

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. Ломоносова

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ВОРОНОВА Татьяна Владимировна

**ПРЯМОЙ РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ**

Специальность 01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва—2007

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
Н.В. Никитин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
И.И. Вигдорович  
доктор физико-математических наук,  
А.В. Сетуха

Ведущая организация: Институт теоретической и прикладной  
механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 19 октября 2007 г. в 16 часов 20 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, г. Москва, Воробьевы горы, Главное здание МГУ, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан " " сентября 2007 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук

А.Н. Осипцов

# 1 Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В настоящее время довольно подробно изучены как численно, так и экспериментально одномерные в среднем турбулентные течения. Течения, средние характеристики которых зависят от двух координат, например, течения в некруглых трубах, интересны в прикладном и научном плане не только большей пространственной сложностью, но и наличием так называемых турбулентных вторичных течений, именуемых также вторичными течениями Прандтля 2-ого рода. Вторичные течения — это организованные движения жидкости в плоскости, перпендикулярной к направлению основного потока. В отличие от вторичных течений Прандтля 1-ого рода, возникающих в потоках вдоль вогнутой поверхности под действием центробежных сил как в турбулентных, так и в ламинарных потоках, вторичные течения Прандтля 2-ого рода — исключительно турбулентное явление, вызываемое анизотропией компонент тензора напряжений Рейнольдса. Интенсивность турбулентных вторичных течений невелика (как правило 1-3% от средней скорости потока), однако их вклад в процессы переноса импульса, массы, примеси в поперечной к направлению потока плоскости весьма значителен. Непосредственное измерение вторичных течений в экспериментальных условиях затруднительно, поскольку их величина сравнима с точностью измерений. Отсутствие достоверных экспериментальных данных задерживает разработку приближенных методов расчета таких течений. В этих условиях прямой расчет оказывается практически единственным источником надежной информации о свойствах и структуре вторичных течений в некруглых трубах.

До недавнего времени численное исследование турбулентных течений с неоднородными средними характеристиками ограничивалось трубами прямоугольного сечения. Эллиптическая труба является незначительной модифи-

кацией классической трубы и простейшим типом трубы некруглого сечения. Несмотря на это для турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости в трубах эллиптического сечения в литературе до недавнего времени отсутствовали какие-либо данные об их свойствах и структуре.

**Целью работы** является прямой расчет и анализ развитых турбулентных течений в трубах эллиптического сечения.

**Научная новизна:**

- Определены интегральные характеристики турбулентных течений в эллиптических трубах, распределения средних и пульсационных характеристик по сечению трубы.
- Выявлены факторы, влияющие на форму и интенсивность вторичных течений.
- Описано поведение всех членов уравнения баланса кинетической энергии пульсаций, характеризующих производство, диссипацию и перераспределение энергии по сечению трубы. Выявлены сходства и отличия с поведением соответствующих характеристик в других течениях.

**Практическая ценность работы.** Результаты могут быть использованы для разработки и тестирования приближенных методов расчета турбулентных течений, верификации коммерческих пакетов программ. Реализованные в работе вычислительные методики могут быть использованы для расчета широкого класса турбулентных течений в сложной геометрии.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на семинаре по газовой динамике под руководством академика Г.Г. Черного в Институте механики МГУ (2007г.), на конференции "Ломоносовские чтения"(2006г. и 2007г.), на международной школе-семинаре МГУ "НеЗаТеГиУс"(Московская область, 2006г.), на семинаре "Гидромеханиче-

ская неустойчивость и турбулентность" под руководством доктора физико-математических наук, профессора С.Я. Герценштейна в Институте механики МГУ (2005г. и 2007г.).

**Публикации.** Результаты диссертации отражены в пяти публикациях, из них две в научных журналах из списка ВАК.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации — 93 страницы, включая 30 фигур, 1 таблицу и список литературы из 89 наименований.

## 2 Содержание работы

### Введение

Во введении обоснована актуальность темы работы, приведена аннотация ее содержания, указаны цель и новизна исследований.

