

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В.Ломоносова

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

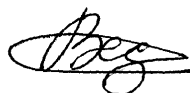
На правах рукописи  
УДК 532.517:536.24

Веденева Елена Анатольевна

**ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ  
МАГМЫ В КАНАЛЕ ВУЛКАНА С УЧЕТОМ  
СЖИМАЕМОСТИ И ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ**

Специальность 01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Москва 2007 г.

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета и в лаборатории общей гидромеханики НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители: доктор физико-математических наук,  
профессор А.А. Бармин  
член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук  
О.Э. Мельник

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор А.Б. Ватажин  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
В.И. Сахаров

Ведущая организация: Институт физики Земли  
им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

Защита состоится 19 октября 2007 г. в 16 часов 20 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, г. Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан «\_\_\_» сентября 2007 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д.501.001.89,  
доктор физико-математических наук



А.Н. Осипцов

# 1. Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Вулканические извержения относятся к наиболее разрушительным природным катастрофам, нередко сопровождающимся большим числом человеческих жертв, и несомненно требуют изучения.

Работы по математическому моделированию вулканических извержений ведутся на протяжении несколько десятков лет. Тем не менее, в большинстве работ, посвященных моделированию течения магмы в канале вулкана, течение рассматривается как одномерное и, часто, как изотермическое. Актуальность работы связана с необходимостью более детального описания процессов, происходящих в поперечном сечении канала вулкана и влияющих на динамику вулканических извержений в целом. Такое исследование важно также для интерпретации данных полевых наблюдений.

## **Цель работы.**

- Построение двумерных моделей течения магмы в канале вулкана с учетом сжимаемости и тепловых эффектов.
- Изучение особенностей течения, связанных с тем, что плотность и вязкость магмы зависят от температуры и давления существенно нелинейным образом.
- Получение оценок максимально возможного расхода магмы.
- Выявление диапазонов применимости одномерных моделей путем сравнения результатов расчетов по двумерным и одномерным моделям.
- Объяснение данных полевых наблюдений на активных вулканах.

## **Научная новизна.**

- Построены квазидвумерная и полностью двумерная осесимметричные стационарные модели течения магмы в канале вулкана с учетом сжимаемости и тепловых эффектов.
- Показано, что за счет влияния вязкой диссипации существенно изменяется сопротивление канала вулкана по сравнению с вычисляемым по одномерным моделям: 1) в одномерных моделях сопротивление канала сильно завышено, 2) в случае больших расходов, по мере приближения магмы к поверхности, сопротивление канала падает за счет сильного разогрева магмы в пристеночной области, а не растет, как в рамках одномерных моделей.

- Решена краевая задача определения расхода магмы в зависимости от давлений, заданных на входе и выходе из канала. Максимальный расход магмы при извержении может в несколько раз превышать полученный в рамках одномерной изотермической модели.
- Установлено, что при моделировании взрывных (эксплозивных) извержений перед фрагментацией не наблюдается резкого увеличения градиента давления, и, таким образом, критерии фрагментации, использующие это предположение, нуждаются в пересмотре.
- Выявленное резкое увеличение температуры в пристеночной области позволяет объяснить наличие различных типов вулканических пемз, возникающих в процессе одного извержения.
- В рамках двумерной модели для реальных свойств магмы не обнаружено возникновения вторичных течений, возможность существования которых для модельных условий была показана ранее в литературе. Получено хорошее совпадение результатов расчетов по полной двумерной и квазидвумерной моделям.
- Учет сжимаемости магмы в рамках двумерной модели в случае изотермического течения и течения с постоянной вязкостью показал, что в этих случаях профиль скорости остается близким к параболическому и для вычисления сопротивления канала можно использовать формулу Пуазейля, хотя формально она неприменима.

**Научная и практическая ценность.** Результаты работы, в том числе разработанные и реализованные эффективные численные алгоритмы для расчета течения по обеим моделям, могут быть использованы при математическом моделировании вулканических извержений. Кроме того, они могут быть применены при моделировании течений жидкостей, с существенно меняющейся вязкостью, в трубах.

**Достоверность результатов** обусловлена: применением фундаментальных уравнений гидродинамики при построении математических моделей; методами численного решения поставленных задач, основанными на надежных алгоритмах, успешно применявшихся ранее при исследовании течений вязких жидкостей; хорошим совпадением результатов расчетов и аналитических решений для модельных задач; согласованностью результатов расчетов по квазидвумерной и двумерной моделям течения; качественным соответствием полученных результатов данным полевых наблюдений.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре под руководством академика РАН А.Г. Куликов-

ского, проф. А.А. Бармина и проф. В.П. Карликова, на конференциях — конкурсах молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2003, 2005, 2006 гг.), заседаниях Американского Геофизического Общества (США, Сан-Франциско, 2001, 2006 гг.), первой Генеральной Ассамблее Европейского Общества Наук о Земле (Ницца, Франция, 2004 г.), конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2004 г.), XII школе-семинаре «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2004 г.), Генеральной Ассамблее Международной Ассоциации Вулканологии и Химии Недр Земли (Чили, Пукон, 2004 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в тридцати работах.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 50 рисунков, 1 таблица и 87 библиографических ссылок. Общий объём работы составляет 212 страниц.

## 2. Содержание работы

### Введение

Во введении изложены современные представления о вулканических извержениях, приведены характерные параметры вулканических систем, пояснена используемая в вулканологии терминология. Приводится краткий обзор литературы, касающейся двумерных течений жидкостей с переменной вязкостью и обзор существующих моделей вулканических извержений, учитывающих двумерность и неизотермичность течения магмы в канале. В конце приведена физическая постановка рассматриваемой задачи, изложена структура диссертации, перечислены основные исследуемые вопросы.

### Первая глава

Первая глава посвящена математической постановке задачи.

В разделах 1.1 — 1.4 приведена полная модель течения магмы в канале: определена геометрия рассматриваемой области; выписаны дифференциальные уравнения, описывающие течение; приводятся и обсуждаются формулы, задающие уравнение состояния магмы, ее внутреннюю энергию и вязкость; выписаны граничные условия; проведено обезразмеривание.

Рассматривается стационарное двумерное осесимметричное течение магмы в круглом цилиндрическом канале. Движение происходит за счет перепада давления между входом и выходом из канала, на магму действует

сила тяжести. Магма представляет собой вязкую теплопроводную многокомпонентную жидкость, состоящую из расплава, газа, растворенного в расплаве, и пузырьков газа, наличие которых делает ее сжимаемой. Вязкость магмы существенно нелинейным образом зависит от температуры и концентрации растворенного в расплаве газа. Температура изменяется за счет процессов вязкой диссипации и теплопроводности. Относительным движением фаз пренебрегается, температуры фаз считаются равными ввиду интенсивного теплообмена.

