Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.33+517.5

Уланский Евгений Александрович

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИЛОГАРИФМОВ И КРАТНЫХ ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН, профессор Юрий Валентинович Нестеренко
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Владислав Хасанович Салихов
	кандидат физико-математических наук, Сергей Алексеевич Злобин
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 12 октября 2007 г. в 16 ч. 15 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 12 сентября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена исследованию свойств обобщенных полилогарифмов и кратных дзета-значений. Ее тематика мотивирована исследованиями арифметических свойств значений дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в целых точках. Еще Эйлер[1] установил, что $\zeta(2k)\pi^{-2k} \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$. Известно также, что $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (Р. Апери[2], 1978) и что среди чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ хотя бы одно иррационально (В. Зудилин[3], 2004). Более того, размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного значениями дзета-функции Римана в нечетных точках, бесконечна (Т. Ривоаль[4], 2000). Доказательства указанных результатов используют тот факт, что значения $\zeta(k)$ при натуральных $k > 1$ связаны со значениями полилогарифмических функций $Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ в точке $z = 1$, точнее $\zeta(k) = Li_k(1)$. Именно аналитические свойства полилогарифмов используются при доказательстве арифметических результатов о значениях дзета функции Римана в нечетных точках.

Эйлер первым рассматривал кратные ряды вида

$$\zeta(\bar{s}) = \zeta(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}\,, \quad \bar{s} \in \mathbb{N}^k,\ s_1 > 1 \tag{1}$$

– так называемые кратные дзета-значения. Он в частности доказал равенство $\zeta(2,1) = \zeta(3)$. Позднее появились и обобщенные полилогарифмы

$$\mathrm{Li}_{\bar{s}}(z) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}\,, \quad \bar{s} \in \mathbb{N}^k. \tag{2}$$

Результат Апери[2] инициировал появление ряда работ (Хоффман[5], Загир[6], Гончаров[7] и другие), посвященных свойствам кратных дзета-значений и

[1] *Euler L.* Meditationes circa singulare serierum genus. Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. 1775. Vol. 20. P. 140 – 186; Reprinted: Opera Omnia Ser. I. Vol. 15. Berlin: Teubner, 1927. P. 217 – 267.

[2] *Apery R.* Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. // Astérisque 1979. V. 61. P. 11–13.

[3] *Zudilin W.* Arithmetic of linear forms involving odd zeta values. J. Théorie Nombres Bordeaux. 2004. V. 16. №1. P. 251–291; http://arxiv.org/abs/math/0206176.

[4] *Rivoal T.* La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270.

[5] *Hoffman M.E.* Multiple harmonic series. Pacific Journal of Mathematics 1992. Vol. 152. № 2. P. 275 – 290.

[6] *Zagier D.* Values of zeta functions and their applications. First European Congress of Mathematics (Paris, 1992). Vol. II. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 497 – 512.

[7] *Goncharov A.B.* Polylogarithms in arithmetic and geometry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 1, 2 (Zurich, 1994). P. 374 – 387. Birkhäuser, Basel, 1995.

обобщенных полилогарифмов. Результаты настоящей диссертации относятся к этой, активно развивающейся в последние годы области исследований.

Цель работы

Целью настоящей работы является исследование поведения обобщенных полилогарифмов под действием на аргумент группы дробно-линейных преобразований определенного вида; исследование свойств интегральных представлений для обобщенных полилогарифмов; оценка размерности линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного значениями функций Лерха с рациональным параметром в рациональной точке.

Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты:

1. Впервые получены общие тождества, описывающие поведение обобщенных полилогарифмов при дробно-линейных преобразованиях аргумента специального вида.
2. Доказана общая теорема о преобразовании кратных интегралов гипергеометрического типа при замене аргумента $z \to \frac{-z}{1-z}$.
3. Получена оценка снизу размерности линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного значениями функций Лерха с рациональным параметром и в рациональной точке.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории функций комплексного переменного и теории трансцендентных чисел.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны специалистам, изучающим свойства полилогарифмов, дзета-функции Римана, гипергеометрической функции и гипергеометрических интегралов.

