Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 511.9+514.174+519.17

Большакова Елена Алексеевна

О КОМБИНАТОРНОЙ СТРУКТУРЕ НЕПРИМИТИВНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ ПЕРВОГО ТИПА

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор $\boxed{\text{С.С. Рышков}}$
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук А.М. Райгородский кандидат физико-математических наук Ф.Я. Ветухновский
Ведущая организация:	Ивановский государственный университет

Защита диссертации состоится 17 ноября 2006г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 октября 2006г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ,
профессор В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Параллелоэдром n измерений называется n-мерный ограниченный выпуклый многогранник, параллельными копиями которого можно без пропусков и перекрытий по внутренним точкам замостить все n-мерное евклидово пространство E^n.

В XIX веке в классических работах Е.С. Федорова[1] и Г. Минковского[2] были заложены начала теории параллелоэдров. Особо значительное продвижение в этой теории совершил в начале XX века Г.Ф. Вороной[3].

Большой класс параллелоэдров составляют так называемые области Дирихле–Вороного точечных решеток. Вопрос о том, исчерпываются ли ими *все* параллелоэдры, до сих пор открыт. Вороной показал, что аффинно эквивалентны DV-областям все *примитивные* параллелоэдры[4], О.К. Житомирский несколько расширил этот класс[5], Б.Н. Делоне дал доказательство[6] для всех параллелоэдров размерности $n \leq 4$.

Одной из основных задач, связанных с параллелоэдрами, является перечисление всех их разновидностей. Полное описание трехмерных параллелоэдров дал Федоров[7], все четырехмерные параллелоэдры перечислил Делоне[8].

Чаще всего параллелоэдры классифицируют по L-типам. Первоначально это понятие определил Вороной. В дальнейшем оказалось, что удобно различать геометрический и арифметический L-типы параллелоэдра.

Перечисление L-типов пятимерных примитивных параллелоэдров выпол-

---

[1] Е.С. Федоров *Начала учения о фигурах* // Петербург, 1885; М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1953. 410 с.; Е.С. Федоров *Правильное деление плоскости и пространства* // Л., "Наука", 1979, 272 с..

[2] G. Minkowski *Algemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder* // Nachrichten von der K.Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-physikalische Klasse, 1897, S.198.

[3] Г.Ф. Вороной *Исследования о примитивных параллелоэдрах* // Собр. соч., т. 2, Киев, Изд-во АН УССР, 1952, с. 239–368.

[4] Г.Ф. Вороной *Исследования о примитивных параллелоэдрах* // Собр. соч., т. 2, Киев, Изд-во АН УССР, 1952, с. 239–368.

[5] O. Zitomirskij *Vershärfung eines Satzes von Woronoi* (О.К. Житомирский *Обобщение одной теоремы Вороного*) // Журнал Ленинградского физико-математического общества, 1929г. т. II, вып. II, с. 131–151. (Journal de la Société Physico-Mathématique de Léningrade t. II, fasc. II).

[6] B. Delaunay [B.N. Delone] *Sur la partition régulière l'espace a 4 dimensions* // Известия АН СССР, Отд. Физ.-Мат. Наук. – 1929. – №1 – С.79–110, – №2 – С.147–164.

[7] Е.С. Федоров *Правильное деление плоскости и пространства* // Л., "Наука", 1979, 272 с..

[8] Б.Н. Делоне *Геометрия положительных квадратичных форм* // УМН, 1937, вып. 3, с. 16–62, 1938, вып. 4, с. 102–164.

нили С.С. Рышков и Е.П. Барановский[9], а также, независимо, швейцарский геометр П. Энгель[10]. Результаты этих двух исследований не совсем совпадали (221 и 223 типа примитивных пятимерных параллелоэдров соответственно), сравнение предпринял В.П. Гришухин[11]. Итогом стало уточнение: существует ровно 222 типа примитивных пятимерных параллелоэдров.

В последнее время изучение DV-областей решеток сведено к изучению сумм Минковского конечного для каждого n числа так называемых *коренных* параллелоэдров благодаря теореме о коренных параллелоэдрах, сформулированной Рышковым[12]. Окончательные формулировки и подробные доказательства этой теоремы были опубликованы[13] в 2005г.

Тем не менее, найти общий конструктивных подход ко *всем* параллелоэдрам затруднительно. Поэтому изучаются и отдельные классы параллелоэдров. В частности, интерес вызывают параллелоэдры, являющиеся зоноэдрами (зоноэдральные параллелоэдры).