### Первая глава

Первая глава начинается с обзора существующих исследований течений в трубах эллиптического сечения. **Разделы 1.1—1.2** посвящены описанию ламинарного установившегося течения и изучению вопроса его линейной устойчивости. Для турбулентных течений в эллиптической трубе в литературе до недавнего времени отсутствовали какие — либо данные. В **разделе 1.3** приводятся результаты численных исследований других турбулентных течений, проводившихся различными авторами ранее. К ним относятся течения в плоском канале, в асимптотическом погранслое над плоской пластиной, в трубе круглого, квадратного, и эксцентрического кольцевого сечения. Далее в **разделе 1.4** приводится краткая сводка вычислительных подходов, использовав-

шихся в разное время для расчета турбулентных течений. Описаны области применимости этих подходов.

## Вторая глава

Во второй главе приводится постановка задачи и описывается используемая вычислительная методика.

**Раздел 2.1** посвящен постановке задачи. Течение несжимаемой жидкости в трубе эллиптического сечения описывается уравнениями Навье—Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \text{grad } \Pi - \nu \text{rot } \boldsymbol{\omega}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}, \quad \Pi = p/\rho + |\mathbf{u}|^2/2$$

Здесь  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$  — поля скорости и завихренности,  $p$  — давление,  $t$  — время,  $\rho$ ,  $\nu$  — постоянные плотность и вязкость жидкости.

Областью решения является внутренность эллиптического цилиндра

$$\Omega = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1, 0 \leq z \leq L_z\}$$

Для определенности считается  $a > b$ .

На стенке трубы ставится условие прилипания. Считается, что рассматриваемая труба конечной протяженности является участком бесконечно-длинной трубы, и течение статистически однородно вдоль продольной координаты  $z$ . Это является модельной идеализацией течения в длинной трубе на участке, достаточно удаленном от входного и выходного сечений. Предположение о продольной однородности позволяет использовать периодические граничные условия вдоль координаты  $z$ .

Из периодичности скорости по  $z$  следует, что давление можно представить в виде

$$\Pi(t, x, y, z) = -D_p(t)z + q(t, x, y, z), \quad q(t, x, y, z + L_z) = q(t, x, y, z)$$

Линейная составляющая давления отвечает внешнему напору, создающему движение. Средний градиент давления  $D_p(t)$  определяется в каждый момент времени из условия постоянства расхода жидкости. Интенсивность движения характеризуется значением числа Рейнольдса, выраженного через среднюю скорость движения и гидравлический диаметр.

Технология прямых расчетов турбулентных течений в трубах состоит в следующем. В начальный момент времени задается некоторое трехмерное поле скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности. После чего уравнения движения интегрируются по времени до выхода решения на статистически стационарный режим. Характер предельного режима зависит от числа Рейнольдса и в некоторой степени от деталей начальных условий. При малых числах Рейнольдса единственный предельный режим представляет собой стационарное движение, не зависящее от координаты  $z$  — ламинарное течение. При больших числах Рейнольдса кроме ламинарного течения возможно установление турбулентного течения, характеризующегося нестационарным и непостоянным по  $z$  решением. Пороговое значение числа Рейнольдса, начиная с которого возможно установление турбулентного режима, зависит от конкретных геометрических параметров сечения трубы.

В настоящей работе начальное поле скорости задавалось в виде суммы скорости в течении Пуазейля и некоторого возмущения  $\mathbf{v}$ , обладающего нулевым расходом. Поле  $\mathbf{v}$  должно быть бездивергентным, удовлетворять условию непротекания на стенке трубы и не содержать каких-либо симметрий, сохраняющихся в силу уравнений Навье—Стокса. Для достижения турбулентного режима необходимо также, чтобы пространственная (вдоль координаты  $z$ ) неоднородность начального поля скорости имела амплитуду по крайней мере в несколько процентов от средней скорости течения Пуазейля. При выполнении этих условий средние характеристики устанавливающихся турбулентных режимов не зависят от конкретного выбора начального возмущения.

В разделах 2.2—2.4 дается описание составляющих вычислительного метода: пространственной дискретизации, определения давления, схемы интегрирования по времени.