Апробация работы

Результаты настоящей диссертации докладывались автором на следующих семинарах Механико-математического факультета МГУ и научных конференциях:
1. Научно-исследовательский семинар по теории чисел под руководством Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитина, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005гг.;
2. "Диофантовы приближения и трансцендентные числа"под руководством Ю.В. Нестеренко, В.В. Зудилина, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005гг.;
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2002"(Россия, г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 8–13 апреля 2002г.);
4. 6-я международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященная 100-летию Н.Г. Чудакова (Россия, г. Саратов, СГУ, 13–17 сентября 2004г.);
5. Международная конференция "Диофантовы и аналитические проблемы теории чисел", посвященная 100-летию А.О. Гельфонда (Россия, г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 29 января – 2 февраля 2007г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приводится в конце автореферата [1–4].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав (одна из которых является введением) и библиографии (28 наименований). Общий объем диссертации составляет 80 страниц.

Краткое содержание работы

1. Содержание главы 1.

В первой главе, которая является введением, изложена краткая история исследуемого вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты диссертации. Наряду с (2) удобно ввести и другое обозначение для полилогарифмов, использующее в качестве индексов слова алфавита, состоящего из двух букв $\{x_0, x_1\}$. Пусть $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$. Для каждого слова $\omega = x_0^{s_1-1}x_1x_0^{s_2-1}x_1 \ldots x_0^{s_k-1}x_1$, заканчивающегося буквой

x_1, положим

$$\mathrm{Li}_\omega(z) = \sum_{n_1>n_2>\ldots>n_k\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}} \tag{3}$$

и

$$\mathrm{Le}_\omega(z) = \sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_k\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}. \tag{4}$$

Ряды в правых частях (3) и (4) сходятся в области $|z| < 1$. Между мультииндексами и словами из этих двух определений устанавливается взаимно-однозначное соответствие

$$(s_1, s_2, \ldots, s_k) \;\longleftrightarrow\; x_0^{s_1-1} x_1 x_0^{s_2-1} x_1 \ldots x_0^{s_k-1} x_1,$$

однако оно затрагивает лишь слова, заканчивающиеся на букву x_1. Для остальных слов определение обобщенного полилогарифма дается следующим образом. Для пустого слова $\varnothing$ полагается $\mathrm{Li}_\varnothing(z) = 1$. Для слов, заканчивающихся на x_0

$$\mathrm{Li}_w(z) = \begin{cases} \dfrac{\ln^j z}{j!}\,, & \text{если } w = x_0^j,\ j \geqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^z \omega_i(t) \cdot \mathrm{Li}_v(t)dt\,, & \text{если } w = x_i v \text{ и } l(w) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z}\,, \quad \omega_1(z) = \frac{1}{1-z}\,.$$

Пусть X есть множество всех слов, состоящих из букв x_0 и x_1, содержащее в том числе и пустое слово. Заметим, что определения (3) и (5) дают одни и те же функции для слов, заканчивающихся на x_1, таким образом определение (5) корректно задает обобщенные полилогарифмы для всего множества слов X.

Для любого слова w множества X определен вес $|w|$, который равен количеству всех букв в этом слове, и длина $l(w)$, равная количеству букв x_1, встречающихся в этом слове. В частности, если $|w| = l(w) = k$, то $w = x_1^k$. Для пустого слова полагается $|\varnothing| = l(\varnothing) = 0$. Кроме того, используется запись $\tau v = \omega$, означающая, что если записать подряд слова τ и v, то получится слово ω.

Из определения (5) следует, что обобщенные полилогарифмы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{x_0 w}(z) = \frac{1}{z}\mathrm{Li}_w(z), \quad \frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{x_1 w}(z) = \frac{1}{1-z}\mathrm{Li}_w(z), \tag{6}$$

что верно для любого слова $w \in X$.

2. Содержание главы 2.

Во второй главе исследуется поведение обобщенных полилогарифмов под действием преобразований $\frac{-z}{1-z}$ и $1-z$. Эти преобразования порождают группу из шести дробно-линейных преобразований, переставляющих точки $0, 1$ и ∞. Ситуацию с первым из этих преобразований исчерпывающе описывает

Теорема 1. *Для любых целых неотрицательных чисел* $s_1, \ldots, s_n$ *и комплексного числа* z *с условиями* $|z| < 1$, $|\frac{-z}{1-z}| < 1$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{Li}_{x_0^{s_1}x_1 \ldots x_0^{s_n}x_1}\left(\frac{-z}{1-z}\right) = (-1)^n \sum_{\substack{|v_1|=s_1,\ldots,|v_n|=s_n \\ v_1,\ldots,v_n \in X^*}} \mathrm{Li}_{v_1x_1\ldots v_nx_1}(z) \ .$$

Суммирование ведется по всем словам $v_1, \ldots, v_n \in X$, имеющим веса $s_1, \ldots, s_n$ соответственно. Эти веса могут равняться в том числе и нулю.