Исследованиями условий, необходимых или достаточных для того, чтобы зоноэдр был параллелоэдром, занимались H.S.M. Coxeter[14], П. Макмюллен[15], G.C. Shephard[16]. Зоноэдральные параллелоэдры тесно связаны с дайсингами[17], кроме того, существует соответствие между стандартными системами зонных

[9]Барановский Е.П., Рышков С.С. *Примитивные пятимерные параллелоэдры*// Доклады АН СССР, **212**(*3*) (1973), 532-535; С.С. Рышков, Е.П. Барановский *С-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий)* // Труды МИАН СССР, 137 (1976), 1–132.

[10]P. Engel *The contraction types of parallelohedra in* $\mathbb{R}^5$ // Acta Cryst. A., **56** (2000), 491–496.

[11]P. Engel, V. Grishukhin *There are exactly 222 L-types of primitive five-dimensional lattices* // Europ. J. Combinatorics, **23** (2002), 275-279.

[12]С.С. Рышков *О структуре примитивного параллелоэдра и о последней проблеме Вороного* // УМН, 1998, т.53, вып. 2(320), с. 161–162; С.С. Рышков *Прямое геометрическое описание произвольного n-мерного параллелоэдра второго типа Вороного* // Успехи матем. наук, – 1999. – т. 54, вып. 2. – с. 18–19; С.С. Рышков *Коренные параллелоэдры и вершины областей типа n-мерных параллелоэдров* // Материалы VII Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”, Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001, 279–281.

[13]С.С. Рышков, Е.А. Большакова *К теории коренных параллелоэдров* // Известия РАН сер. матем., т. 69, №6, 2005, с. 187 – 210.

[14]H.S.M. Coxeter *The classification of zonohedra by means of projective diagrams* // J. Math. Pures Appl., 41 (1962), 137-156.

[15]P. McMullen *Space tiling zonotopes* // Mathematika 22 (1975), 202-211.

[16]G.C. Shephard *Space-filling zonotopes* // Mathematika, 21 (1974), 261-269.

[17]R.M. Erdahl, S.S. Ryshkov *On Lattice dicing* // Europ.J.Combinatorics, **15** (1994), 459-481; R.M. Erdahl *Zonotopes, and Voronoi's conjecture on parallelohedra* // Voronoi's impact on modern science. Book II. Eds. P. Engel and H. Syta. National Academy of Sciences of Ukraine. Institute of Mathematics. Kyiv: Institute of Mathematics, 1998. 61–74; R.M. Erdahl *Zonotopes, dicings, and Voronoi's conjecture on parallelohedra* // Europ. J. Combinatorics **20** (1999), 527–549.

векторов зоноэдральных параллелоэдров и регулярными матроидами[18].

В настоящее время исследованиями по перечислению комбинаторных типов зоноэдральных параллелоэдров занимается П. Энгель[19]. Это перечисление выполняется в результате компьютерных расчетов. В настоящее время расчеты проведены вплоть до размерности 8.

Научная новизна

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем.

1. Построен метод установления комбинаторной структуры параллелоэдра первого типа по его символу;

2. доказан критерий, связывающий комбинаторную эквивалентность параллелоэдров первого типа с циклической неразличимостью соответствующих символов;

3. установлено, что непримитивные параллелоэдры первого типа комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие грани областей первого L-типа целочисленно унимодулярно эквивалентны.

Методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры, многомерной геометрии, теории выпуклых многогранников, методы геометрии чисел, в частности теории положительных квадратичных форм, методы теории графов.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы при изучении положительно определенных квадратичных форм, в теории параллелоэдров, для дальнейшего изучения зоноэдральных параллелоэдров.

[18] V. Danilov, V. Grishukhin *Maximal unimodular system of vectors* // Europ. J. Combinatorics **20** (1999), 507–526.

[19] P. Engel *Mathematical problems in modern crystallography* // Comput. Math. Appl., **16** (1988), 425-436, P. Engel, L. Michel, M. Senechal *Lattice Geometry* // IHES preprint, Bures-sur-Yvette, 2003.