Полная система уравнений, описывающая такое течение, состоит из уравнения неразрывности, уравнений Навье-Стокса и уравнения притока тепла. В безразмерной форме в цилиндрических координатах она имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) &= 0 \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w v) &= -\frac{Eu}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + \\
&+ \frac{2}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2}{Re} \frac{1}{r^2} \mu w + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v^2) &= -\frac{Eu}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \operatorname{div} \vec{v} + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{Fr^2} \rho \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w e) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v e) &= -\frac{EuEc}{2} p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{Ec}{Re} \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \\
&+ \frac{Ec}{Re} \mu \left( 2 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{w^2}{r^2} + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \\
&+ \frac{1}{Pe} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\
\operatorname{div} \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r w) + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu \\
Re &= \frac{\rho_0 v_0 R}{\mu_0}, \quad Eu = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2/2}, \quad Fr = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}, \quad Ec = \frac{v_0^2}{c_{V0} T_0}, \quad Pe = \frac{\rho_0 v_0 R c_{V0}}{\varkappa}
\end{aligned} \tag{1}$$

Оси  $r$  и  $z$  направлены по радиусу канала и вдоль его оси,  $r \in [0; 1]$ ,  $z \in [0; L]$ , где  $L$  — длина канала;  $w$  и  $v$  — радиальная и продольная составляющие скорости;  $\rho$ ,  $p$ ,  $\mu$ ,  $e$  и  $T$  — плотность, давление, динамическая вязкость, плотность внутренней энергии и приращение температуры магмы относительно заданной на входе в канал;  $Re$ ,  $Eu$ ,  $Fr$ ,  $Ec$ ,  $Pe$  — числа Рейнольдса, Эйлера, Фруда, Эккерта и Пекле. Для получения безразмерных уравнений в качестве основных размерных величин выбраны:  $R$  — радиус канала,  $v_0$  — характерная скорость течения магмы,  $\rho_0$  — истинная плотность расплава,  $p_0$  — гидростатическое давление на входе в канал при отсутствии в магме пузырьков с газом,  $T_0$  — температура магмы на входе в канал, которая считается постоянной во всем сечении,  $\mu_0$  — вязкость магмы, отвечающая давлению  $p_0$  и температуре  $T_0$ ,  $c_{V0}$  — удельная теплоемкость расплава. В выражения для безразмерных параметров также входят:  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\varkappa$  — коэффициент теплопроводности магмы.

Для несжимаемой магмы  $\rho \equiv 1$ . При учете сжимаемости уравнение состояния магмы имеет вид (Jaupart C., Tait S. Reviews in Mineralogy and Geochemistry. 1990. V. 24.)

$$\rho = (1 - \alpha) \rho_m + \alpha \rho_g, \quad \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1 - c_{\max}}{c_{\max} - c} \frac{\rho_g}{\rho_m} \quad (2)$$

где  $\alpha$  — объемная доля пузырьков в единице объема, занятого магмой,  $\rho_m$  и  $\rho_g$  — истинные плотности расплава и газа в пузырьках,  $c$  и  $c_{\max}$  — массовая доля растворенного газа в расплаве и она же при отсутствии в магме пузырьков, то есть при  $\alpha = 0$ .

Расплав считается несжимаемым, газ в пузырьках — совершенным; для вычисления массовой концентрации растворенного в расплаве газа используется равновесный закон растворимости

$$\rho_m \equiv 1, \quad \rho_g = \rho_{g0} \frac{p}{T + 1}, \quad \rho_{g0} = \frac{p_0}{\rho_0 R_g T_0} \quad (3)$$

$$c = \min(c_0 \sqrt{p}, c_{\max}), \quad c_0 = C_f \sqrt{p_0}$$

где  $R_g$  — газовая постоянная,  $C_f$  — коэффициент растворимости газа в магме.

Внутренняя энергия сжимаемой магмы определяется формулой

$$\rho e = (\rho_m (1 - \alpha) c_{Vm} + \rho_g \alpha c_{Vg}) (T + 1), \quad c_{Vm} = 1 \quad (4)$$

где  $c_{Vm}$  и  $c_{Vg}$  — удельные теплоемкости расплава и газа в пузырьках при постоянном объеме, которые считаются постоянными. Это выражение сводится к  $e = \varphi(p)(T + 1)$ , для несжимаемой магмы  $\varphi(p) \equiv 1$ .

Для вязкости магмы используется эмпирическая формула (Hess K.U., Dingwell D.B. Amer. Mineralogist. 1996. V. 81. N. 7.), в соответствии с которой вязкость зависит от температуры магмы и концентрации растворенного газа в расплаве. Для характерного диапазона изменения своих аргументов вязкость может меняться на несколько порядков (рис. 1).

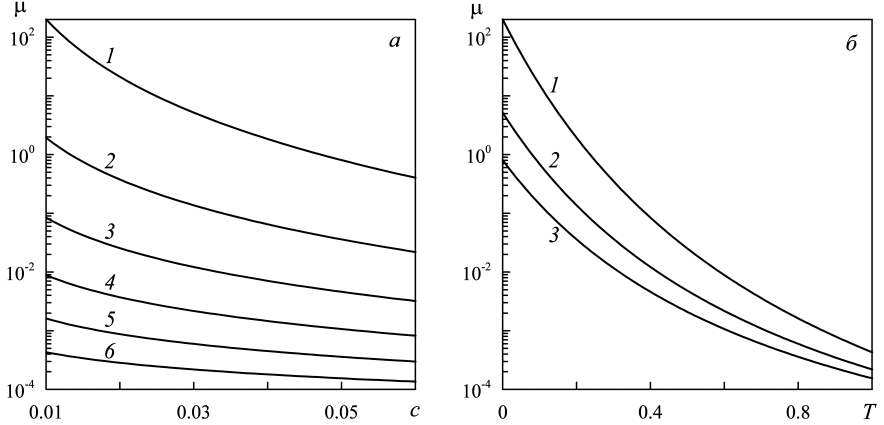


Рис. 1. Зависимость вязкости  $\mu(c, T)|_{T=const}$  (a) при температуре магмы  $T = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  (кривые 1 – 6, соответственно) и зависимость  $\mu(c, T)|_{c=const}$  (б) для массовой концентрации растворенного газа в расплаве  $c = 0.01, 0.03, 0.05$  (кривые 1 – 3).

Для такой задачи ставятся следующие граничные условия

$$\begin{aligned}
 z = 0 : \quad & w(r, 0) = 0, \quad v(r, 0) = 2v_{a0}(1 - r^2), \quad T(r, 0) = 0 \\
 & v_{a0} = Q_m \cdot \left( 4\pi \int_0^1 \rho(r, 0) (1 - r^2) r dr \right)^{-1} \\
 r = 0 : \quad & w(0, z) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0 \\
 r = 1 : \quad & w(1, z) = 0, \quad v(1, z) = 0, \quad T(1, z) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial r}(1, z) = 0 \\
 z = L : \quad & w(r, L) = 0, \quad \left( p - \frac{2}{EuRe} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} \right) (r, L) = p_{out} \\
 & \frac{\partial T}{\partial z}(r, L) = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$



Поясним, что на выходе из канала ( $z = L$ ) в качестве граничного условия задается значение нормальной компоненты вектора напряжений, которое преобразовано с учетом условия для радиальной компоненты скорости; в приближении несжимаемой магмы оно сводится к  $p = p_{out}$ .

