x)}$, а равенство Парсеваля для этой пары функций f и G не выполняется. Достаточно в качестве функции $G(x)$ взять функцию Кантора (канторову лестницу) на $[0,2\pi]$, а в качестве функции f — функцию, равную нулю на интервалах постоянства G и равную единице в остальных точках отрезка. В этом случае $(L-S)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,d\overline{G(x)}$ существует и равен 1, а ряд в правой части равенства Парсеваля равен 0.

Т.П. Лукашенко доказал[4] равенство Парсеваля для тригонометрических рядов Фурье–Стилтьеса–Римана и метода суммирования Римана[5] при более слабых условиях на функции. А именно — он доказал, что равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса остается верным, если f — 2π–периодическая комплекснозначная функция, G — 2π–периодическая с точностью до линейной составляющей комплекснозначная функция, $f(x)$ и $G(x)$ интегрируемы по Лебегу, функция $f(x)$ интегрируема на периоде (любом отрезке длины 2π) в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\overline{G(x)}$. Ряд в правой части равенства может не сходиться, но он суммируется методом Римана $(\mathcal{R},2)$.

В этих исследованиях существенную роль играет тот факт, что интеграл в равенстве Парсеваля понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Т.П. Лукашенко было замечено[6], что для интеграла Лебега–Стилтьеса равенство Парсеваля по тригонометрической системе функций не может быть верным ни для одной функции G ограниченной вариации, которая не является абсолютно непрерывной.

Если же функция $G(t)$ является абсолютно непрерывной, то $(L-S)\int_a^b f(x)\,d\overline{G(x)} = (L)\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$, где $g(t)=G'(t)$ п.в.[7]. И встает

[4] *Лукашенко Т. П.,* Об интеграле Римана–Стилтьеса и равенстве Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2002. №4. с. 18-23.

[5] *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. Государственное издательство физико-математической литературы, М. 1958.

[6] *Лукашенко Т. П.,* О равенстве Парсеваля для произведения функций.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. №3. с. 32-40.

[7] *Сакс С.,* Теория интеграла. М. Ил. 1949; Факториал. Пресс. 2004. с. 61.

вопрос о выполнении равенства Парсеваля в случае, если наряду с функциями f и g интегрируемо по Лебегу и их произведение $f \cdot g$.

В этом направлении Т.П. Лукашенко было доказано[8], что если f и g такие 2π-периодические комплекснозначные интегрируемые в смысле широкого интеграла Данжуа с почти всюду дифференцируемыми первообразными функции, что произведение $Mf \cdot g$ интегрируемо по Лебегу, где $Mf(x) = \sup\limits_{h\neq 0} \left|\frac{F(x+h)-F(x-h)}{h}\right|$ — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f, F — неопределенный интеграл функции f, то выполняется равенство Парсеваля для метода суммирования Римана

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = (R,2)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

А при обобщении результатов для тригонометрической системы на m–мерное пространство Т.П. Лукашенко для интеграла Римана–Стилтьеса были получены следующие результаты[9]: если функция $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ является 2π-периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^m=[0,2\pi]^m$, функция $G:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ является суммой 2π-периодической по каждой переменной функции и линейной функции и интегрируема по Лебегу на T^m и функция f интегрируема по функции $\overline{G}$ в смысле Римана–Стилтьеса на любом брусе $T^m_{\overline{a}}=\prod_{j=1}^m[a_j,a_j+2\pi]$, то выполняется равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{(2\pi)^m}(R-S)\int\limits_{T^m}\!\cdots\!\int f\,d\overline{G} = (\mathcal{R},2)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{m}}}\widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(k_1,\cdots,k_m) = \frac{1}{(2\pi)^m}(L)\int\limits_{T^m}\!\cdots\!\int f(\mathbf{t})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}}\,dt_1\cdots dt_m$, и $\widehat{dG}(\mathbf{k}) =$ $= \widehat{dG}(k_1,\cdots,k_m) = \prod\limits_{j=1}^m\left(\frac{1}{2\pi}\Big|_{t_j=0}^{2\pi}+\frac{ik_j}{2\pi}(L)\int_0^{2\pi}dt_je^{-ik_jt_j}\right)G(t)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(\mathbf{x})$, ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R},2)$.