Апробация работы

Результаты настоящей диссертации неоднократно докладывались автором на семинарах механико-математического факультета МГУ: на семинаре академика О.Б. Лупанова "Математические вопросы кибернетики", на семинаре "Дискретная геометрия и геометрия чисел" под руководством С.С. Рышкова, Н.П. Долбилина и Н.Г. Мощевитина, а также на конференциях: на коллоквиуме в Венском Техническом Университете (Вена, октябрь 2004г.), на 6-й международной конференции по геометрии и топологии (Черкассы, Украина, сентябрь 2005г.), на Международная научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 85-летию со дня рождения профессора С.Б. Стечкина и 75-летию ТулГУ (Тула, ноябрь 2005г.), на международной научной конференции "Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел и геометрии" (Москва, май 2006г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [1–4], список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы, включающего 38 наименований. Общий объем диссертации 86 страниц.

Краткое содержание диссертации

Первая глава глава носит технический характер. Она посвящена сравнению различных определений DV-области и L-разбиения, соответствующих положительно определенной квадратичной форме (ПКФ).

Определение (Г.Ф.Вороной). *Многогранник DV_{Bp} (соответствующий положительно определенной квадратичной форме (ПКФ) f) есть множество точек α, заданных координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$, удовлетворяющими неравенствам*

$$f(x) + 2(\alpha, x) \geq 0, \qquad x \in Z^n. \tag{1}$$

DV_{Bp}-разбиение получается переносом многогранника DV_{Bp} на все векторы вида tA, где $t \in Z^n$, A – матрица ПКФ f.

Определение (Б.Н.Делоне). *Многогранником $DV_{Дн}$ или областью Дирихле–Вороного некоторой точки N решетки Γ называется совокупность точек рассматриваемого n-мерного пространства, каждая из которых отстоит от точки N не дальше, чем от любой другой точки решетки Γ.*

Совокупность $DV_{Дн}$-областей всех точек решетки образует $DV_{Дн}$-разбиение. Это разбиение можно получить переносом $DV_{Дн}$-области начала координат на все векторы решетки.

Теорема 1. *Разбиения $DV_{Вр}$, $DV_{Дн}$евклидова пространства n измерений, отвечающие одной и той же ПКФ, аффинно эквивалентны друг другу.*

Кроме того, в первой главе рассматривается определение области Дирихле-Вороного, данное Венковым[20]. Оказывается, что эта область не совпадает ни с $DV_{Вр}$-, ни с $DV_{Дн}$- областью, хотя и аффинно им эквивалентна.

Далее, рассматривается взаимосвязь между определениями L-разбиения по Вороному и Делоне (они не совпадают, но аффинно эквивалентны), и L-типа ПКФ (совпадают).

Следует отметить, что определения Делоне более наглядны, но в некоторых случаях забытые определения Вороного дают больше возможностей. Так, доказательство теоремы о коренных параллелоэдрах[21] в системе определений Делоне было крайне трудно, фактически непригодно к опубликованию. Возвращение к определениям Вороного позволил сделать доказательство относительно простым[22].

Вторая и третья главы посвящены непримитивным параллелоэдрам первого типа.

Среди всех областей L-типа наиболее простое описание имеет *область первого типа*, при любом n представляющая собой симплициальный конус. Ей принадлежат квадратичные формы, представимые следующей суммой, в которой формально полагается $x_0 = 0$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{0 \le i < j \le n} \lambda_{ij}(x_i - x_j)^2, \text{ где } \lambda_{ij} \ge 0, \quad \sum \lambda_{ij}^2 > 0. \qquad (*)$$

[20]Б.А. Венков *О проектировании параллелоэдров* // Избранные труды, Ленинград, "Наука", Ленинградское отделение 1981, с. 362–379.

[21]С.С. Рышков *О структуре примитивного параллелоэдра и о последней проблеме Вороного* // УМН, 1998, т.53, вып. 2(320), с. 161–162, С.С. Рышков *Прямое геометрическое описание произвольного n-мерного параллелоэдра второго типа Вороного* // Успехи матем. наук, – 1999. – т. 54, вып. 2. – с. 18–19, С.С. Рышков *Коренные параллелоэдры и вершины областей типа n-мерных параллелоэдров* // Материалы VII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001, 279–281.

[22]см. ссылку 13.