В **разделе 1.5** приводится квазидвумерная (упрощенная) модель течения магмы. В предположении, что длина канала много больше его радиуса, а течение достаточно медленное:  $\varepsilon = 1/L \ll 1$ ,  $Re \lesssim 1/\varepsilon = L$ , что для реальных вулканов выполнено, система уравнений (1) в первом приближении по малому параметру  $\varepsilon$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) &= 0 \\ p(r, z) = p(z), \quad \frac{dp}{dz} &= \frac{2}{EuRe} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2}{EuFr^2} \rho \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho we) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho ve) &= -\frac{EuEc}{2} p \operatorname{div} \vec{v} + \\ &+ \frac{Ec}{Re} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{Pe} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Граничными условиями для (6) являются условия на входе, оси и стенке канала для  $w$ ,  $v$ ,  $T$  из (5), условия на выходе для этих величин не нужны. Давление  $p = p(z)$  задается либо на входе в канал  $p(0) = p_{in}$ , либо на выходе из него  $p(L) = p_{out}$ .

## Вторая глава

В этой главе изложен численный метод решения задачи в квазидвумерной постановке (6).

В **разделах 2.1 — 2.5** излагается алгоритм численного метода на примере случая, когда магма считается несжимаемой жидкостью, а давление задается на входе в канал. Задача решается конечно-разностным методом. Производные аппроксимируются с первым порядком точности. Метод решения основан на том, что в системе (6) отсутствуют члены, содержащие вторые производные по  $z$ . Разностные уравнения, соответствующие (6), можно решать отдельно в каждом слое  $z = z_i$ , где величины  $z_i$  задают разбиение вдоль оси канала, если решение на предыдущем слое  $z = z_{i-1}$  известно. Поэтому, двигаясь последовательно от слоя к слою, начиная с нулевого слоя в начале канала, где решение задано, можно построить решение во всем канале.

В разделе 2.6 обсуждается обобщение алгоритма решения задачи на случаи давления, заданного на выходе из канала, и сжимаемой магмы. В разделе 2.7 описываются используемые методы контроля достоверности получаемых численно результатов.

## Третья глава

В этой главе на основе квазидвумерной модели (6) рассмотрены различные варианты постановки задачи о течении магмы в канале, приведены результаты расчетов, дана их физическая интерпретация.

В разделах 3.1 — 3.2 изложена структура главы и приведены значения параметров задачи, для которых выполнены расчеты. Характерные значения размерных величин следующие

$$\begin{aligned}
 R &= 25 \text{ м}, & L' &= 5000 \text{ м}, & v_0 &= 1.0 \text{ м/с} \\
 \rho_0 &= 2500 \text{ кг/м}^3, & T_0 &= 1123 \text{ К}, & p_0 &= 132.5 \text{ МПа}, & \mu_0 &= 3.19 \cdot 10^4 \text{ Па с} \\
 c_{V_0} &= 1200 \text{ Дж/(кг К)}, & c_{V_g}' &= 1560 \text{ Дж/(кг К)}, & R_g &= 462 \text{ Дж/(кг К)} \\
 c_{\max} &= 0.05, & C_f &= 4.1 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{1/2}, & g &= 9.8 \text{ м/с}^2, & \varkappa &= 0.8 \text{ Дж/(м с К)}
 \end{aligned}$$

где через  $L'$  и  $c_{V_g}'$  обозначены размерные значения соответствующих безразмерных параметров. Кроме того, для решения задачи должны быть заданы две из трех величин:  $Q_m$ ,  $p_{in}$ ,  $p_{out}$ , но значения этих параметров для разных расчетов разные и приводятся отдельно в каждом случае.

В разделе 3.3 рассматриваются случаи экструзивного и эксплозивного типов извержений, характерных для сильновязких магм; решается крайняя задача определения расхода магмы по заданному давлению на входе и выходе из канала. Магма считается несжимаемой жидкостью.

При экструзивных извержениях магма представляет собой пузырьковую жидкость, при эксплозивных извержениях при достижении некоторых критических условий происходит фрагментация жидкой магмы с образованием газозвеси. Эксплозивные извержения характерны для больших расходов магмы.

Экструзивные извержения полностью описываются в рамках квазидвумерной модели (6). В случае эксплозивных извержений модель (6) описывает течение только в той части канала, где магма представляет собой жидкость, и дополняется в области течения газозвеси одномерной (рассматриваются только средние по сечениям  $z = const$  характеристики течения) изотермической моделью. Отметим, что длина зоны газозвеси заранее неизвестна и определяется из решения задачи о течении магмы во всем канале целиком.

Структура течения в обоих случаях в зоне течения пузырьковой жид-

кости одинакова. Для случая экструзивных извержений с  $Q_m = 125.6$  и  $p_{out} = 0.075$  распределения вертикальной компоненты скорости, температуры и вязкости приведены на рис. 2 и 3; радиальная составляющая скорости не превосходит  $6 \cdot 10^{-2}$  практически во всей области течения за исключением начального отрезка канала порядка  $L/10$ .

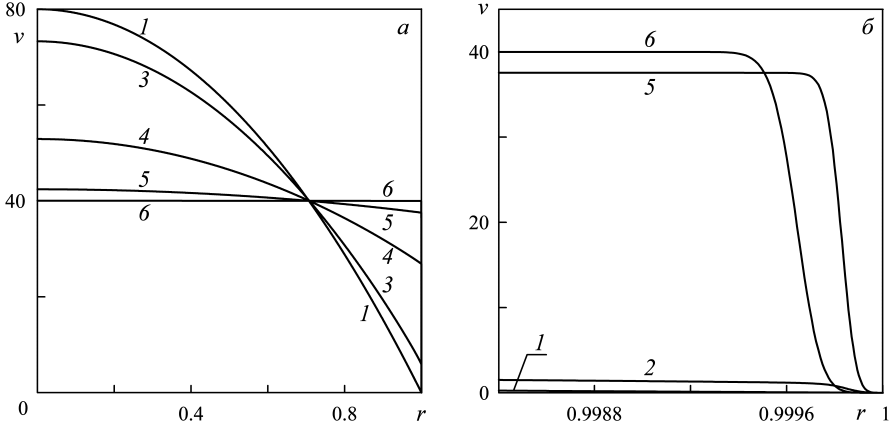


Рис. 2. Распределения вертикальной компоненты скорости  $v(r, z)$  по сечениям канала:  $z = 0, L/100, L/50, L/20, L/4, L$  (кривые 1–6) во всем сечении (а) и в пристеночной области (б).

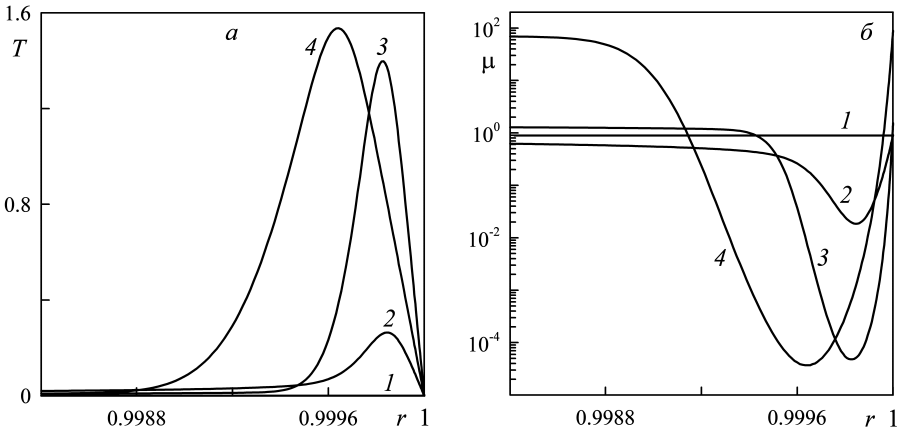


Рис. 3. Распределения температуры  $T(r, z)$  (а) и вязкости  $\mu(r, z)$  (б) в области около стенки канала в сечениях:  $z = 0, L/100, L/4, L$  (кривые 1–4).