[8] *Лукашенко Т. П.,* О равенстве Парсеваля для произведения функций.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. №3. с. 32-40.

[9] *Лукашенко Т. П.,* Об интегралах Стилтьеса и равенстве Парсеваля для кратных тригонометрических рядов. // РАН. Сер. математическая, Т.69. 2005. №5. с. 149-168.

В этой же работе Т.П. Лукашенко были получены результаты для тригонометрических рядов Фурье–Лебега в m–мерном пространстве.

Теорема. *Пусть функция* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ *является* 2π*-периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на* $T^m = [0, 2\pi]^m$*, неотрицательная аддитивная функция бруса* G *определена на всех брусах из* $\mathbb{R}^m$ *и* 2π*-периодична по каждой переменной. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от* $\mathfrak{M}f = \max\{|f|, Mf\}$ *по* G *на* T^m*, где* $Mf(\mathbf{x}) = \sup\limits_{x\in\Pi} \frac{|F(\Pi)|}{|\Pi|}$ *(*Π *— содержащие точку* x *кубы, т.е. брусы с ребрами одинаковой длины;* $F(\Pi) = (L) \int\cdots\int\limits_{\Pi} f\, d\mathbf{t}$ *— функция бруса) — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции* f *по кубам, и*

1)или мера $\mu(E) = \int\cdots\int\limits_{E} \mathfrak{M}f(\mathbf{t})\, dG(\mathbf{t})$ *абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,*

2)или существует интеграл Лебега от fM_G *на* T^m*, где* $M_G(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\Pi} \frac{G(\Pi)}{|\Pi|}$ *(*Π *- содержащие точку* $\mathbf{x}$ *кубы) — максимальная функция Харди–Литтлвуда функции бруса* G *по кубам,*
то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^m}(L-S)\int\cdots\int\limits_{T^m} f\,\overline{dG} = (R,2)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^\mathbf{m}} \widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k})$ *и* $\widehat{dG}(\mathbf{k})$ *— соответственно коэффициенты Фурье функции* f *и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции* G*, интеграл в равенстве является интегралом Лебега–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана* $(R, 2)$*.*

Цель работы. Исследовать необходимые и достаточные условия выполнения равенства Парсеваля для рядов Фурье и Фурье–Стилтьеса по системам Хаара и Уолша функций одной и многих переменных.

Научная новизна. Полученные результаты являются новыми и состоят в следующем.

1)для интеграла Римана–Стилтьеса в равенстве Парсеваля:

— доказана справедливость равенства Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара на отрезках $[0, 1]$, $[0, 1]^*$ и на брусах $[0, 1]^m$, ${[0, 1]^*}^m$;

— показано, что равенство Парсеваля верно и для рядов по системе Уолша, если сумму ряда понимать как предел частичных сумм с номерами 2^k, $k \in \mathbb{N}$;
2) для интеграла Лебега:

— получены достаточные условия выполнения равенства Парсеваля для рядов Фурье–Лебега по системе Хаара;

— доказана справедливость равенства Парсеваля для рядов Фурье–Лебега по системе Уолша для почти всех двоичных сдвигов функции.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории функций действительного и комплексного переменного и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории рядов по системам Хаара и Уолша.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались в МГУ на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством академика РАН П.Л. Ульянова, проф. М.К. Потапова и проф. М.И. Дьяченко, на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством проф. Т.П Лукашенко, проф. В.А. Скворцова и м.н.с. А.П. Солодова, на семинаре по теории ортоподобных систем под руководством проф. Т.П. Лукашенко и доц. Т.В. Родионова, доц. В.В. Галатенко; на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Ростов-на-Дону, 2004); на Воронежских зимних математических школах "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (2005 и 2007), на Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2006); на международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Абрау-Дюрсо, 2006).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 65 страницах и состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающего 19 наименований.