Параллелоэдры, соответствующие квадратичным формам ранга 1 от n переменных суть отрезки. Таким образом, *все параллелоэдры первого типа суть суммы Минковского отрезков, т.е. зоноэдры.*

Поскольку параллелоэдры, соответствующие точкам одной и той же открытой грани области Δ_1, отличаются друг от друга только метрическими характеристиками, достаточно описать структуру одного параллелоэдра из этого множества, отвечающего "эталонной" квадратичной форме, в разложении $(*)$ которой каждый коэффициент λ_{ij} равен либо 0, либо 1.

Такие параллелоэдры (и квадратичные формы) описываются символом Рышкова: для квадратичной формы f от n переменных это граф с вершинами v_0, v_1, …, v_n, в котором ребро (v_i, v_j) присутствует тогда и только тогда, когда в разложении $(*)$ формы f коэффициент λ_{ij} равен 1.

Вторая глава посвящена построению метода явного описания структуры произвольного непримитивного n-мерного параллелоэдра первого типа по его символу. Этот метод существенно опирается на результаты о коренных параллелоэдрах.

Вводится естественное понятие *ранга* символа.

Определение. *Рангом* символа называется размерность соответствующего ему параллелоэдра (то есть ранг соответствующей символу "эталонной" квадратичной формы).

Доказывается ряд утверждений о ранге символа, из которых наиболее важным для последующих построений является следующее.

Утверждение 1. *Пусть символ G имеет t вершин и r компонент связности. Тогда ранг символа G равен $t - r$.*

Далее, для изучения k-мерных граней зоноэдрального параллелоэдра, порожденного системой отрезков S, требуется рассмотрение непополнимых подсистем системы S, имеющих ранг k. Для того, чтобы отыскать такие подсистемы по известному символу, вводится понятие k-вырезов и k-остатков графа (символа).

Определение. Множество $R(G)\subset E$ ребер произвольного простого разреза графа $G = (V, E)$ будем называть *1-вырезом* в графе G.

Определение. Граф $G_1 = (V, E \backslash R(G))$, получающийся удалением из графа $G = (V, E)$ некоторого 1-выреза $R(G)$, будем называть *1-остатком* (от) графа G.

Определение. Назовем *k-остатком* G_k графа G при $2 \le k \le n$ (где n – ранг символа G) всякий 1-остаток от какого-либо $(k-1)$-остатка графа G.

Определение. Назовем *k-вырезом* $R^k(G)$ в графе G объединение 1-вырезов $R(G)$, $R(G_1)$, …, $R(G_{k-1})$, выбранных соответственно из графов G, $G_1 = G \backslash R(G)$, $G_2 = G_1 \backslash R(G_1)$, …, $G_{k-1} = G_{k-2} \backslash R(G_{k-2})$.
Кроме того, k-вырез $R^k(G)$ будем называть *реализованным* последовательностью 1-вырезов $R(G)$, $R(G_1)$, …, $R(G_{k-1})$.

Между $(n-k)$-остатками символа и k-зонами граней соответствующего параллелоэдра существует взаимно однозначное соответствие:

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ – параллелоэдр первого типа, соответствующий символу G, а F – его грань размерности $k \leq n$. Тогда определяющим параллелоэдром для грани F (и для всякой другой грани F' параллелоэдра $\mathcal{P}$, параллельно конгруэнтной грани F, то есть для всей k-зоны, которой принадлежит грань F) служит параллелоэдр, отвечающий некоторому $(n-k)$-остатку графа G.*

Обратно, если G_{n-k} – $(n-k)$-остаток ($k \geq 1$) символа G и $\mathcal{P}_{(n-k)}$ – соответствующий ему параллелоэдр, то в параллелоэдре $\mathcal{P}$ есть k-зона граней, определяющим параллелоэдром для которой служит $\mathcal{P}_{(n-k)}$.

Для нахождения всех индивидуальных граней в k-зоне требуется изучение различных ориентаций ребер символа, входящих в соответствующий $(n-k)$-вырез.

Всякий 1-вырез $R(G)$ порождает разбиение множества вершин V графа G на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$), обладающих тем свойством, что множество ребер 1-выреза $R(G)$ совпадает с множеством всех таких ребер графа G, что одна из вершин ребра принадлежит множеству V_1, а другая – множеству V_2: $R(G) = \{(v_i, v_j) \in E \mid v_i \in V_1 \ , \ v_j \in V_2\}$.

Определение. *Допустимой ориентацией* 1-выреза $R(G)$ в графе G назовем такое приписывание направлений всем ребрам, входящим в этот вырез, что все начальные вершины ребер находятся в множестве V_1 или же все начальные вершины находятся в множестве V_2.