В процессе подъема магмы по каналу, по мере ее приближения к поверхности, параболический профиль, заданный на входе в канал, становится практически прямоугольным; в области около стенки канала образуется зона с резким изменением скорости (рис. 2). Это связано с существенным изменением вязкости магмы поперек канала за счет тепловых эффектов (рис. 3).

Изменение вязкости происходит за счет двух конкурирующих процессов. С одной стороны, при подъеме магмы по каналу на поверхность давление в ней падает, и, соответственно, уменьшается концентрация растворенного в магме газа, а ее вязкость увеличивается (рис. 1(a)). С другой стороны, за счет вязкого трения происходит выделение тепла. Наиболее интенсивно этот процесс происходит около стенки канала, где велики градиенты скорости вследствие выполнения условия прилипания (5) (рис. 2). За счет теплопроводности тепло передается от пристеночной области к центральной части канала, но для рассматриваемых значений параметров потоки тепла невелики. Таким образом, около стенки канала образуется узкий разогретый слой жидкости, который по мере приближения магмы к поверхности незначительно расширяется, при этом температура в нем растет (рис. 3(a)). За счет роста температуры вязкость жидкости уменьшается (рис. 1(b)), около стенки образуется «смазочный» слой жидкости с малой вязкостью (рис. 3(b)).

Обнаруженные сильно разогретые слои магмы в узкой зоне около стенки канала объясняют одновременное образование во время одного и того же извержения разных типов пемз, часть из которых имеет признаки сильного разогрева и деформаций (Rosi M., Landi P., Polacci M., Di Muro A., Zandomenighi D. Bull. Volcanology. 2004. V. 66. N. 4.; Polacci M., Papale P., Rosi M. Bull. Volcanology. 2001. V. 63. N. 2-3.).

В приближении несжимаемой магмы также решена краевая задача определения ее расхода  $Q_m$  по заданному давлению на входе  $p_{in}$  и выходе  $p_{out}$  из канала для случаев экструзивного и эксплозивного извержений, позволяющая оценить максимально возможную интенсивность извержения в рамках рассматриваемой модели. Значение давления  $p_{out}$  для экструзивных извержений определяется весом лавового купола, его характерное значение — 10 МПа (0.075 в безразмерных переменных); для эксплозивных извержений — оно либо равно атмосферному, либо определяется из условия запирания канала. Давление  $p_{in}$  ограничено прочностью горных пород, образующих стенки канала вулкана: оно не может превосходить литостатическое больше, чем на 20 — 30 МПа (0.16 — 0.24 в безразмерных переменных).

Течение магмы в канале вулкана в большинстве существующих моделей описывается одномерными теориями и, как правило, считается изотерми-

ческим. Сопротивление канала при этом вычисляется как для течения с постоянной вязкостью — течения Пуазейля (предполагая при этом, что профиль скорости параболический). Полученные результаты сравниваются с результатами расчетов по одномерной модели.

В случае экстрезивных извержений для малых избыточных (относительно гидростатического) давлений  $p_{in}$  на входе в канал зависимости  $Q_m(p_{in})$ , полученные в рамках квазидвумерной и одномерной изотермической моделей, практически совпадают (рис. 4(a)). При увеличении  $p_{in}$  в рамках квазидвумерной модели реализуются течения с большими расходами, чем в одномерной изотермической. По квазидвумерной модели зависимость  $Q_m(p_{in})$  неоднозначна: существуют давления  $p_{in}$ , которым отвечают два значения расхода  $Q_m^1$  и  $Q_m^2$ .

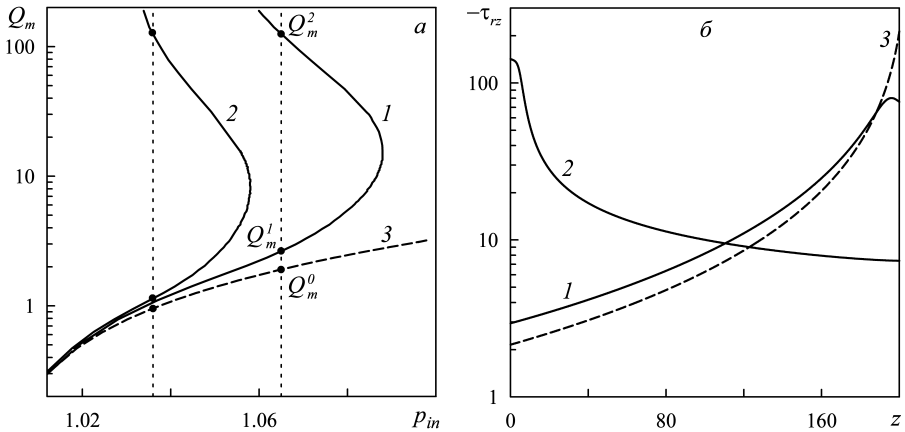


Рис. 4. Моделирование экстрезивных извержений. Зависимость расхода магмы  $Q_m$  от давления на входе в канал  $p_{in}$  (a) при фиксированном давлении на выходе для изотермического и адиабатического условий на стенке (кривые 1, 2). По одномерной изотермической модели расход  $Q_m^0$  и по квазидвумерной модели расходы  $Q_m^1$  и  $Q_m^2$  отвечают одинаковому давлению  $p_{in}$ . Изменение сопротивления канала  $\tau_{rz}(1, z)$  (б) для расходов  $Q_m^1$  и  $Q_m^2$  (кривые 1, 2). Кривые 3 — те же зависимости для одномерной изотермической модели, график  $\tau_{rz}(1, z)$  (б) отвечает расходу  $Q_m^0$ .

Для малых расходов процессы диссипативного выделения тепла слабые, течение близко к изотермическому. Сопротивление канала — компонента тензора вязких напряжений  $\tau_{rz}$  на стенке канала  $\tau_{rz}|_{r=1} = \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r=1}$  за счет влияния вязкой диссипации практически не меняется. Изменение

сопротивления обусловлено ростом вязкости магмы за счет снижения давления (рис. 1(а)) по мере приближения магмы к поверхности (рис. 4(б)). Поэтому для малых расходов зависимости  $Q_m(p_{in})$ , полученные в рамках квазидвумерной и одномерной изотермической моделей, практически совпадают (рис. 4(а)). Для больших расходов магмы влияние вязкой диссипации на сопротивление играет ведущую роль: за счет образования около стенки канала прогретой «смазочной» зоны с малой вязкостью по мере приближения магмы к поверхности сопротивление канала падает, а не растет как для малых расходов (рис. 4(б)). Поэтому при одинаковых значениях давления на входе  $p_{in}$  и выходе  $p_{out}$  из канала возможно течение магмы и с малым  $Q_m^1$ , и с гораздо большим  $Q_m^2$  расходами (рис. 4(а)).

