Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.745

Лосев Иван Вадимович

Классификация некоторых коизотропных действий алгебраических групп

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Эрнест Борисович Винберг.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Аркадий Львович Онищик;
доктор физико-математических наук,
доцент Дмитрий Иванович Панюшев.

Ведущая организация:
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 12 октября 2007г. в $16^{\underline{15}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 12 сентября 2007г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Гамильтоново действие алгебраической группы на неприводимом симплектическом алгебраическом многообразии называется коизотропным, если орбита общего положения является коизотропным подмногообразием. Аналогично определяются коизотропные гамильтоновы действия групп Ли на аналитических многообразиях. Особый интерес вызывают действия групп на кокасательных расслоениях к своим однородным пространствам. Если такое действие коизотропно, то однородное пространство называется слабо коммутативным.

Специальный класс коизотропных действий был впервые рассмотрен в работе Гийемина и Стернберга[1]. Именно, в этой работе рассматривались действия компактных групп Ли на кокасательных расслоениях однородных пространств. Интерес Гийемина и Стернберга к этим действиям объяснялся тем, что любая инвариантная гамильтонова система на соответствующем многообразии является интегрируемой в интегралах Нётер (т.е. первые интегралы могут быть полиномиально выражены через гамильтонианы действия). Оказывается, что этот факт верен для всех коизотропных действий (по крайней мере, в алгебро-геометрической ситуации). Этот результат получен в препринте Винберга и Якимовой[2]. Таким образом, коизотропные гамильтоновы действия играют важную роль в теории интегрируемых гамильтоновых систем.

В диссертации нас интересуют, в основном, вопросы классификации коизотропных действий. Поэтому мы перечислим классификационные результаты. Исследователей, преимущественно, интересовали два класса коизотропных действий:

1. Случай, когда группа компактна или редуктивна.

2. Случай, когда многообразие является кокасательным расслоением над однородным пространством с компактным стабилизатором.

В первом случае исключительно важную роль играют результаты Кнопа[3], из которых следует, что действие редуктивной группы G на кокасательном расслоении T^*X коизотропно тогда и только тогда, когда

[1]V. Guillemin, Sh. Sternberg, *Multiplicity-free spaces.* J. Diff. Geometry, 19(1984), p. 31-56.

[2]E.B. Vinberg, O.S. Yakimova. *Complete families of commuting functions for coisotropic Hamiltonian actions.* Preprint (2005), arXiv:math.SG/0511498.

[3]F. Knop. *Weylgruppe und Momentabbildung.* Invent. Math. 99(1990), p. 1-23.

G-многообразие X является сферическим, т.е. борелевская подгруппа группы G имеет открытую орбиту на X.

Имеются различные результаты, касающиеся классификации сферических многообразий. Во-первых, имеется классификация сферических однородных пространств с редуктивным стабилизатором (сам стабилизатор называется сферической подгруппой). В работе Крэмера[4] получена классификация редуктивных сферических подгрупп в простых группах. Классификация для непростых групп была получена независимо в работах Микитюка[5] и Бриона[6].

Следует отметить, что в указанных работах классификация осуществляется в явных терминах, т.е. алгебры Ли сферические подгрупп описываются, по сути, как подмножества в объемлющей алгебре Ли. Однако нередуктивных сферических подгрупп уже слишком много, и их явное описание, по видимому, невозможно. Подход к решению классификационной задачи в этом случае принадлежит Луне[7]. Идея этого подхода состоит в том, чтобы классифицировать сферические подгруппы в терминах некоторых комбинаторных данных. В настоящее время подход Луны реализован при ограничениях на группу G.

Второй класс сферических многообразий, для которых имеется явная классификация, – это сферические модули. Неприводимые сферические модули были классифицированы работе Каца[8]. Классификация в общем случае была получена в независимо Бенсоном-Ратклифф[9] и Леи[10].

Перейдем теперь к изложению результатов, касающихся классификации слабо коммутативных однородных пространств группы Ли G с компактным стабилизатором K.

Первая попытка систематического изучения таких пространств была предпринята в работе Э.Б. Винберга[11]. В этой работе были доказаны некоторые структурные теоремы о слабо коммутативных однородных пространствах с компактным стабилизатором. С их помощью в работе[12]

[4] M. Krämer. *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen.* Compos. Math. 38 (1979), 129-153.