Основное содержание диссертации

Во введении приводятся основные определения и дается краткий обзор по теме диссертации — равенстве Парсеваля, формулируются основные полученные результаты.

В первой главе рассматриваются ряды Фурье–Стилтьеса по системе Хаара. При этом удалось существенно (по сравнению с результатами для тригонометрической системы) снизить требования на функции f и G. Глава состоит из двух параграфов. В первом из них функции заданны на отрезке $[0,1]$ (и на модифицированном отрезке $[0,1]^*$), во втором — обобщение результатов на случай m–мерного пространства (результаты на брусе Π^m и модифицированном брусе Π^{*^m}).

Во второй главе рассматриваются ряды Фурье–Лебега по системам Хаара и Уолша. Структура второй главы повторяет структуру первой.

В первом параграфе первой главы для случая модернизированного отрезка доказано:

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$ и $G(x)$ — комплекснозначные функции на модернизированном отрезке $[0,1]^*$, $f(x)$ интегрируема в смысле широкого интеграла Данжуа на $[0,1]^*$ и интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\overline{G(x)}$ на $[0,1]^*$. Тогда выполняется равенство Парсеваля*

$$(R-S)\int\limits_{[0,1]^*} f(x)\,d\overline{G(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k) = (f,\chi_k) = (D)\int\limits_{[0,1]^*} f(x)\chi_k(x)\,dx$ и $\widehat{dG}(k) = \int\limits_{[0,1]^*} \chi_k(x)\,dG(x)$ — соответственно коэффициенты Фурье–Данжуа функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится, а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Чтобы теорема имела место на обычном отрезке $[0,1]$, необходимо усилить требования на функцию $G(x)$.

Теорема 1.2. *Пусть $f(x)$ и $G(x)$ — комплекснозначные функции на отрезке $[0,1]$, функция $f(x)$ интегрируема в смысле широкого интеграла Данжуа на $[0,1]$ и интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\overline{G(x)}$ на $[0,1]$. Пусть также существуют коэффициенты Фурье–*

Стилтьеса функции $G(x)$ *по системе Хаара:* $\widehat{dG}(k) = \int\limits_{[0,1]} \chi_k(x)\, dG(x)$. *Тогда выполняется равенство Парсеваля*

$$(R-S) \int\limits_{[0,1]} f(x)\, d\overline{G(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k) = (f, \chi_k) = (D) \int\limits_{[0,1]} f(x)\chi_k(x)\, dx$ *— коэффициенты Фурье–Данжуа функции* f *по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции* G *является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится.*

Добавление требований к условиям теоремы объясняется тем, что коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$ на $[0,1]$ могут и не существовать, что связано с разрывностью на $[0,1]$ функций системы Хаара.

На модернизированном же отрезке $[0,1]^*$ это требование опускаем, т.к. коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G(x)$: $dG(x) = \int\limits_{[0,1]^*} \chi_k(x)\, dG(x)$ всегда существуют. Это объясняется тем, что функции системы Хаара непрерывны на модифицированном отрезке, а интеграл Римана–Стилтьеса от непрерывной функции существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега–Стилтьеса.

Заметим, что равенство Парсеваля справедливо для системы Уолша как на $[0,1]^*$, так и на $[0,1]$ соответственно с теми же требованиями на функции f и G, что в заявленных теоремах, при условии, что сумма ряда в равенстве Парсеваля понимается как предел частичных сумм с номерами вида 2^k.

Во втором параграфе аналогичные результаты доказываются для кратных рядов Фурье по системе Хаара.

Теорема 1.3. *Пусть* $f : \Pi^{*^m} \to \mathbb{C}$ *интегрируема в смысле Лебега на модифицированном брусе* Π^{*^m} *и интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по функции* $G : \Pi^{*^m} \to \mathbb{C}$ *на* Π^{*^m}. *Тогда выполняется равенство Парсеваля*

$$(R-S) \underset{\Pi^{*^m}}{\int \cdots \int} f(\mathbf{x})\, d\overline{G(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbf{m}}} \widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (f, \chi_{\mathbf{k}}) = (L) \underset{\Pi^{*^m}}{\int \cdots \int} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *и* $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = \underset{\Pi^{*^m}}{\int \cdots \int} \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, dG(\mathbf{x})$

— *соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится в смысле суммирования по прямоугольникам, а черта сверху означает комплексное сопряжение.*

Для справедливости теоремы на Π^m (без *), как и в случае интегрируемости на отрезке, необходимо усиление требований на функцию G.