Определение. *Допустимой ориентацией* k-выреза $R^k(G)$ в графе G назовем всякое приписывание направлений всем ребрам, входящим в этот вырез, которое может быть получено в результате следующих шагов.

1. Выбор реализации k-выреза: $R^k(G) = R(G) \cup R(G_1) \cup \ldots \cup R(G_{k-1})$.

2. Выбор последовательно для каждого 1-выреза $R(G)$, $R(G_1)$, …, $R(G_{k-1})$ допустимой ориентации (соответственно в графах G, G_1, …, G_{k-1}).

3. Приписывание каждому ребру x, принадлежащему k-вырезу $R^k(G)$, того направления, которое оно получило на шаге 2 при выборе допустимой ориентации соответствующего 1-выреза.

Ориентации k-выреза $R^k(G)$, которые не могут быть получены в результате выполнения шагов 1–3, допустимыми не являются.

Направленному ребру $(\overrightarrow{u_i, u_k})$ будем ставить в соответствие вектор $p_{ik} = \frac{1}{2}(e_i - e_k)$. Ребру $(\overrightarrow{u_k, u_i})$ ставится в соответствие вектор $p_{ki} = -p_{ik} = \frac{1}{2}(e_k - e_i)$.

Определение. Вектором (пространства E^n), *представляющим* ориентированный допустимым образом k-вырез $R^k(G)$ $(k \geq 1)$ назовем сумму векторов, соответствующих ребрам этого k-выреза:

$$p_{R^k(G)} = \sum_{(\overrightarrow{u_i, u_k}) \in R^k(G)} p_{ik}.$$

Отклоняющими вектором грани $\mathcal{F}$ с центром симметрии $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ параллелоэдра $\mathcal{P}$ с центром симметрии $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ будем называть вектор $x = \overrightarrow{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$.

Доказывается, что отклоняющими векторами граней параллелоэдра первого типа являются векторы, представляющие допустимые ориентации соответствующего выреза:

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{P}$ – параллелоэдр первого типа, G – его символ, R^{n-k} – это $(n-k)$-вырез в графе G, и G_{n-k} – соответствующий $(n-k)$-остаток, $\mathcal{P}_*$ – параллелоэдр, отвечающий символу G_{n-k}. Среди k-мерных граней параллелоэдра $\mathcal{P}$, параллельно конгруэнтных параллелоэдру $\mathcal{P}_*$, тогда и только тогда есть грань с отклоняющим вектором x, когда существует такая допустимая ориентация $(n-k)$-выреза R^{n-k}, что $x = \sum_{(\overrightarrow{v_i, v_j}) \in R^{n-k}} (e_j - e_i)$, где $(\overrightarrow{v_i, v_j})$ – ребра ориентнированного $(n-k)$-выреза R^{n-k}, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – координатные векторы.*

Таким образом, чтобы перечислить все грани в k-зоне, достаточно найти все допустимые ориентации соответствующего $(n-k)$-выреза. Для формулировки конструктивного критерия допустимости ориентации выреза вводится понятие *когерентной* ориентации k-выреза (которое выделяет некоторый класс ориентаций, содержащий в себе все допустимые).

Определение. Пусть $R^k(G)$ – k-вырез в графе G, а G_k – соответствующий ему k-остаток. Назовем ориентацию ребер k-выреза $R^k(G)$ *когерентной*, если для любых двух различных компонент связности H_1 и H_2 в графе G_k справедливо одно из трех утверждений:

– k-вырез $R^k(G)$ не содержит ребер, соединяющих компоненты H_1 и H_2,

– все ребра k-выреза $R^k(G)$, соединяющие компоненты H_1 и H_2, выходят из H_1 и входят в H_2,

– все ребра k-выреза $R^k(G)$, соединяющие компоненты H_1 и H_2, выходят из H_2 и входят в H_1.

Очевидно, что допустимая ориентация k-выреза является его когерентной ориентацией. Обратное же утверждение, вообще говоря, неверно.

Для когерентно ориентированных вырезов вводится понятие *символа выреза*.