[5] И.В. Микитюк. *Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами. Мат. сборник*, 129(1986), N4, с. 514-534.

[6] M. Brion. *Classification des espaces homogènes sphériques.* Compositio Math. 63(1987), 189-208.

[7] D. Luna. *Variétés sphériques de type A.* IHES Publ. Math., 94(2001), 161-226.

[8] V. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra 64(1980), 190-213.

[9] C. Benson, G. Ratkliff, *A classification of multiplicity free actions.* J. Algebra, 181(1996), p. 152-186.

[10] A.S. Leahy. *A classification of multiplicity free representations.* J. Lie Theory, v.8(1998), p. 367-391.

[11] Э.Б. Винберг. *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия.* УМН, т.56(2001), вып.1(337).

[12] Э.Б. Винберг. *Коммутативные однородные пространства гейзенбергова типа.* Труды ММО, N64(2003).

задача классификации была решена в случае, когда K является максимальной компактной подгруппой в G при некоторых дополнительных технических предположениях неприводимости на G. Классификация в общем случае была проведена в препринте Якимовой[13], её результаты можно найти также в статье[14].

Наконец, в препринте Ф. Кнопа[15] были классифицированы произвольные коизотропные представления редуктивных групп. К моменту появления этого препринта работа автора [1] (см. список литературы в конце автореферата), содержащая тот же классификационный результат, уже выходила из печати. Кроме того, отметим, что техника, использованная Кнопом существенно отличается от примененной в [1].

Цель работы.

Целью работы является

1. классификация коизотропных симплектических линейных действий редуктивных групп,
2. классификация слабо коммутативных однородных пространств нередуктивных алгебраических групп с редуктивным стабилизатором.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 114 страницах и состоит из введения и пяти глав. Библиография включает 43 наименования.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена полная классификация коизотропных линейных действий редуктивных алгебраических групп.

[13] O.S. Yakimova. *Gelfand pairs.* Bonner Mathematische Schriften, N.374. Bonn, 2005.

[14] O.S. Yakimova. *Principal Gelfand pairs.* Transformation groups, 11(2006),N2,p. 305-335.

[15] F. Knop. *Classification of multiplicity free symplectic representations.* Preprint (2005), arXiv: math.SG/0505268.

2. Получена классификация комплексных слабо коммутативных однородных пространств алгебраических групп G с редуктивным стабилизатором при некоторых технических предположениях. Именно, требуется, чтобы группа G обладала следующими свойствами:
   - Унипотентный радикал N группы G не является коммутативным.
   - Представление максимальной редуктивной подгруппы $L \subset G$ в векторном пространстве $N/(N, N)$ неприводимо.

Основные методы исследования.

При решении обеих классификационных задач мы пользуемся методами теории инвариантов, теории алгебраических групп преобразований, теории гамильтоновых действий групп Ли, теории представлений редуктивных алгебраических групп, и усовершенствованной в работе теории алгебраических гамильтоновых действий.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для теории гамильтоновых действий групп Ли, геометрии однородных пространств, теории интегрируемых систем, теории инвариантов.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Семинар "Коммутативные однородные пространства" под руководством Э. Б. Винберга, мех-мат МГУ, 2004 г. Доклады: "Классификация коизотропных симплектических представлений", "Слабо коммутативные комплексные однородные пространства специального вида".

2. Семинар "Algèbre et géométrie" под руководством М. Бриона и др., Universite J. Fourier, Grenoble, 2006. Доклад "Algebraic Hamiltonian actions".

3. Семинар "Lie groups" под руководством Ф. Кнопа, Rutgers University, New Brunswick, 2007. Доклад "Hamiltonian actions on affine varieties".

Публикации автора по теме диссертации.

Основное содержание диссертации опубликовано в трех работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения и пяти глав.

Во введении мы даем необходимые определения, приводим мотивации для изучения коизотропных действий и слабо коммутативных однородных пространств, формулируем основные результаты работы. В завершение введения мы приводим соглашения, которыми мы пользуемся в работе, и список обозначений. Сформулируем основные классификационные результаты.