Теорема 1.4. *Пусть f и G — комплекснозначные функции, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ интегрируема в смысле Лебега на Π^m, и в смысле Римана–Стилтьеса по функции $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ на Π^m. Пусть также на Π^m существуют коэффициенты Фурье–Стилтьеса по системе Хаара функции G. Тогда выполняется равенство Парсеваля*

$$(R - S) \int\limits_{\Pi^m} \cdots \int f(\mathbf{x})\, d\overline{G(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{m}}} \widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (f, \chi_{\mathbf{k}}) = (L) \int\limits_{\Pi^m} \cdots \int f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *и* $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = \int\limits_{\Pi^m} \cdots \int \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, dG(\mathbf{x})$ — *соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G по системе Хаара, интеграл в равенстве Парсеваля и в определении коэффициентов функции G является интегралом Римана–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля сходится.*

Добавление требований к условиям теоремы объясняется тем, что коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G на Π^m могут не существовать.

Во второй главе интеграл в равенстве Парсеваля понимается в смысле Лебега–Стилтьеса.

Для системы Хаара, как и в случае тригонометрической системы, для интеграла Лебега–Стилтьеса результаты, аналогичные теоремам, сформулированным в первой главе, получить нельзя. Как и в случае тригонометрической системы, без дополнительных ограничений на функцию f подобные результаты нельзя получить ни для одной функции G ограниченной вариации, которая не является абсолютно непрерывной.

Для рядов Фурье по системе Хаара удалось построить пример, показывающий, что существуют интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функции f и g такие, что интеграл $(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)g(x)\,dx$ существует и конечен, но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)=+\infty$. И следовательно:

$$(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)g(x)\,dx \neq \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(k)\widehat{g}(k).$$

А также в первом параграфе для интеграла Лебега получено достаточное условие справедливости равенства Парсеваля по системе Хаара:

Теорема 2.1. *Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $[0,1]$, а G — функция ограниченной вариации на $[0,1]$. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = max\{|f|, Mf\}$ по G, где $Mf(x) = = \sup\limits_{h\neq 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|$ — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f, F — неопределенный интеграл функции f, и выполнено одно из следующих двух условий:*

1)мера $\mu(E) = \int\limits_{E}\mathfrak{M}f(t)\,dG(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,

2)существует интеграл Лебега от fM_G, где $M_G(x) = \sup\limits_{h\neq 0}\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right|$; то выполнено равенство Парсеваля

$$(L-S)\int\limits_{[0,1]} f(x)\,d\overline{G(x)} = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{dG}(k)},$$

где $\widehat{f}(k)$ и $\widehat{dG}(k)$ – соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G, черта сверху обозначает комплексное сопряжение, интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Лебега–Стилтьеса.

А для системы Уолша доказана:

Теорема 2.2. *Если f — комплекснозначная интегрируемая по Лебегу функция на $[0,1]$, G — комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0,1]$, $\widehat{f_x}(k) = (L)\int\limits_{[0,1]} f(x\oplus t)\chi_k(t)\,dt$ — коэффициенты Фурье–Лебега функции $f_x(t) = f(x\oplus t)$, "$\oplus$" — групповая операция сложения, то ра-*

венство Парсеваля

$$(L-S)\int\limits_{[0,1]} f(x\oplus t)\,d\overline{G(t)}=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_x(k)\overline{\widehat{dG}(k)},$$

имеет место для почти всех $x\in[0,1]$ в смысле суммируемости ряда любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду, интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса.

Во втором параграфе второй главы доказываются результаты для кратных рядов Фурье, если интеграл в равенстве Парсеваля понимать в смысле Лебега.