Задача решается с использованием криволинейных координат  $(r, \theta)$  в плоскости поперечного сечения трубы:

$$x = c \operatorname{ch} f(r) \cos \theta, \quad y = c \operatorname{sh} f(r) \sin \theta \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, r^*]$ ,  $r^* = \ln \left( \sqrt{(a+b)/(a-b)} \right)$ .

Наиболее динамически значимая область находится вблизи стенки, так как здесь наблюдается наибольшая активность турбулентных пульсаций. Для адекватного сеточного разрешения этой области с помощью гладкого монотонного преобразования  $f = f(r)$  производится локальное сгущение узлов около стенки. По  $z$  и  $\theta$  используется равномерная сетка.

В системе координат  $(r, \theta, z)$  метрические коэффициенты (параметры Ламэ) имеют вид:

$$H_r = H f', \quad H_\theta = H, \quad H_z = 1, \quad H = c \sqrt{\operatorname{sh}^2 f(r) + \sin^2 \theta}$$

Численный метод основан на разностной аппроксимации уравнений на равномерной сетке в координатах  $(r, \theta, z)$ . Область решения  $[0, r^*] \times [0, 2\pi] \times [0, L_z]$  делится на равные прямоугольные ячейки, в физическом пространстве размер расчетной ячейки меняется от точки к точке.

В соответствии с принципом перемежающихся сеток (Харлоу и Уэлш<sup>1</sup>), сеточные функции, соответствующие различным отыскиваемым функциям (давление, три компоненты скорости и три компоненты завихренности), определяются в разных системах точек. Для получения дискретной (по пространству) системы уравнений все производные, входящие в уравнения движения,

---

<sup>1</sup>Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids 1965. V. 8. N.12 P. 2182—2189.

заменяются центральными разностями, аппроксимирующими их со вторым порядком точности. При такой замене все линейные члены в уравнениях Навье—Стокса и неразрывности, записанные в скалярной форме, оказываются согласованными в том смысле, что левые и правые части всех уравнений определены в одних и тех же точках. Сомножители нелинейных членов относятся к разным системам узлов, поэтому аппроксимация нелинейных членов невозможна без дополнительных интерполяций. Для вычисления значений переменных в точках между расчетными узлами применяется осреднение в пределах одного шага сетки.

Система уравнений Навье—Стокса после дискретизации по пространству записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{1}{H} \overline{u_\theta H^r} \omega_z - \overline{u_z^r} \omega_\theta - \nu \left( \frac{1}{H} \delta_\theta \omega_z - \delta_z \omega_\theta \right) - \frac{1}{H f'} \delta_r q \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \overline{u_z^\theta} \omega_r - \frac{1}{H f'} \overline{u_r H^\theta} \omega_z f'^r - \nu \left( \delta_z \omega_r - \frac{1}{H f'} \delta_r \omega_z \right) - \frac{1}{H} \delta_\theta q \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{1}{H^2} \left( \frac{1}{f'} \overline{u_r^z} \omega_\theta H^2 f'^r - \overline{u_\theta^z} \omega_r H^2 \right) - \frac{\nu}{H^2} \left[ \frac{1}{f'} \delta_r (\omega_\theta H) - \delta_\theta (\omega_r H) \right] - \delta_z q + D_p \quad (4)$$

Дискретные уравнения неразрывности и определения компонент завихренности получаются также путем замены частных производных на разности.

Непосредственно на твердой стенке трубы определены лишь нормальные компоненты скорости ( $u_r$ ), поэтому условия непротекания и прилипания формулируются следующим образом:

$$u_r = \overline{H u_\theta^r} = \overline{u_z^r} = 0, \quad \text{при } r = r^*$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что разностные дивергенции от  $\omega$  и от вязких членов уравнений (2) — (4) тождественно равны нулю. Также равен нулю разностный ротор от аппроксимации  $\text{grad } q$ .