Теорема 0.3.1. *Все неприводимые коизотропные линейные группы G приведены в таблице 1.*

Под коизотропной линейной группой мы понимаем образ группы при коизотропном линейном представлении.

Таблица 1: Неприводимые коизотропные группы

N	G	N	G
1	$\mathrm{Sp}(2l)$	2	$\bigwedge^3 \mathrm{SL}(6)$
3	$\mathrm{Spin}(11)$	4	$\mathrm{Spin}(13)$
5	$\bigwedge_0^3 \mathrm{Sp}(6)$	6	$\mathrm{Spin}_{\pm}(12)$
7	E_7	8	$S^3 \mathrm{SL}(2)$
9	$\mathrm{Sp}(2m) \otimes \mathrm{SO}(n)$	10	$\mathrm{Sp}(2m) \otimes \mathrm{Spin}(7)$
11	$\mathrm{SL}(2) \otimes \mathrm{Spin}(9)$	12	$\mathrm{SL}(2) \otimes G_2$
13	$\mathrm{Sp}(4) \otimes G_2$		

Приводимых коизотропных представлений уже очень много. Однако, можно выделить некоторый специальный класс *базовых* коизотропных представлений, классифицировать их, и показать, как свести классификацию всех коизотропных представлений к классификации базовых. Коизотропная линейная группа $G \subset \mathrm{Sp}(V)$ называется базовой, если она *неразложима*, т.е., не представляется в виде нетривиальной прямой суммы двух симплектических линейных групп, *насыщена*, т.е., централизатор G в $\mathrm{Sp}(V)$ содержится в G, и A_1-*нескленна*, т.е., каждая нормальная подгруппа в G типа A_1 представляется нетривиально лишь в одном минимальном симплектическом подмодуле в V.

Теорема 0.3.4. *Пусть G – базовая коизотропная линейная симплектическая группа. Тогда выполняется в точности одна из приведенных ниже трех возможностей:*

(1) Линейная группа G неприводима и содержится в таблице 1.

(2) G-модуль V имеет вид $V = U \oplus U^*$, где U – сферический G-модуль.

(3) Линейная группа G приведена в таблице 2.

Отметим, что из условия насыщенности следует, что линейная группа G однозначно восстанавливается по своему коммутанту.

Таблица 2: Базовые приводимые коизотропные группы

N	(G, G)
1	$A_5(\pi_3, \pi_1, \pi_5)$
2	$C_l(\pi_1, \pi_1, \pi_1), l > 1$
3	$C_3(\pi_3, \pi_1, \pi_1)$
4	$B_2(\pi_1, \pi_1, \pi_2)$
5	$D_6(\pi_5, \pi_1, \pi_1)$
6	$\mathrm{Spin}(12)$
7	$\bigwedge^3 \mathrm{Sp}(6)$
8	$(\mathrm{SL}(2) \oplus \mathrm{SL}(2)) \otimes \mathrm{SO}(n), n > 4$
9	$\mathrm{Sp}(2m) +_{\mathrm{Sp}(2m)} \mathrm{Sp}(2m) \otimes \mathrm{SO}(n)$
10	$\mathrm{Sp}(4) +_{\mathrm{Sp}(4)} \mathrm{Sp}(4) \otimes \mathrm{Spin}(7)$
11	$(\mathrm{SL}(2) \oplus \mathrm{SL}(2)) \otimes \mathrm{Spin}(7)$
12	$\mathrm{SL}(2) \otimes \mathrm{SO}(11) +_{\mathrm{SO}(11)} \mathrm{Spin}(11)$
13	$\mathrm{Sp}(2m) \otimes \mathrm{SO}(12) +_{\mathrm{Spin}(12)} \mathrm{Spin}_{\pm}(12)$
14	$\mathrm{Sp}(4) +_{\mathrm{Sp}(4)} \mathrm{SO}(5) \otimes \mathrm{Sp}(2m)$
15	$\mathrm{SL}(2) \otimes \mathrm{SO}(7) +_{\mathrm{Spin}(7)} \mathrm{Spin}(7) \otimes \mathrm{SL}(2)$
16	$\mathrm{SL}(2) \otimes \mathrm{SO}(8) +_{\mathrm{SO}(8)} \mathrm{Spin}_{+}(8) \otimes \mathrm{SL}(2)$