Соответствующий результат для $\mathrm{Le}_{x_0^{s_1}x_1 \ldots x_0^{s_n}x_1}\left(\dfrac{-z}{1-z}\right)$ дает

Теорема 2. *Для любого комплексного числа* z *с условиями* $|z| < 1$, $\left|\dfrac{-z}{1-z}\right| < 1$ *и произвольного слова* $v \in X$ *выполнено*

$$\mathrm{Le}_{vx_1}\left(\frac{-z}{1-z}\right) = -\mathrm{Le}_{\sigma(v)x_1}(z) \ .$$

Здесь в формулировке теоремы было использовано преобразование слов σ, меняющее между собой буквы x_0 и x_1.

Далее доказывается

Предложение 1.

$$\mathrm{Li}_{x_0^{i_1}x_1 \cdots x_0^{i_q}x_1x_0^n}(z) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{\ln^m(z)}{m!} \times$$
$$\times \sum_{j_1+\ldots+j_q=n-m} C_{i_1+j_1}^{j_1} \cdots C_{i_q+j_q}^{j_q} \, \mathrm{Li}_{x_0^{i_1+j_1}x_1 \cdots x_0^{i_q+j_q}x_1}(z) \ ,$$

где $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$ – биномиальные коэффициенты.

Это предложение позволяет явно выразить обобщенные полилогарифмы, соответствующие словам из Xx_0, которые до этого были определены рекуррентно с помощью (5), через $\ln(z)$ и обобщенные полилогарифмы, соответствующие словам из Xx_1.

В случае с преобразованием $z \to 1 - z$ выполняется

Теорема 3. *Пусть имеется слово ω из X и комплексное число z с условиями $|z| < 1$, $|1 - z| < 1$. Тогда*

$$\mathrm{Li}_\omega(1 - z) = \sum_{\tau\upsilon=\omega} (-1)^{|\tau|} D_\upsilon \cdot \mathrm{Li}_{\sigma(\tau)}(z),$$

где D_υ константы, причем $D_\varnothing = 1$, $D_\upsilon = \mathrm{Li}_\upsilon(1)$, если υ начинается с x_0 и

$$D_\upsilon = -\sum_{\substack{\lambda\mu=\upsilon \\ |\lambda|>0}} (-1)^{|\lambda|} D_\mu \cdot \mathrm{Li}_{\sigma(\lambda)}(1), \tag{7}$$

если υ начинается с x_1.

Равенство (7) рекуррентно определяет числа D_υ, $\upsilon \in X$.

С помощью предложения 1 и теоремы 3 доказывается линейная независимость обобщенных полилогарифмов и алгебраическая независимость классических полилогарифмов $\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ над $\mathbb{C}(z)$. Доказательство линейной независимости проводится по той же схеме, что и в работе Мина и Петито,[8] однако ключевая лемма, используемая в данном доказательстве в нашем случае сформулирована более полно и доказывается с помощью теоремы 3.

Алгебраическая независимость классических полилогарифмов следует из общей леммы, доказанной в 1961 году Шидловским.[9] Мы предоставляем собственное доказательство, проведенное с помощью метода, которым были получены большинство результатов настоящей диссертации.

3. Содержание главы 3.

В главе 3 изучаются свойства интеграла

$$\mathrm{J}_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}|z) = \\ = \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^m} \cdots \int \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{a_i - 1}(1 - x_i)^{b_i - a_i - 1}}{(1 - z \cdot x_1 \cdots x_i)^{c_i}} dx_1 \cdots dx_m,$$

где

$$\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m), \quad \bar{b} = (b_1, \ldots, b_m), \quad \bar{c} = (c_1, \ldots, c_m).$$

[8] *Minh Hoang Ngoc, M. Petitot, and J. Van Der Hoeven.* L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices. SFCA'99, Séries formelles et combinatoire algébraique, Barcelone, 1999.

[9] *Шидловский А.Б.* О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций. Вестник МГУ, Сер. 1, Математика, механика. 1961. № 5. Стр. 44 – 59.