Теорема 2.3. *Пусть функция $f:[0,1]^m\to\mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на брусе $[0,1]^m$, неотрицательная аддитивная функция бруса G определена на $[0,1]^m$. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = = max\{|f|,Mf\}$ по G на $[0,1]^m$, где $Mf(\mathbf{x})=\sup\limits_{\Pi\ni\mathbf{x}}\left|\frac{F(\Pi)}{|\Pi|}\right|$ (Π — содержащие точку $\mathbf{x}$ кубы, F — функция бруса: $F(\Pi)=\int\limits_{\Pi}\cdots\int f(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}$) — неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f по кубам, и выполнено одно из следующих двух условий:*

1)мера $\mu(E)=\int\cdots\int_E\mathfrak{M}f(\mathbf{t})\,dG(\mathbf{t})$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,

2)существует интеграл Лебега от fM_G на $[0,1]^m$, где $M_G(x)=\sup\limits_{\Pi\ni\mathbf{x}}\left|\frac{G(\Pi)}{|\Pi|}\right|$ (Π — содержащие точку $\mathbf{x}$ кубы) — максимальная функция Харди–Литтлвуда функции бруса G по кубам;
то выполнено равенство Парсеваля

$$(L-S)\int\limits_{\Pi^m}\cdots\int f\,d\overline{G}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k})=\int\cdots\int_{\Pi^m}f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $\widehat{dG}(\mathbf{k})=(L-S)\int_{\Pi^m}\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\,dG(\mathbf{x})$ — соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Лебега–Стилтьеса функции G, черта сверху обозначает комплексное сопряжение, интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Лебега–Стилтьеса.

А для системы Уолша в $m-$мерном пространстве верна следующая теорема.

Теорема 2.4. *Если* $f : \Pi^m \to \mathbb{C}$ *— комплекснозначная интегрируемая по Лебегу функция, а* G *- комплекснозначная функция ограниченной вариации на* Π^m*, то для почти всех* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *функция* $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{t})$ *интегрируема в смысле Лебега–Стилтьеса по комплексной мере, определяемой функцией* $\overline{G}$*. Если* $\widehat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) = (L) \int\limits_{\Pi^m} \cdots \int f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{t}) \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$ *и* $\widehat{dG}(\mathbf{k}) = (L-S) \int\limits_{\Pi^m} \cdots \int \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, dG(\mathbf{x})$ *— соответственно коэффициенты Фурье–Лебега функции* $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{t})$ *и коэффициенты Фурье–Лебега–Стилтьеса функции* $G(\mathbf{t})$*,"*$\oplus$*" — групповая операция сложения — то равенство Парсеваля*

$$(L-S) \int\limits_{\Pi^m} \cdots \int f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{t})\, d\overline{G(\mathbf{t})} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{m}}} \widehat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

имеет место для почти всех $\mathbf{x}$ *в смысле суммируемости ряда любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду, интеграл в равенстве Парсеваля понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, а черта сверху означает комплексное сопряжение.*

В заключение приношу глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Т.П. Лукашенко за постановку задачи и руководство в подготовке работы.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. №6. С. 47-50.

[2] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля для кратных рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2007. №4. С. 8-12 .

[3] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара //Труды участников международной школы семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова// Ростов-на-Дону. 2002. С. 98-100.

[4] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля для рядов Фурье-Стилтьеса по системе Хаара // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2003. С. 11.

[5] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса по системе Хаара // Труды участников международной школы семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова// Ростов-на-Дону. 2004. С. 77-78.

[6] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля по системе Хаара для интеграла Лебега–Стилтьеса // XIV международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения. Тезисы докладов., Ростов-на-Дону. 2006. С. 9-10.

[7] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля по системе Хаара для произведения функций. // Современные методы теории функций и их приложения.Тезисы докладов 13-ой Саратовской зимней школы. Саратов. 2006. С. 10.

[8] *Алферова Е.Д.* Равенство Парсеваля по системе Хаара для интеграла Лебега–Стилтьеса // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2007. С. 7.