N	(G,G)
17	$\mathrm{SL}(2)\otimes\mathrm{SO}(8)+_{\mathrm{SO}(8)}\mathrm{Spin}_+(8)\otimes\mathrm{Sp}(4)$
18	$\bigwedge^3\mathrm{SL}(6)+_{\mathrm{SL}(6)}(\mathrm{SL}(6)\otimes\mathrm{SL}(2))^{sympl}$
19	$\mathrm{SL}(2)\otimes\mathrm{SO}(5)+_{\mathrm{SO}(5)}\mathrm{Sp}(4)^{sympl}$
20	$\mathrm{Sp}(2m)\otimes\mathrm{SO}(6)+_{\mathrm{SL}(4)}\mathrm{SL}(4)^{sympl}$
21	$\mathrm{SL}(2)\otimes\mathrm{SO}(6)+_{\mathrm{SL}(4)}(\mathrm{SL}(4)\otimes\mathrm{SL}(2))^{sympl}$
22	$\mathrm{SL}(2)\otimes\mathrm{SO}(7)+_{\mathrm{SO}(7)}\mathrm{Spin}(7)^{sympl}$
23	$\mathrm{SL}(2)\otimes\mathrm{SO}(8)+_{\mathrm{SO}(8)}\mathrm{Spin}_\pm(8)^{sympl}$
24	$\mathrm{SL}(2)\otimes\mathrm{SO}(10)+_{\mathrm{SO}(10)}\mathrm{Spin}_\pm(10)^{sympl}$

Отметим, что для восстановления всех коизотропных линейных групп из базовых необходимо также знать стабильные подалгебры общего положения для базовых коизотропных групп. Эти подалгебры также вычисляются в диссертации.

Перейдем к изложению классификации слабо коммутативных однородных пространств. Введем некоторые обозначения. Пусть H – редуктивная подгруппа в G, L – максимальная редуктивная подгруппа группы G, содержащая H, N – унипотентный радикал группы G, $\mathfrak{h},\mathfrak{l},\mathfrak{n}$ – соответствующие алгебры Ли. Слабая коммутативность пространства G/H зависит лишь от пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (или от тройки $(\mathfrak{n},\mathfrak{l},\mathfrak{h})$), поэтому мы можем говорить о слабо коммутативных парах (или тройках) алгебр Ли.

В сделанных технических предположениях ступень нильпотентности алгебры $\mathfrak{n}$ не превосходит 4. Однако, наиболее интересны случаи, когда эта ступень нильпотентности равна 2. Здесь мы ограничимся результатами классификации слабо коммутативных троек $(\mathfrak{n},\mathfrak{l},\mathfrak{h})$, удовлетворяющих этому дополнительному условию. Для алгебры Ли ступени нильпотентности 2 мы полагаем $\mathfrak{z}:=[\mathfrak{n},\mathfrak{n}],\mathfrak{v}:=\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$. Для симплектического модуля V через $\mathfrak{heis}(V)$ мы обозначаем соответствующую алгебру Гейзенберга.

Теорема 0.4.1. *Пусть $\mathfrak{n},\mathfrak{v},\mathfrak{z},\mathfrak{l}$ таковы, как описано выше. В пунктах (1),(2) алгебра $\mathfrak{l}$ предполагается полупростой.*

1. *Если $\dim\mathfrak{z}=1$, то тройка $(\mathfrak{n},\mathfrak{l},\mathfrak{l})$ слабо коммутативна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{n}=\mathfrak{heis}(V)$, где V – коизотропный симплектический $\mathfrak{l}$-модуль.*

2. *Слабо коммутативные тройки $(\mathfrak{n},\mathfrak{l},\mathfrak{l})$ со ступенью нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{n}$ равной 2 и неприводимым $\mathfrak{l}$-модулем $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ перечислены в таблице 3.*

(3) *Если алгебра $\mathfrak{l}$ не полупроста, то слабая коммутативность троек $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ и $(\mathfrak{n}, [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}], [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$ эквивалентна.*

Таблица 3: Слабо коммутативные тройки $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l})$