При выборе параметров $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0,\ c_m = a_0$ данный интеграл представляет собой обобщенную гипергеометрическую функцию

$$\mathrm{J}_m(\bar{a};\bar{b};\bar{c}|z) = {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left(\begin{array}{c} a_0, a_1, \ldots, a_m \\ b_1, \ldots, b_m \end{array}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0)_k (a_1)_k \cdots (a_m)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!}\ , \tag{8}$$

где $(a)_k = \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$. При $m = 1$ эта функция называется гипергеометрической функцией Гаусса и в области $|arg(1-z)| < \pi$ для нее справедливо классическое равенство

$${}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} a_0, a_1 \\ b_1 \end{array}\middle| \frac{-z}{1-z}\right) = (1-z)^{a_1}\ {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} b_1 - a_0, a_1 \\ b_1 \end{array}\middle| z\right).$$

Следующая теорема, как видно из (8), является обобщением данного равенства.

Теорема 4. *Пусть* $z, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C},\ |arg(1-z)| < \pi$ *и* $Re\,(a_i) > 0,\ b_i - a_i \in \mathbb{N}$ *при* $i = 1, \ldots, m$. *Тогда*

$$\mathrm{J}_m\left(\bar{a};\bar{b};\bar{c}\,\middle|\frac{-z}{1-z}\right) \ = \ (1-z)^{a_1}\ \mathrm{J}_m(\bar{a};\bar{b};\bar{b}-\bar{a}\,'-\bar{c}|z),$$

где

$$\bar{a}\,' = (a_2, \ldots, a_m, 0).$$

Далее с помощью некоторых интегральных преобразований доказывается теорема о выражении друг через друга функций $\mathrm{Li}_{\bar{s}}(z)$ и $\mathrm{Le}_{\bar{s}}(z)$.

Теорема 5. *Пусть* $s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Le}_{x_0^{s_1}x_1 \cdots x_0^{s_{l-1}}x_1 x_0^{s_l}x_1}(z) \ &= \sum_{i_1,\ldots,i_{l-1}\in\{0;1\}} \mathrm{Li}_{x_0^{s_1}x_{i_1} \cdots x_0^{s_{l-1}}x_{i_{l-1}} x_0^{s_l}x_1}(z), \\
\mathrm{Li}_{x_0^{s_1}x_1 \cdots x_0^{s_{l-1}}x_1 x_0^{s_l}x_1}(z) \ &= \sum_{i_1,\ldots,i_{l-1}\in\{0;1\}} (-1)^{l-1-i_1-\ldots-i_{l-1}} \mathrm{Le}_{x_0^{s_1}x_{i_1} \cdots x_0^{s_{l-1}}x_{i_{l-1}} x_0^{s_l}x_1}(z).
\end{aligned}$$

Также в этой главе доказывается теорема о стаффл-произведении обобщенных полилогарифмов кратного аргумента. Для того, чтобы ее сформулировать введем дополнительные обозначения. Положим $y_s = x_0^{s-1}x_1$. Тогда произвольное слово $\omega \in Xx_1$ можно записать двумя способами:

$$\omega = x_0^{s_1-1}x_1 x_0^{s_2-1}x_1 \ldots x_0^{s_k-1}x_1 = y_{s_1}y_{s_2}\ldots y_{s_k}.$$

Также будем обозначать через Y и Y^* множества линейных комбинаций над $\mathbb{Q}$ слов из $Xx_1 \cup \{\varnothing\}$ и $x_0Xx_1 \cup \{\varnothing\}$ соответственно.

Для слов $\omega \in Xx_1$ и $|z_i| < 1,\ i = 1, \ldots, l(\omega)$ обобщенным полилогарифмом кратного аргумента называется ряд

$$\mathrm{Li}_\omega(\bar{z}) = \mathrm{Li}([\omega; \bar{z}]) = \mathrm{Li}_{y_{s_1} y_{s_2} \ldots y_{s_k}}(z_1, \ldots, z_k) \ = \sum_{n_1 > n_2 > \ldots > n_k \geqslant 1} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_k^{n_k}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}} \ . \tag{9}$$

Положив $\mathrm{Li}_\varnothing(\varnothing) = 1$, это определение можно распространить по линейности и на множество Y. При этом нужно понимать, что каждому слову из линейной комбинации $\sigma \in Y$ соответствует кратный аргумент обобщенного полилогарифма и кратность аргумента равна длине этого слова.

Операция стаффл-произведения определяется следующими правилами

$$\begin{aligned} &1.) & u * \varnothing = \varnothing * u = u \ ; \\ &2.) & uy_j * vy_i = (u * v) y_{i+j} + (u * vy_i) y_j + (uy_j * v) y_i \ , \end{aligned}$$

где $u, v \ \in \ Xx_1$. Нетрудно заметить, что $u * v \ \in \ Y$. При этом, если $u, v \in x_0 X x_1$, то $u * v \in Y^*$.