Неоднозначность зависимости  $Q_m(p_{in})$  в случае эксплозивных извержений исчезает (рис. 5(а)). Решение, когда магма практически не разогревается в пристеночной зоне, отсутствует. В зоне течения пузырьковой жидкости влияние вязкой диссипации играет ведущую роль для всего диапазона изменения давлений на входе в канал  $p_{in}$  и всего соответствующего

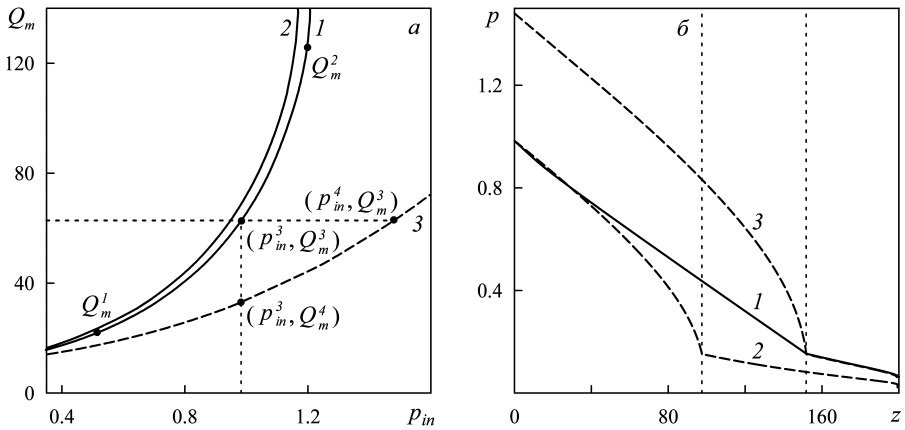


Рис. 5. Моделирование эксплозивных извержений. Зависимость расхода магмы  $Q_m$  от давления на входе в канал  $p_{in}$  (а) при фиксированном давлении на выходе для изотермического и адиабатического условий на стенке (кривые 1, 2). Кривая 3 — та же зависимость, полученная для одномерной изотермической модели. По квазидвумерной модели расход  $Q_m^3$  отвечает давлению  $p_{in}^3$ ; по одномерной изотермической — давлению  $p_{in}^4 > p_{in}^3$ , а давлению  $p_{in}^3$  соответствует расход  $Q_m^4 < Q_m^3$ . Зависимость давления  $p(z)$  (б) для расхода  $Q_m^3(p_{in}^3)$  (кривая 1) и эта же зависимость для одномерной изотермической модели для  $Q_m^4(p_{in}^3)$  и  $Q_m^3(p_{in}^4)$  (кривые 2, 3). Вертикальные пунктирные прямые (б) соответствуют фрагментации магмы.

диапазона изменения расходов  $Q_m$ .

Падение давления вдоль канала в зоне течения пузырьковой жидкости обусловлено действием силы сопротивления канала и силы тяжести, в зоне газозвеси — только силой тяжести, так как сопротивление стенок канала в этой зоне пренебрежимо мало. Для малых расходов  $Q_m$  зона течения пузырьковой жидкости занимает малую часть канала, поэтому для таких расходов давление на входе в канал  $p_{in}$  при эксплозивных извержениях существенно меньше, чем при экструзивных (см. рис. 4(а) и 5(а)). С увеличением расхода длина зоны газозвеси уменьшается практически до нуля, пузырьковая жидкость занимает почти весь канал.

За счет падения сопротивления в рамках квазидвумерной модели в зоне течения пузырьковой жидкости перед фрагментацией не наблюдается сильного увеличения градиента давления — такого как в одномерной изотермической модели (рис. 5(б)).

В разделе 3.4 приведены расчеты по квазидвумерной модели (6) с учетом сжимаемости магмы в случае, когда весь канал заполнен пузырьковой жидкостью.

Распределения вертикальной компоненты скорости, температуры, плотности и давления для  $Q_m = 2.5$  и  $p_{out} = 0.063$  приведены на рис. 6, 7, 8(а); радиальная компонента скорости  $w(r, z)$  во всем канале не превосходит  $2.5 \cdot 10^{-3}$ .

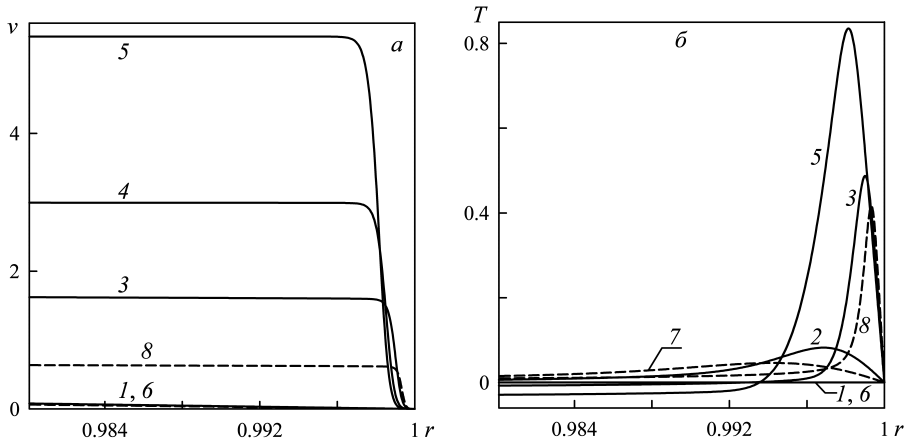


Рис. 6. Распределения скорости  $v(r, z)$  (а) и температуры  $T(r, z)$  (б) по сечениям канала  $z = 0, L/4, L/2, (3/4)L, L$  (кривые 1 — 5) в пристеночной области. Для сравнения приведены эти же распределения по сечениям  $z = 0, (3/4)L, L$  (кривые 6 — 8), полученные в рамках квазидвумерной модели без учета сжимаемости магмы.

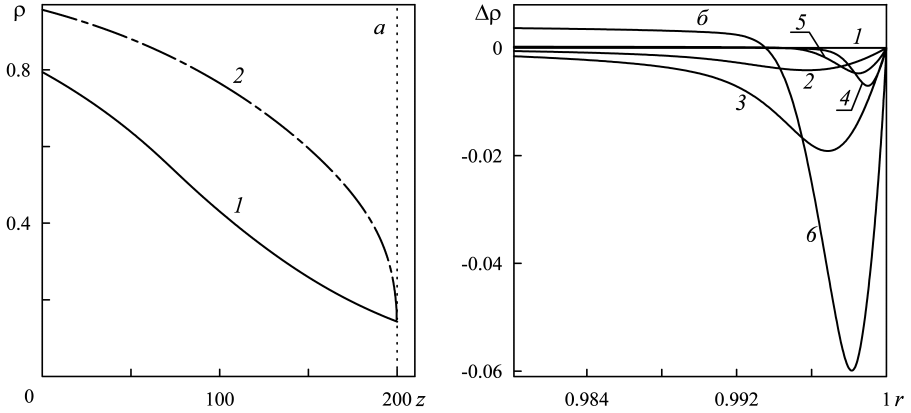


Рис. 7. Изменение плотности магмы на стенке канала  $\rho(1, z)$  и это же распределение, полученное в рамках одномерной изотермической модели (а, кривые 1 и 2). Изменения плотности магмы относительно значения на стенке:  $\Delta\rho(r, z) = \rho(r, z) - \rho(1, z)$  в пристеночной области канала при  $z = 0, L/10, L/4, L/2, (3/4)L, L$  (б, кривые 1 – 6).