N	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{z}$
1	$\mathfrak{so}(n), n > 2, n \neq 4$	$V(\pi_1)$	$V(\pi_2)$
2	G_2	$V(\pi_1)$	$V(\pi_1)$
3	$\mathfrak{spin}(7)$	$V(\pi_3)$	$V(\pi_1)$
4	$\mathfrak{sl}(7)$	$V(\pi_3)$	$V(\pi_6)$
5	$\mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{so}(m), m \neq 2$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(\pi_2)$
6	$\mathfrak{so}(13)$	$V(\pi_6)$	$V(\pi_1)$
7	$\mathfrak{so}(14)$	$V(\pi_6)$	$V(\pi_1)$
8	$\mathfrak{sp}(2n), n > 1$	$V(\pi_1)$	$V(\pi_2)$
9	$\mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{spin}(7)$, n четно, или $n = 3, 5$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_3)$	$V(\pi_2)$
10	$\mathfrak{sl}(n) \times G_2$, $n = 3, 4$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(\pi_2)$
11	$\mathfrak{sl}(3) \times \mathfrak{spin}(9)$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_4)$	$V(\pi_2)$
12	$\mathfrak{sp}(4) \times \mathfrak{so}(n), n > 2$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(\pi_2)$
13	$\mathfrak{sp}(4) \times \mathfrak{spin}(7)$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_3)$	$V(\pi_2)$
14	$\mathfrak{sp}(2m) \times \mathfrak{sp}(2n), m \leqslant 2$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(2\pi_1)$
15	$\mathfrak{sl}(5) \times \mathfrak{sl}(2)$	$V(\pi_2) \otimes V(\pi_1)$	$V(\pi_4)$
16	$\mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{sp}(2m), n > 2$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(2\pi_1)$
17	$\mathfrak{spin}(9) \times \mathfrak{sl}(2)$	$V(\pi_4) \otimes V(\pi'_1)$	$V(\pi_1)$
18	$\mathfrak{spin}(10) \times \mathfrak{sl}(2)$	$V(\pi_4) \otimes V(\pi'_1)$	$V(\pi_1)$
19	$\mathfrak{spin}(13)$	$V(\pi_6)$	$V(\pi_1) \oplus V(0)$
20	$\mathfrak{sp}(2n), n > 1$	$V(\pi_1)$	$V(\pi_2) \oplus V(0)$
21	$\mathfrak{sp}(4) \times \mathfrak{so}(n), n > 2$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(\pi_2) \oplus V(0)$
22	$\mathfrak{sp}(4) \times \mathfrak{spin}(7)$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_3)$	$V(\pi_2) \oplus V(0)$
23	$\mathfrak{spin}(9) \times \mathfrak{sl}(2)$	$V(\pi_4) \otimes V(\pi_1)$	$V(\pi_1) \oplus V(0)$
24	$\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$	$V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$	$V(2\pi_1) \oplus V(2\pi'_1)$

Здесь π_i обозначают фундаментальные веса первой алгебры, а π'_j – второй.

Перейдем к изложению результатов для случая $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{h}$. Для этого нам потребуется несколько определений.

Мы говорим, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ *неразложима*, если не существует разложения $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^1 \times \mathfrak{l}^2$ в прямое произведение идеалов, для которого $\mathfrak{l}^2$ действует в $\mathfrak{n}$ тривиально и $\mathfrak{h} = (\mathfrak{l}^1 \cap \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{l}^2 \cap \mathfrak{h})$. Классификация в общем случае тривиально сводится к случаю неразложимых троек.

Мы говорим, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ *насыщена*, если $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = 1$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ представляется в $\mathfrak{v}$ нетривиально, и $\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Классификацию всех слабо коммутативных троек можно свести к классификации насыщенных.