Определение. *Стягиванием* в графе $G = (V, E)$ множеств вершин $V_1 \subset V$, $V_2 \subset V$, …, $V_m \subset V$, обладающих тем свойством, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^m V_i = V$, будем называть переход к графу $G' = (V', E')$, образованному следующим образом: $V' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$, $E' = \{(v'_i, v'_j) \mid \exists (v_i, v_j) \in E, \ v_i \in V_i, \ v_j \in V_j\}$.
Если вершины графа G были помечены, вершину v'_i графа G' считаем помеченной всеми пометками вершин из множества V_i.

Определение. Символом k-выреза $R^k(G)$ в символе G будем называть граф, получающийся из графа G стягиванием по множествам вершин компонент связности k-остатка $G_k = G \backslash R^k(G)$.

Очевидно, имеет место взаимно однозначное соответствие между всеми когерентными ориентациями выреза и всеми ориентациями символа этого выреза.

Следующая теорема дает критерий допустимости ориентации k-выреза в графе (символе).

Теорема 4. *Пусть R^k – неориентированный вырез в графе G, а J – его символ. Тогда*

1. *всякой допустимой ориентации выреза R^k (и, тем самым, грани параллелоэдра $\mathcal{P}$, соответствующего символу G) соответствует такая ориентация символа J, что в нем нет ни одного орцикла;*
2. *обратно, всякой ориентации символа J без орциклов соответствует допустимая ориентация выреза R^k (и, тем самым, отклоняющий вектор некоторой грани параллелоэдра $\mathcal{P}$).*

Для того, чтобы указать инцидентность граней, вводится понятие допустимости ориентированного стягивания ребра в графе.

Определение. Будем говорить, что для ориентированного некоторым образом символа $J = (U, D)$ некоторого k-выреза $R^k(G)$ в графе G *допустимо ориентированное стягивание ребра* $(u_i, u_j) \in D$ (его направление не существенно), если для каждой вершины u графа J, за исключением вершин u_i и u_j, верно одно из трех утверждений:

1. Вершина u соединена ребром не более чем с одной из вершин u_i и u_j.

2. Оба ребра (u, u_i), (u, u_j) исходят из вершины u (т.е. имеют вид $(\overrightarrow{u, u_i})$, $(\overrightarrow{u, u_j})$).

3. Оба ребра (u, u_i), (u, u_j) входят в вершину u (т.е. имеют вид $(\overrightarrow{u_i, u})$, $(\overrightarrow{u_j, u})$).

Если это условие выполнено, *ориентированным стягиванием ребра* (u_i, u_j) в графе J назовем переход к графу $J' = (U', D')$, образованному следующим образом:
$U' = U \setminus \{u_i, u_j\} \cup u^*$,
$D' = D \setminus \{(u_i, u_j)\} \setminus \{(u_i, u) | u \in U, (u_i, u) \in D\} \setminus \{(u_j, u) | u \in U, (u_i, u) \in D\} \cup \{(\overrightarrow{u^*, u}) | (\overrightarrow{u_i, u}) \in D$ или $(\overrightarrow{u_j, u}) \in D\} \cup \{(\overrightarrow{u, u^*}) | (\overrightarrow{u, u_i}) \in D$ или $(\overrightarrow{u, u_i}) \in D\}$.

Вершину u^* получившегося графа считаем помеченной объединением тех множеств, которыми были помечены вершины u_i и u_j.

Будем также говорить, что граф G *допускает ориентированное стягивание* на граф G', если можно из графа G последовательными ориентированными стягиваниями ребер получить граф, изоморфный G'.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{P}$ – параллелоэдр, соответствующий символу G, а F_1 и F_2 – его грани. Пусть грань F_1 описывается ориентированным символом J_1 выреза $R^k(G)$, а грань F_2 – ориентированным символом J_2 выреза $R^m(G)$.*

Грань F_2 является гранью грани F_1 тогда и только тогда, когда символ J_2 допускает (как граф) стягивание на символ J_1.

Также во второй главе рассмотрены примеры.

В **третьей главе** исследуется связь между символами комбинаторно идентичных параллелоэдров первого типа.

Определение. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графа. Отображение $\varphi : E_1 \to E_2$ множества ребер первого графа в множество ребер второго графа *сохраняет* простой цикл C графа G_1, состоящий из ребер x_1, x_2, ..., x_k, если ребра $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_k)$ образуют, возможно в другом порядке, простой цикл в графе G_2.

Определение. Назовем два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ *циклически неразличимыми*, если между ребрами одного и другого графа установлено взаимно однозначное соответствие $\varphi : E_1 \to E_2$, удовлетворяющее условию: отображение φ сохраняет все простые циклы графа G_1, а обратное отображение $\varphi^{-1} : E_2 \to E_1$ сохраняет все простые циклы графа G_2.