Зададим отображение $\zeta \ : \ Y^* \ \to \ \mathbb{R}$ правилами

$$\begin{aligned} &1.) & \zeta(\varnothing) = 1 \ ; \\ &2.) & \zeta(y_{s_1} \ldots y_{s_k}) = \zeta(s_1, \ldots, s_k) \ . \end{aligned}$$

На все множество Y^* отображение распространяется по линейности.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\zeta(u * v) = \zeta(u) \cdot \zeta(v).$$

Это означает, что произведение кратных дзета-значений может быть представлено в виде линейной комбинации некоторых других кратных дзета-значений с рациональными коэффициентами.

Первое доказательство теоремы о стаффл-произведении для кратных дзета-значений принадлежит Хоффману[10]. В работе Зудилина[11] также можно найти доказательство этой теоремы.

Мы доказываем, что результат теоремы о стаффл-произведении можно распространить на обобщенные полилогарифмы кратного аргумента (9).

[10] *Hoffman M.E.* Multiple harmonic series. Pacific Journal of Mathematics 1992. Vol. 152. № 2. P. 275 – 290.

[11] *Зудилин В.В.* Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений. Успехи математических наук 2003. Том 58. № 1. Стр. 3 – 32.

Для начала введем определение стаффл-произведения пар слов и кратных аргументов.

$$\begin{aligned} &1.) \quad [u;\bar z]*[\varnothing;\varnothing] \;=\; [\varnothing;\varnothing]*[u;\bar z] \;=\; [u;\bar z]\ ,\\ &2.) \quad [uy_j;\bar z, z_{l+1}]*[vy_i;\bar q, q_{k+1}] \;=\; \big([u;\bar z]*[v;\bar q],[y_{i+j};z_{l+1}\cdot q_{k+1}]\big) \;+\\ &\qquad + \;\big([u;\bar z]*[vy_i;\bar q,q_{k+1}],[y_j;z_{l+1}]\big) \;+\; \big([uy_j;\bar z,z_{l+1}]*[v;\bar q],[y_i;q_{k+1}]\big), \end{aligned}$$

где $\bar z = (z_1, z_2, \ldots, z_l)$, $l = l(u)$, $\bar q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, $k = l(v)$. Под результатом стаффл-произведения пар слов и кратных аргументов следует понимать элемент множества Y, то есть линейную комбинацию слов, к каждому из которых дополнительно привязан кратный аргумент. Запись $\big([u;\bar z]*[v;\bar q],[y_{i+j};z_{l+1}\cdot q_{k+1}]\big)$ обозначает, что к каждому слову в линейной комбинации $[u;\bar z]*[v;\bar q]$ дописывается справа y_{i+j}, а соответствующий этому слову кратный аргумент увеличивает свою кратность на единицу и к нему также справа приписывается $z_{l+1}\cdot q_{k+1}$. Как и на любом элементе Y на стаффл-произведении определен обобщенный полилогарифм кратного аргумента, например

$$\mathrm{Li}([y_j;z]*[y_i;q]) = \mathrm{Li}([y_{i+j};z\cdot q]) + \mathrm{Li}([y_iy_j;q,z]) + \mathrm{Li}([y_jy_i;z,q]).$$

Нетрудно заметить, что стаффл-произведение для обобщенных полилогарифмов кратного аргумента представляет собой линейную комбинацию некоторых других обобщенных полилогарифмов кратного аргумента. Из доказанной нами в главе 3 теоремы следует, что точно также можно представить и обычное произведение $\mathrm{Li}([u;\bar z])\cdot\mathrm{Li}([v;\bar q])$.

Теорема 6. *Стаффл-произведение для обобщенных полилогарифмов кратного аргумента равняется их обычному произведению*

$$\mathrm{Li}([u;\bar z]*[v;\bar q]) = \mathrm{Li}([u;\bar z])\cdot\mathrm{Li}([v;\bar q])\ .$$

4. Содержание главы 4.

В главе 4 обобщается результат Риваля[12] о линейной независимости значений классических полилогарифмов $\mathrm{Li}_s(z)$. Мы распространяем этот результат на функции Лерха

$$\Phi_s\,(z,v) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n+v)^s}\ ,$$

определяемые при $z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1,\ s\in\mathbb{N},\ z\neq 1$ при $s=1$ и

$$v=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ 0\leqslant|v|<1,\ (p,q)=1.$$

[12] *Rivoal T.* Propriétés diophantiennes de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs. Thèse de doctorat. Université de Caen. 2001.