Пусть $\mathfrak{l}_0$ – редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{h}_0$ – её редуктивная подалгебра, а $\mathfrak{n}$ – нильпотентная алгебра Ли, в которой действует дифференцированиями алгебра Ли $\mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2)$. Положим $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n), \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n-2)$, где идеал $\mathfrak{sl}(2)$ алгебры $\mathfrak{h}$ вложен диагонально в $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n)$. Мы говорим, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ получена из тройки $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{sl}(2))$ $\mathfrak{sl}(2)$-*удвоением.*

Теорема 0.4.6. *Следующие тройки насыщены, неразложимы и слабо коммутативны. Обратно, любая насыщенная неразложимая слабо коммутативная тройка есть одна из перечисленных.*

1. $(\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^{2m+2n}), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2m+2n), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2m) \times \mathfrak{sp}(2n)), (\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^{2n}), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2n) \times \mathfrak{sp}(2n), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2n)), (\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^7 \otimes \mathbb{C}^2), \mathbb{C} \times \mathfrak{so}(7) \times \mathfrak{sl}(2), \mathbb{C} \times G_2 \times \mathfrak{sl}(2))$.

2. $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ *получается однократным (соотв., двукратным)* $\mathfrak{sl}(2)$-*удвоением из тройки вида* $(\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^{2n}), \mathbb{C} \times \mathfrak{l}_1, \mathbb{C} \times \mathfrak{l}_1)$, *где* $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{sp}(2n)$ *– одна из следующих линейных алгебр Ли:* $\mathfrak{sp}(2m_1) \otimes \mathfrak{so}(m_2) \subset \mathfrak{sp}(2m_1m_2)$ *(*$m_1 = 1$ *или* $m_2 = 3, 4$*),* $\mathfrak{spin}(2k+1) \otimes \mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{sp}(2^{k+1}), k = 3, 4, G_2 \otimes \mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{sp}(14)$ *(соотв.* $\mathfrak{sp}(2m) \otimes \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{sp}(8m)$*).*

3. $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ *получается однократным или двукратным* $\mathfrak{sl}(2)$-*удвоением троек* $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1)$ *из следующего списка:*

   (a) $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(2n) \times \mathfrak{so}(m), n > 1, m = 3, 4$, $\mathfrak{v} = \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^{2m}, \mathfrak{z} = \bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n}$.

   (b) $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(5) \times \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{v} = \bigwedge^2 \mathbb{C}^5 \otimes \mathbb{C}^2, \mathfrak{z} = (\mathbb{C}^5)^*$.

   (c) $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{v} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2, \mathfrak{z} = S^2\mathbb{C}^n$.

   (d) $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{so}(10) \times \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{v} = \mathbb{C}^{16} \otimes \mathbb{C}^2, \mathfrak{z} = \mathbb{C}^{10}$ *(здесь* $\mathbb{C}^{16}$ *обозначает полуспинорный* $\mathfrak{so}(10)$*-модуль).*

Глава 1 не содержит новых результатов. Мы приводим там основные свойства коизотропных гамильтоновых действий, их численных инвариантов – коранга и дефекта, слабо коммутативных однородных пространств, и симплектических представлений редуктивных групп.

Глава 2 посвящена доказательству теоремы 0.2.5, которая для гамильтонова действия редуктивной группы на аффинном многообразии описывает стабилизатор общего положения, доказывает разделение орбит общего положения полиномиальными инвариантами, получает критерий стабильности такого действия и формулу для коранга через стабилизатор общего положения. Последняя (вместе с её следствиями) играет ключевую роль в классификации коизотропных линейных действий в главе 3. Основная идея доказательства теоремы 0.2.5 состоит в том, чтобы свести его к случаю многообразий очень специального вида (т.н. центрально-нильпотентных многообразий), а затем, исследуя структуру таких многообразий, доказать теорему для них. Для сведения мы используем теорему о локальном сечении, восходящую к Гийемину и Стернбергу[16]. Оказывается, что у любого гамильтонова многообразия есть некоторое локальное сечение, которое является центрально нильпотентным гамильтоновым многообразием для подходящей подгруппы Леви в G. Мы показываем, что достаточно доказать теорему 0.2.5 лишь для сечения. Затем мы исследуем структуру аффинных центрально-нильпотентных гамильтоновых многообразий, теорема 2.2.1. Эту теорему несложно вывести из результатов препринта автора[17], но мы приводим более прямое доказательство.

Наконец, мы применяем теорему 0.2.5 к линейным симплектическим действиям. Мы получаем рекуррентную формулу для вычисления коранга симплектического представления и его стабилизатора общего положения (точнее его связной компоненты), предложение 2.3.2.