Теорема 6 (Основная)**.** *Пусть G_1 и G_2 – два символа первого типа, f_1 и f_2 – соответствующие им квадратичные формы первого типа, а $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – соответствующие параллелоэдры. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1. *Параллелоэдры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ комбинаторно эквивалентны.*
2. *Символы G_1 и G_2 циклически неразличимы.*
3. *Квадратичные формы f_1 и f_2 целочисленно унимодулярно эквивалентны.*

Импликация $3 \Rightarrow 1$ теоремы 6 практически очевидна, особенно если принять во внимание, что двум целочисленно унимодулярным квадратичным формам соответствуют конгруэнтные решетки, а значит, и конгруэнтрые параллелоэдры (в определениях Делоне).

Для доказательства импликации $1 \Rightarrow 2$ важно следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть C_{n+1} – кольцо ранга n (то есть $(n+1)$-вершинное), $\mathcal{P}_C$ – параллелоэдр, соответствующий символу C_{n+1}. Пусть также G – некоторый символ первого типа, $\mathcal{P}_G$ – соответствующий ему параллелоэдр, и пусть параллелоэдры $\mathcal{P}_C$ и $\mathcal{P}_G$ комбинаторно эквивалентны.*
Тогда граф G также является кольцом на $n+1$ вершине.

Импликации $2 \Rightarrow 3$ дано два доказательства, опирающихся на теорему Уитни[23]. Первое из них проще, зато второе попутно положительно решает вопрос о возможности согласованной с отображением φ ориентации двух циклически неразличимых графов.

Пусть $G = (V, E)$ – граф, v' и v'' – две его вершины, V_1 и V_2 – такие множества вершин, что $V_1 \cup V_2 = V \setminus \{v', v''\}$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и в графе G нет ни одного ребра вида (v_1, v_2), где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Определение. *Обобщенным переключением* в графе $G = (V, E)$ по паре вершин (v', v'') с вариантным множеством V_1 будем называть переход к графу $\widehat{G} = (V, \widehat{E})$, где
$\widehat{E} = E|_{V_1 \cup \{v', v''\}} \cup E|_{V_2} \cup$
$\{(v_i, v') \mid (v_i, v'') \in E, v_i \in V_1\} \cup$
$\{(v_j, v'') \mid (v_i, v') \in E, v_j \in V_1\}$.

Теорема Уитни о циклически неразличимых графах. *Один из двух циклически неразличимых графов можно превратить в другой последовательностью обобщенных переключений.*

[23] H. Whitney *2-isomorphic graphs* // Amer. J. Math., **55**(1933), № 2, 245–254.

А именно, если G_1 и G_2 – циклически неразличимые графы, то существует последовательность обобщенных переключений, преобразующая граф G_2 в изоморфный графу G_1, то есть

$$G_1 \simeq \mathrm{Sw}_{(v_{k_1} v_{k_2})}(\mathrm{Sw}_{(v_{k_3} v_{k_4})}(\dots \mathrm{Sw}_{(v_{k_\mu} v_{k_{\mu+1}})}(G_2))). \qquad (**)$$

Импликация $2 \Rightarrow 3$ следует, например, из теоремы Уитни и следующего утверждения.

Утверждение 3. *Пусть символ G_2 получается из символа G_1 переключением по паре вершин (v_m, v_p), то есть $G_2 = \mathrm{Sw}_{(v_m, v_p)}(G_1)$.*
Тогда соответствующие квадратичные формы f_1 и f_2 целочисленно унимодулярно эквивалентны.

Доказательство этого утверждения конструктивно: в явном виде указывается целочисленное унимодулярное преобразование переменных, переводящее квадратичную форму f_1 в f_2. Композиция таких преобразований, соответствующих всем переключениям в соотношении $(**)$, и дает преобразование для пары циклически неразличимых символов.

Для второго доказательства импликации $2 \Rightarrow 3$ вводится понятие согласованной ориентации циклически неразличимых символов.

Пусть G_1 и G_2 – циклически неразличимые графы, ребрам которых приписаны некоторые направления. Пусть C_1 – простой цикл в графе G_1, а C_2 – соответствующий ему простой цикл в графе G_2.