При расчете турбулентных течений важно правильное описание интегрального баланса кинетической энергии. Уравнение баланса получается после скалярного умножения уравнений Навье—Стокса на  $\mathbf{u}$  и интегрирования по области течения. Как и в дифференциальной формулировке задачи при выполнении условий непротекания на границах (или условий периодичности), нелинейные члены уравнений Навье—Стокса и градиент давления в дискретной формулировке не дают вклада в уравнение баланса кинетической энергии.

Для давления получается задача Неймана для уравнения Пуассона. Условие разрешимости задачи является условие постоянства объема жидкости в области течения (поток жидкости через границы области равен нулю), что очевидно необходимо для несжимаемости. Для решения уравнения Пуассона в направлениях  $\theta$  и  $z$  используется дискретное преобразование Фурье. В результате задача сводится к решению совокупности одномерных уравнений, каждое из которых решается итерационным методом.

Для интегрирования по времени используется полунеявный метод Рунге-Кутты 3-его порядка точности, разработанный Н.В. Никитиным. Неявно обрабатываются лишь вязкие члены уравнений Навье—Стокса, порождающие наибольшую жесткость дискретной системы.

## Третья глава

Третья глава посвящена исследованию результатов расчетов в трубе эллиптического сечения с соотношением полуосей  $b/a = 0.5$  при  $Re = 4000$  и  $Re = 6000$  (число Рейнольдса  $Re$  вычисляется через среднюю скорость и гидравлический диаметр).

В разделе 3.1 приводятся геометрические параметры задачи, обосновывается выбор алгоритмических параметров.

**Раздел 3.2** посвящен описанию описанию интегральных и пульсационных характеристик течения.

Результаты работы хорошо согласуются с результатами, полученными ранее методом виртуальных границ (Никитин, Яхот<sup>2</sup>). Для обоих чисел Рейнольдса также было проведено сравнение профиля продольной компоненты скорости и интенсивности пульсаций продольной компоненты скорости вдоль меньшей полуоси эллипса с соответствующими профилями для турбулентного течения в плоском канале при близких локальных числах Рейнольдса  $Re_\tau = u_\tau b / \nu$  (в плоском канале  $b$  — полуширина канала). В эллиптической трубе локальная динамическая скорость  $u_\tau$  вычисляется через локальное трение на стенке в точке  $(x = 0, y = b)$ . Для меньшей полуоси эллипса  $Re_\tau$  равнялось 118 и 162, для канала — 110 и 150. Рассматриваемые профили близки к соответствующим профилям в плоском канале.

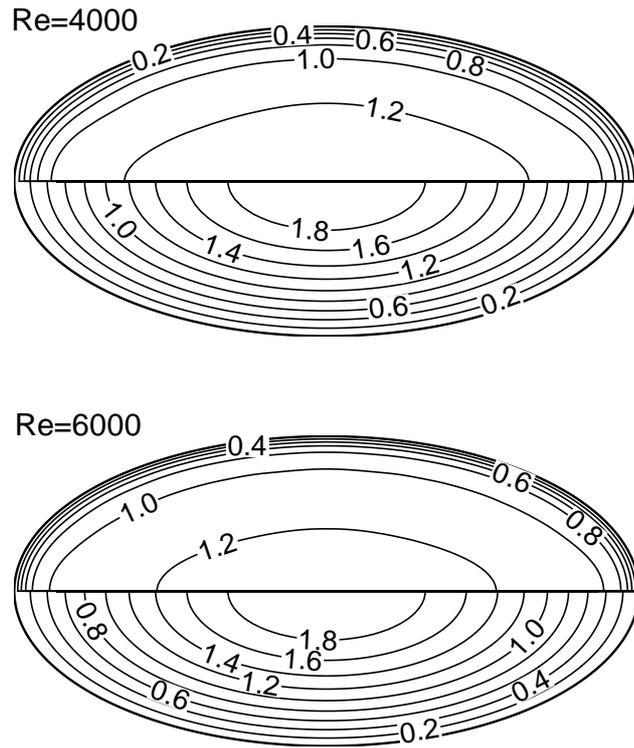
Рассчитанные течения в турбулентном режиме характеризуются существенным повышением коэффициента сопротивления по сравнению с ламинарным режимом течения. Коэффициент сопротивления повышается в 2.45 раза при  $Re=4000$  и в 3.3 раза при  $Re=6000$ . Относительная разница с коэффициентом сопротивления, полученным из закона сопротивления Блазиуса, для обоих чисел Рейнольдса не превышает 3%.