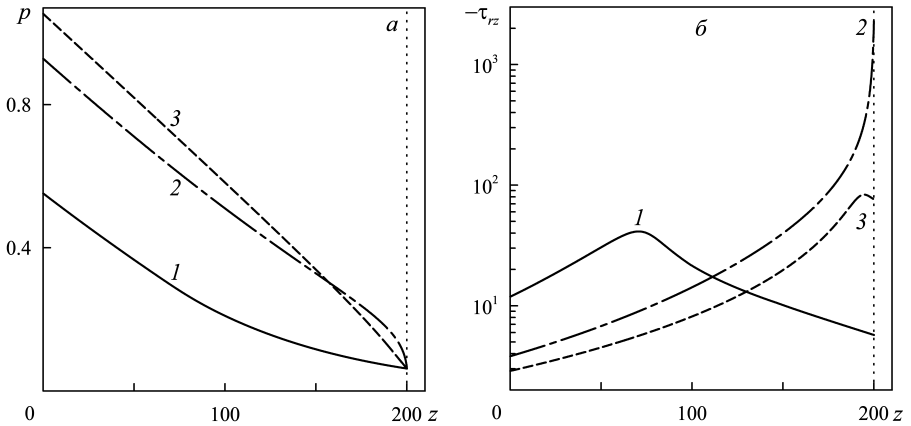


Рис. 8. Изменение давления  $p(z)$  (а) и сопротивления канала  $\tau_{rz}(1, z)$  (б) (кривые 1). Для сравнения приведены эти же распределения, полученные в рамках одномерной изотермической модели и квазидвумерной модели без учета сжимаемости магмы (кривые 2 и 3, соответственно).

Падение давления по мере продвижения магмы к поверхности, с одной стороны, вызывает падение плотности магмы вдоль канала (рис. 7(а)) и, в



силу закона сохранения массы, приводит к увеличению средней скорости течения по сечениям  $z = \text{const}$  (рис. 6(a)). С другой стороны, оно ведет к росту вязкости магмы (рис. 1(a)).

Изменение градиента давления вдоль канала (рис. 8(a)) обусловлено изменением сопротивления стенки (рис. 8(b)) и снижением веса магмы (за счет снижения ее плотности — рис. 7(a)), которое ведет к уменьшению его абсолютного значения.

Рост средней скорости течения при подъеме магмы на поверхность, если считать, что профиль скорости параболический или близкий к нему, и рост вязкости магмы за счет падения давления приводят к росту сопротивления канала. Последний, в свою очередь, вызывает увеличение абсолютного значения градиента давления.

В одномерной изотермической модели при учете сжимаемости магмы имеет место влияние всех вышеперечисленных процессов и только их.

В рамках квазидвумерной модели с учетом сжимаемости магмы (6) падение плотности магмы вдоль канала, кроме того, вызывает незначительное понижение температуры в центральной части канала (рис. 6(b)).

Так же, как и в случае несжимаемой магмы, при учете сжимаемости в квазидвумерной модели вблизи стенки канала формируется разогретый (рис. 6(b)) «смазочный» слой жидкости с малой вязкостью, что приводит к схожей перестройке течения. В случае сжимаемой магмы за счет роста средней скорости течения при подъеме магмы по каналу, влияние вязкой диссипации усиливается (рис. 6, 8(b)).

Падение температуры в центральной части канала (за счет снижения плотности) и ее рост около стенки (за счет влияния вязкой диссипации) вызывают изменение плотности магмы в поперечных сечениях  $z = \text{const}$  (рис. 7(b)), которое приводит к дополнительному росту температуры в области около стенки канала.

Падение плотности магмы вдоль канала и еще большее снижение сопротивления канала по сравнению со случаем несжимаемой магмы (рис. 8(b)), приводят к снижению абсолютного значения градиента давления и по сравнению с одномерной изотермической моделью, и по сравнению с квазидвумерной моделью без учета сжимаемости магмы (рис. 8(a)).

В **разделе 3.5** приведено развитие квазидвумерной модели экструзивных извержений на случай, когда существенно наличие в магме кристаллов. Магма моделируется несжимаемой жидкостью с вязкостью, зависящей от объемной доли кристаллов, которая, в свою очередь, считается линейной функцией температуры. Показано, что в этом случае в одномерной изотермической модели сопротивление канала также завышено.

В **разделе 3.6** приведены выводы к третьей главе.

## Четвертая глава

В этой главе последовательно изложен численный метод решения задачи в полной двумерной постановке. Приведены результаты тестовых расчетов и описаны используемые методы контроля достоверности получаемых результатов.

Задача решалась методом контрольного объема, для решения дискретных аналогов уравнений использовался алгоритм SIMPLER (Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation. 1980.). При построении решения учитывались особенности рассматриваемого течения: геометрия расчетной области (характерное значение отношения длины канала к его радиусу — 200); сильно меняющаяся вязкость, зависящая от давления и температуры; формирование вблизи стенки канала очень узкого слоя жидкости с высокой температурой, вязкость в котором меняется более чем на два порядка.

Тестирование численной схемы осуществлялось на течениях несжимаемой жидкости в предположении, что радиальная компонента скорости отсутствует. Рассматривались случаи постоянной вязкости (течение Пуазейля) и вязкости, заданной в виде функции от координат, при которой задача имеет аналитическое решение. Для контроля достоверности получаемых результатов, проверялось выполнение интегральных законов сохранения для объемов, представляющих собой канал неполной длины.

## Пятая глава

В этой главе в полной двумерной постановке (основанной на решении полных двумерных уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением энергии (1)) рассмотрены две модели течения магмы в канале: с учетом и без учета ее сжимаемости. Приведены результаты расчетов, дана физическая интерпретация полученных результатов. Обсуждается применимость одномерной и квазидвумерной моделей течения.

В **разделах 5.1 — 5.2** изложена структура главы и приведены значения параметров задачи, для которых выполнены расчеты.

В **разделе 5.3** рассматривается модель течения в случае, когда магма считается несжимаемой жидкостью с вязкостью, зависящей от температуры и концентрации растворенного в расплаве газа (рис. 1).

Такая постановка задачи соответствует рассмотренной в разделе 3.3, где для описания течения используется квазидвумерная модель. В разделе 3.3 получено качественное объяснение образования разных типов вулканических пемз во время одного и того же извержения, но доля разогретой магмы оказалась много меньше, а ее температура — выше, чем ре-

ально наблюдаемые, что можно объяснить тем, что в действительности, по-видимому, под действием некоторых факторов вблизи стенки происходит перемешивание магмы. Анализ устойчивости решения задачи о течении магмы в трещине под действием силы тяжести в схожей упрощенной постановке и расчет по полным уравнениям показали, что для модельных свойств магмы в области около стенки канала могут возникать вторичные течения (Costa A., Macedonio G. J. Fluid Mech. 2005. V. 540.). Поэтому возникло предположение о возможности появления вторичных течений и в исследуемой задаче (когда движение происходит за счет перепада давления между входом и выходом из канала, канал моделируется круглым цилиндром с размерами, характерными для вулканов; для вязкости магмы используется эмпирическая, а не модельная зависимость) при рассмотрении ее в полной двумерной постановке.