Глава 3 посвящена классификации коизотропных линейных действий. Сначала мы классифицируем неприводимые коизотропные представления (теорема 0.3.1). Это делается с помощью формулы для коранга, полученной в теореме 0.2.5 и вычисления стабилизаторов общего положения неприводимых представлений, проведенного в работе Элашвили[18]. Далее мы применяем теорему 0.2.5 для доказательства предложений 0.3.2, 0.3.3, которые обеспечивают редукцию классификации к базовым случаям, и теорему 0.3.4. Основным средством используемым при доказательстве является предложение 2.3.2.

В главах 4,5 мы классифицируем слабо коммутативные однородные пространства при ограничениях на группу G, указанных выше.

[16]V. Guillemin, Sh. Sternberg, *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, 1984.

[17]I.V. Losev. *Algebraic Hamiltonian actions.* Preprint (2006), arXiv:math.AG/0601023.

[18]А.Г.Элашвили. *Стационарные подалгебры общего положения для неприводимых линейных групп Ли.* Функциональный анализ и его приложения, т.5, вып. 2, 1972, с. 65-78.

В главе 4 мы доказываем теорему 4.0.1. Сперва, мы доказываем предложение 4.1.1, дающее необходимые и достаточные условия слабой коммутативности тройки $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ в терминах корангов некоторых линейных симплектических действий, вообще говоря, нередуктивных групп. Следующим важным инструментом, применяемым для классификации, являются оценки на размерность пространства $\mathfrak{v}$, которые получаются из предложения 4.3.1. Последним подготовительным шагом является получение ограничений на вид L-модуля $\mathfrak{z}$, предложения 4.4.2-4.4.4. После этого мы переходим непосредственно к классификации, сначала для неприводимого модуля $\mathfrak{z}$ (это самая сложная часть классификации), затем в случае приводимого $\mathfrak{z}$ со ступенью нильпотентности алгебры $\mathfrak{n}$ равной 2, и, наконец, для ступени нильпотентности большей 2.

В главе 5 мы классифицируем слабо коммутативные тройки $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ с $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{h}$. В основе классификации (как и в случае компактного стабилизатора) лежит теорема 5.1.1, которая сводит проверку слабой коммутативности тройки $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ к проверке трех условий. Сформулируем эти условия в простейшем случае. Выберем элементы $\gamma \in \mathfrak{n}^*, \beta \in (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ общего положения. Теорема 5.1.1 утверждает, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ слабо коммутативна тогда и только тогда, когда

1. $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{l}_\gamma$,
2. тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}_\beta, \mathfrak{h}_\beta)$ слабо коммутативна,
3. пара $(\mathfrak{l}_\gamma, \mathfrak{h}_\gamma)$ слабо коммутативна.

В случае, когда алгебра $\mathfrak{l}_\gamma$ редуктивна, первое условие можно проверять с помощью результатов Онищика[19], а условие 3 – с помощью классификации Крэмера, Микитюка и Бриона. Однако, для случая, когда алгебра $\mathfrak{l}_\gamma$ не редуктивна, приходится применять другие средства, и этот случай представляет наибольшую трудность при классификации.

Благодарности.

Я благодарю моего научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Эрнеста Борисовича Винберга за постановку задач и внимание к работе. Я также благодарю к.ф.-м.н., доцента Дмитрия Андреевича Тимашева и к.ф.-м.н. Леонида Григорьевича Рыбникова за полезные обсуждения. Я выражаю благодарность коллективу кафедры высшей алгебры за теплую творческую атмосферу.

[19] А.Л. Онищик. *Разложения редуктивных групп Ли.* Мат. Сборник, 80(1969), 554-599.

Литература

[1] И.В. Лосев. *Коизотропные представления редуктивных групп.* Труды Московского Математического Общества, (66)2005, 156-183.

[2] И.В. Лосев. *О комплексных слабо коммутативных однородных пространствах.* Труды Московского Математического Общества, 67(2006), с. 228-255.

[3] И.В. Лосев. *Классификация слабо коммутативных комплексных однородных пространств.* Успехи Математических Наук 62(2007), N2, с. 181-182.