Теорема 7. *Пусть $a \geqslant 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $A(\varepsilon,\gamma)$ такое, что для всех $a \geqslant A(\varepsilon,\gamma) \geqslant 1$ выполнено*

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\Phi_1(\gamma,v)+\ldots+\mathbb{Q}\Phi_a(\gamma,v)\right) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\ln 2}\ln a.$$

Здесь $a \in \mathbb{N},\ \gamma \in \mathbb{Q},\ \gamma = \dfrac{\alpha}{\beta},\ 0 < \alpha \leqslant \beta,\ (\alpha,\beta) = 1.$

Иными словами, при достаточно большом a среди чисел $1, \Phi_1(\gamma,v), \ldots, \Phi_a(\gamma,v)$ имеется не менее $\dfrac{\ln a}{1+\ln 2}$ линейно независимых над $\mathbb{Q}$.

Следствие. *Для любых рациональных чисел $\gamma, v,\ 0 < \gamma \leqslant 1,\ 0 \leqslant v < 1$ набор $\{\Phi_s(\gamma,v),\ s \geqslant 1\}$ содержит бесконечно много иррациональных чисел.*

Для доказательства теоремы 7 вводятся следующие ряды:

$$N_n(z) = n!^{a-r}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu-1)\cdots(\nu-rn)}{(\nu+\frac{p}{q})^a(\nu+\frac{p}{q}+1)^a\cdots(\nu+\frac{p}{q}+n)^a}\ z^{-\nu},$$

где $a, r \in \mathbb{N},\ a \geqslant 2,\ 1 \leqslant r < a$ и $z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant 1$. Показывается, что эти ряды есть линейные формы от функций Лерха и оценивается модуль этих форм.

Лемма 1. *Для любого $z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant 1$ выполнено равенство*

$$N_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\ \Phi_l\left(\frac{1}{z},\frac{p}{q}\right),$$

где $P_{l,n}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, причем $P_{1,n}(1) = 0$.

Лемма 2. *Для любого $z \in \mathbb{R},\ |z| \geqslant 1$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}|N_n(z)|^{\frac{1}{n}} = \varphi_{r,a}(z),$$

который удовлетворяет условиям

$$0 < \varphi_{r,a}(z) \leqslant \frac{1}{|z|^r r^{a-r}}.$$

Далее производится оценка коэффициентов линейных форм и их знаменателей.

Лемма 3. *Для любого* $l = 0, 1, \dots, a$ *и любого* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\limsup_{n\to\infty} |P_{l,n}(z)|^{\frac{1}{n}} \ \leqslant \ r^r 2^{a+r+1}|z| \ .$$

Лемма 4. *Для любого* $l = 0, 1, \dots, a$

$$d_n^{a-l} q^{2rn} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z] \ ,$$

где $d_n = НОК(1, 2, \dots, n)$. Используя леммы 1 – 4 можно применить критерий Нестеренко линейной независимости чисел, который и дает результат теоремы 7.

Основной метод, использованный нами при получении результатов настоящей диссертации, опирается на тот факт, что обобщенные полилогарифмы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (6). Аналогичная система дифференциальных уравнений была найдена нами и для интегралов $\mathrm{J}_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}|z)$. Доказательства теорем 1 – 4 и предложения 1 проводятся по индукции путем дифференцирования и последующего интегрирования с помощью этих дифференциальных уравнений.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору Ю. В. Нестеренко за интересную тему, постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры теории чисел за поддержку.

Работы по теме диссертации

[1] *Уланский Е.А.* Тождества для обобщенных полилогарифмов. Математические заметки. 2003. № 4. Том 73. Стр. 613 – 624.

[2] *Уланский Е.А.* Стаффл-соотношения для кратных дзета-значений. Вестник МГУ, Сер. 1, Математика, механика. 2005. № 2. Стр. 52 – 55.

[3] *Уланский Е.А.* Об одном тождестве для обобщения гипергеометрического интеграла. Математические заметки. 2006. № 5. Том 79. Стр. 796 – 799.

[4] *Уланский Е.А.* О линейной независимости значений функции Лерха. МГУ. Москва. 2007. Деп. в ВИНИТИ 30.05.07 № 581-В 2007