На рис. 9 приведены распределения вертикальной компоненты скорости и температуры, полученные по полной модели для  $Q_m = 1.57$  и  $p_{out} = 0.075$ . Изменение радиальной составляющей скорости во всей области течения не превосходит  $6 \cdot 10^{-4}$ , давления поперек канала —  $3 \cdot 10^{-5}$ .

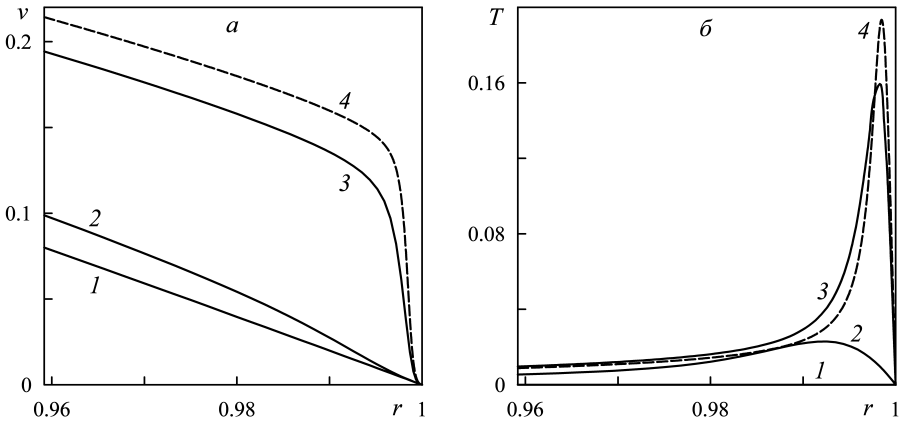


Рис. 9. Распределения вертикальной компоненты скорости  $v(r, z)$  (а) и температуры  $T(r, z)$  (б) в сечениях канала  $z = 0, (3/4)L, L$  (кривые 1–3) в области около стенки. Кривые 4 получены в рамках квазидвумерной модели при  $z = L$ . Для сечения  $z = (3/4)L$  кривые, полученные в рамках полной двумерной и квазидвумерной моделей, совпадают так, что неразличимы на этих графиках.

Как оказалось, изменение давления поперек канала мало, соответственно отсутствует перенос жидкости в радиальном направлении и стационар-

ные вторичные течения в решении полной задачи не возникают. Таким образом, учет всех членов исходных уравнений не приводит к качественному и количественному изменению картины течения при значениях параметров, отвечающих течению магмы в канале вулкана. Решения, полученные по полной двумерной и квазидвумерной моделям, хорошо совпадают (рис. 9). Количественное несовпадение результатов расчетов и полевых наблюдений не связано с возникновением стационарных вторичных течений. За возникновение активного перемешивания, вероятно, ответственны другие механизмы, например, такие как негладкость стенок канала, их плавление, эрозия или отток газа из магмы в окружающие породы.

В разделе 5.4 учитывается сжимаемость магмы. Рассмотрены два случая: изотермическое течение (в этом случае вязкость магмы является функцией давления) и течение с постоянной вязкостью.

В случае изотермического течения получено, что изменение давления в радиальном направлении во всем канале мало (не превосходит 3% от его значения). Наиболее сильно давление меняется на выходе в силу влияния граничного условия (5), так как задается не давление, а компонента тензора напряжений  $p_{zz}$ .

Из упрощенных уравнений импульсов (6) для изотермического течения аналитически следует, что в квазидвумерной постановке задачи распределение продольной компоненты скорости по радиусу всегда является параболическим. Проведенные расчеты полностью соответствуют этому аналитическому выводу. Радиальная компонента скорости в расчетах во всем канале не превосходит  $10^{-2}$ .

Вследствие вышесказанного изменения вдоль канала средней скорости течения (за исключением малой окрестности выхода из канала), плотности и давления, рассчитанные по полной двумерной и одномерной моделям, совпадают с точностью до  $2 \cdot 10^{-3}$ .

Таким образом, если течение рассматривается как изотермическое, то решения, полученные в рамках одномерной и полной двумерной моделей, хорошо совпадают друг с другом, если не рассматривать детали поведения течения на выходе из канала.

Распределения продольной компоненты скорости и температуры для случая течения с постоянной вязкостью для  $Q_m = 1.57$  и  $p_{out} = 0.075$  представлены на рис. 10. Радиальная компонента скорости во всем канале не превосходит  $10^{-3}$ , изменение давления поперек канала —  $10^{-6}$ .

В такой постановке задачи имеют место такие же процессы, как и рассмотренные в разделе 3.4. За счет падения давления по мере приближения магмы к поверхности, плотность магмы уменьшается, а средняя скорость течения растет (рис. 10(a)). Снижение плотности вдоль канала приводит

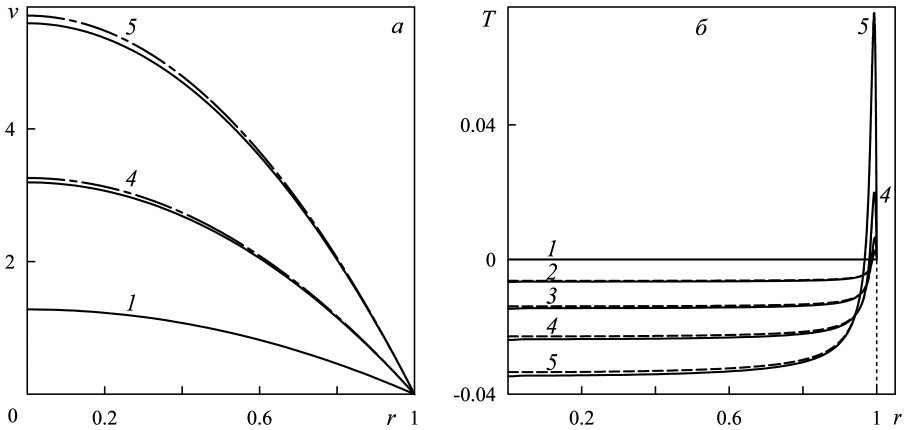


Рис. 10. Распределения вертикальной компоненты скорости  $v(r, z)$  (а) и температуры  $T(r, z)$  (б) по сечениям канала  $z = 0, L/4, L/2, (3/4)L, L$  (сплошные кривые 1 – 5). Для сравнения приведены распределения в этих же сечениях  $v(r, z)$  (а), полученные по одномерной изотермической модели, и  $T(r, z)$  (б), полученные по квазидвумерной модели.

к снижению температуры магмы в центральной его части (рис. 10(б)). За счет вязкого трения вблизи стенки формируется разогретый слой жидкости (рис. 10(б)). Но, в отличие от раздела 3.4, вязкость магмы постоянна, поэтому обратное влияние температуры на поле течения проявляется только через изменение плотности в поперечных сечениях.