Определение. Будем называть циклы C_1 и C_2 *сонаправленными*, если для заданного направления обхода цикла C_1 существует направление обхода цикла C_2, для которого выполнено следующее:
если при обходе цикла C_1 ребра x_1, x_2, ..., x_k направлены "по обходу", а ребра y_1, y_2, ..., y_l – "против обхода" (в порядке, не обязательно совпадающим с указанным), то при обходе цикла C_2 ребра $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_k)$ также направлены "по обходу", а ребра $\varphi(y_1)$, $\varphi(y_2)$, ..., $\varphi(y_l)$ – "против обхода" (в порядке, не обязательно совпадающим с указанным или с тем, в котором их прообразы входят в цикл C_1).

Импликация $2 \Rightarrow 3$ основной теоремы следует из двух утверждений:

Утверждение 4 (Эквивалентность согласованно ориентированных символов). *Пусть $G_1 = (V, E)$ и $G_2 = (U, D)$ – циклически неразличимые, согласованно ориентированные символы.*
Тогда существует целочисленное унимодулярное отображение, переводящее символ G_1 в символ G_2.

Утверждение 5 (Существование согласованной ориентации). *Пусть G_1 и G_2 – циклически неразличимые графы. Тогда существует их согласованная ориентация.*

Теорема Уитни используется для доказательства существования согласованной ориентации.

Второе доказательство во многих случаях дает более удобный способ явного указания целочисленного унимодулярного преобразования для пары циклически неразличимых символов G_1 и G_2: согласованная ориентация часто строится просто "на глаз", а после этого достаточно выбрать каркас в символе G_1, соответствующий ему каркас в символе G_2 и решить несложную систему уравнений для нахождения преобразования для этой пары каркасов.

Наконец, в третьей главе приведены аналоги теоремы 6 для случая, когда рассматриваются не только "эталонные" квадратичные формы из замкнутой области первого типа, а также для случая, когда квадратичные формы первого типа принадлежат не обязательно главной области.

Теорема 7. *Пусть f_1 и f_2 – две квадратичные формы первого типа, представленные в виде разложения $(*)$, не обязательно "эталонные", Δ_1^1 и Δ_1^2 – открытые грани главной области первого типа, которым принадлежат эти формы. Пусть также $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – параллелоэдры, соответствующие квадратичным формам f_1 и f_2, а G_1 и G_2 – символы этих граней Δ_1^1 и Δ_1^2.*
Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1. *Параллелоэдры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ комбинаторно эквивалентны.*
2. *Символы G_1 и G_2 циклически неразличимы.*
3. *Грани Δ_1^1 и Δ_1^2 целочисленно унимодулярно эквивалентны.*

Теорема 8. *Пусть f_1 и f_2 – две квадратичные формы первого типа, не обязательно из главной области, Δ_1^1 и Δ_1^2 – открытые грани областей L-типа, которым принадлежат эти формы. Пусть также $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – параллелоэдры, соответствующие квадратичным формам f_1 и f_2. Параллелоэдры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда грани Δ_1^1 и Δ_1^2 целочисленно унимодулярно эквивалентны.*

Следует заметить, что теорема 8 положительно решает вопрос об эквивалентности понятий комбинаторного типа и L-типа параллелоэдров в частном случае (непримитивных параллелоэдров первого типа).

Автор глубоко благодарен Сергею Сергеевичу Рышкову, своему научному руководителю, за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также всему коллективу кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ за внимательное отношение и доброжелательную атмосферу.

Работы по теме диссертации

[1] Е.А. Большакова *DV-разбиение и L-разбиение по Г.Ф. Вороному, Б.Н. Делоне и Б.А. Венкову* // Чебышевский сборник 2004г. т.5 вып. 2(10), с.30–41.

[2] Е.А. Большакова *Непримитивные n-мерные параллелоэдры первого типа: комбинаторика и символы* // Успехи математических наук, т. 61, вып. 3, 2006г., стр. 167–168.

[3] Е.А. Большакова *О параллелоэдрах, связанных с некоторыми графами* // Тезисы докладов 6-ой международной конференции по геометрии и топологии, Черкассы, 2005, с. 10–11.

[4] Е.А. Большакова *О структуре параллелоэдров первого типа и о связанных с ними графах* // Тезисы докладов международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященной 85-летию со дня рождения профессора С.Б.Стечкина и 75-летию ТулГУ, Тула, 2005, с. 59–62.