Расчитанные в рамках полной двумерной и квазидвумерной моделей распределения продольной компоненты скорости совпадают с точностью до  $7 \cdot 10^{-2}$ , радиальная составляющая скорости мала и не превосходит  $2 \cdot 10^{-2}$ , распределения давления, температуры (рис. 10(б)) и плотности совпадают с точностью до  $4 \cdot 10^{-5}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$  и  $2 \cdot 10^{-4}$ , соответственно. То есть такое течение хорошо описывается в рамках квазидвумерной модели.

Изменения температуры и плотности вдоль радиуса не превосходят 0.08 (рис. 10(б)) и  $10^{-3}$ , соответственно. Этих изменений недостаточно, чтобы поменять структуру течения. Профиль скорости остается близким к параболическому (рис. 10(а)). Поэтому, при сравнении с одномерной изотермической моделью распределения средней скорости течения, давления и плотности совпадают с точностью до  $4 \cdot 10^{-2}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$ . Формула Пуазейля хорошо описывает сопротивление канала, хотя формально и неприменима.

В разделе 5.5 приведены выводы к пятой главе.

## Заключение

В заключении подведены итоги работы и сформулированы её основные результаты.

## 3. Основные результаты и выводы

В работе изучены стационарные двумерные осесимметричные течения магмы в канале вулкана с учетом процессов вязкой диссипации и теплопроводности, а также сжимаемости магмы. Построены две модели течения магмы в канале: полная двумерная модель, основанная на полной системе уравнений Навье-Стокса и уравнении притока тепла, и квазидвумерная, получающаяся из полной системы уравнений предельным переходом при стремлении отношения длины канала к его радиусу к бесконечности. На основе этих двух моделей рассматриваются различные постановки задачи.

Особенности изучаемого течения связаны, во-первых, с тем, что для вязкости и плотности магмы используются существенно нелинейные зависимости от температуры и давления, во-вторых, — с геометрией рассматриваемой области: длина канала на два порядка больше его радиуса. Для такого течения разработаны и реализованы программы расчетов по квазидвумерной и полной двумерной моделям.

Выявлено, что влияние тепловых эффектов на течение магмы в канале существенно.

В случае больших расходов поведение сопротивления канала качественно иное, чем рассчитанное по формуле Пуазейля: при подъеме магмы по каналу сопротивление падает, а не растет. Учет сжимаемости магмы приводит к еще большему снижению сопротивления канала за счет влияния вязкой диссипации, а не к еще большему его росту за счет увеличения скорости, как это следует из одномерной изотермической модели без учета и с учетом сжимаемости магмы. В одномерных моделях сопротивление сильно завышено. Полученные зависимости изменения сопротивления вдоль канала могут быть использованы для корректировки одномерных моделей.

Установлено, что при моделировании эксплозивных извержений в рамках квазидвумерной модели перед фрагментацией не наблюдается резкого изменения градиента давления. Таким образом, критерии фрагментации, использующие предположение о сильном увеличении градиента давления перед фрагментацией, нуждаются в корректировке.

В рамках квазидвумерной модели в приближении несжимаемой магмы решена краевая задача определения расхода магмы в зависимости от давления, заданного на входе в канал. Эта зависимость в случае экструзивных

извержений неоднозначна: существует такой интервал давлений на входе в канал, что при одном и том же значении давления возможны извержения как с малым, так и с большим расходами. Показано, что в рамках построенной модели могут реализовываться извержения с расходами в несколько раз превышающими расходы, полученные в рамках одномерной изотермической модели.

В узкой зоне около стенки канала выявлены сильно разогретые слои магмы, наличие которых объясняет одновременное образование во время одного и того же извержения разных типов пемз, часть из которых имеет признаки сильного разогрева и деформаций.

Результаты расчетов течения магмы в канале вулкана по квазидвумерной модели сравнивались с результатами расчетов по полной двумерной модели. Показано, что в случае, когда магму можно считать несжимаемой жидкостью, результаты расчетов по полной и квазидвумерной моделям совпадают с точностью до 10%. Возникновения вторичных стационарных течений в полной модели для реальных условий подъема магмы не происходит.

Установлено, что при учете сжимаемости магмы в приближении, когда вязкость магмы считается постоянной, профиль скорости остается близким к параболическому, и формула Пуазейля хорошо описывает сопротивление канала, хотя формально и неприменима.

## Публикации по теме диссертации

1. Melnik O.E., Rose W.I., Fedotova (Vedeneeva) E.A. Modeling of Discharge Rate Variations on Santiaguito Volcano, Guatemala// AGU, San Francisco, USA, 10-14 December 2001. 82(47). Abstract V52C-09.
2. Е.А. Веденева. Течение магмы в канале вулкана с учетом тепловых эффектов// Тр. конф.-конкурса молодых ученых. НИИ механики МГУ. М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 55-63.
3. Vedeneeva E.A., Melnik O.E., Barmin A.A. Influence of viscous dissipation on magma flow in volcanic conduits// EGU Assembly, Nice, France, 25-30 April 2004. Geophysical Research Abstracts. 2004. V. 6, 07304. SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU04-A-07304.
4. Бармин А.А., Веденева Е.А., Мельник О.Э. Влияние вязкой диссипации на течение магмы в канале вулкана// Тезисы докладов конференции «Ломоносовские чтения», МГУ. М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 31.

5. Бармин А.А., Веденева Е.А., Мельник О.Э. Неизотермическое течение сильновязкой магмы в канале вулкана с учетом влияния вязкой диссипации// Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 6. С. 21-32.
6. Vedeneva E.A., Melnik O.E., Barmin A.A., Sparks R.S.J. Viscous dissipation in explosive volcanic eruptions// Geophysical Research Letters. 2005. V. 32. N. 5. L05303. Doi:10.1029/2004GL020954.
7. Бармин А.А., Веденева Е.А., Мельник О.Э. Влияние тепловых эффектов на течение магмы в канале вулкана// Тезисы докладов XII школы-семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики». М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 16-17.
8. Barmin A.A., Vedeneva E.A., Melnik O.E., Sparks R.S.J. Viscous dissipation in explosive volcanic eruptions// IAVCEI General Assembly 2004, Pucón, Chile, 14-19 November 2004. CD paper.
9. Веденева Е.А. Двумерная модель течения магмы в канале вулкана, учитывающая влияние тепловых эффектов// Тр. конф.-конкурса молодых ученых. НИИ механики МГУ. М.: Изд-во МГУ. 2006. С. 128-135.
10. Веденева Е.А. Течение магмы в канале вулкана с учетом сжимаемости и тепловых эффектов// Тр. конф.-конкурса молодых ученых. НИИ механики МГУ. М.: Изд-во МГУ. 2007. С. 96-104.
11. Costa A., Melnik O., Sparks R. J., Vedeneva E. Thermal budget of magma flows in a conduit: effects of viscous heating and heat loss// AGU, San Francisco, USA, December 2006. 87(52). Abstract V32C-03.
12. Веденева Е.А. Двумерные модели течения магмы в канале вулкана, учитывающие сжимаемость магмы и тепловые эффекты// Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 27-38.
13. Costa A., Melnik O., Vedeneva E. Thermal effects during magma ascent in conduits// Journal of Geophysical Research. In press.