Максимальная средняя продольная скорость течения в трубе уменьшается от 2 в ламинарном режиме до 1.3 ( $Re=4000$ ) и 1.27 ( $Re=6000$ ) в турбулентном (фиг. 1). Профили скорости становятся более наполненными в радиальном направлении.

При  $Re = 6000$  для профиля средней продольной скорости вдоль меньшей полуоси эллипса четко выделен логарифмический участок. Известно, что при невысоких числах Рейнольдса профили скорости отклоняются в верх-

---

<sup>2</sup>Nikitin N., Yakhot A. Direct numerical simulation of turbulent flow in elliptical ducts // J. Fluid Mech. 2005. V. 532. P. 141–164.

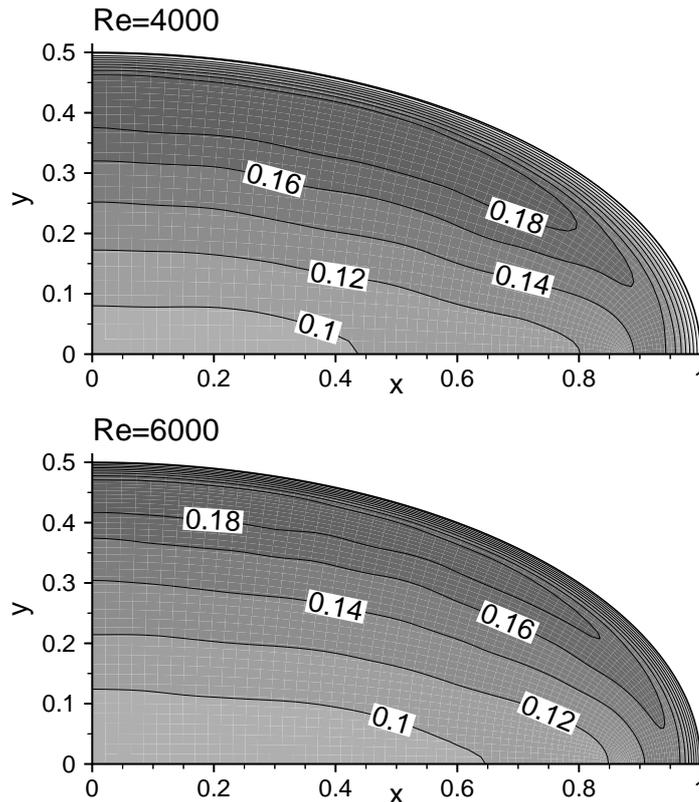


Фиг. 1: Распределение средней продольной скорости по сечению трубы. Нижняя половина фигуры соответствует ламинарному режиму, верхняя — турбулентному. Интервал между линиями уровня составляет 0.2.

нюю сторону от линии, соответствующей универсальному логарифмическому закону стенки, что и наблюдается при  $Re = 4000$ . При нормировке на локальные вязкие масштабы линейный участок в профиле скорости вдоль обеих полуосей сечения трубы простирается до  $d^+ \approx 5$ , также, как и в типичном турбулентном профиле ( $d$  — расстояние до стенки, верхним индексом  $+$  обозначается нормировка на вязкие масштабы).

Наибольший уровень пульсаций скорости наблюдается в пристенной области (фиг. 2). Максимальное значение интенсивности достигается на меньшей полуоси эллипса. Азимутальная зависимость четко выражена для интенсивности поперечных пульсаций.

Показано, что вблизи стенки турбулентные пульсации существенно ани-



Фиг. 2: Распределение среднеквадратичной амплитуды пульсаций скорости по сечению трубы. Интервал между линиями уровня составляет 0.02.

зотропны. Для рассматриваемых течений был вычислен показатель степени неизотропности  $K^*$  (Ли, Ким, Моин<sup>3</sup>).

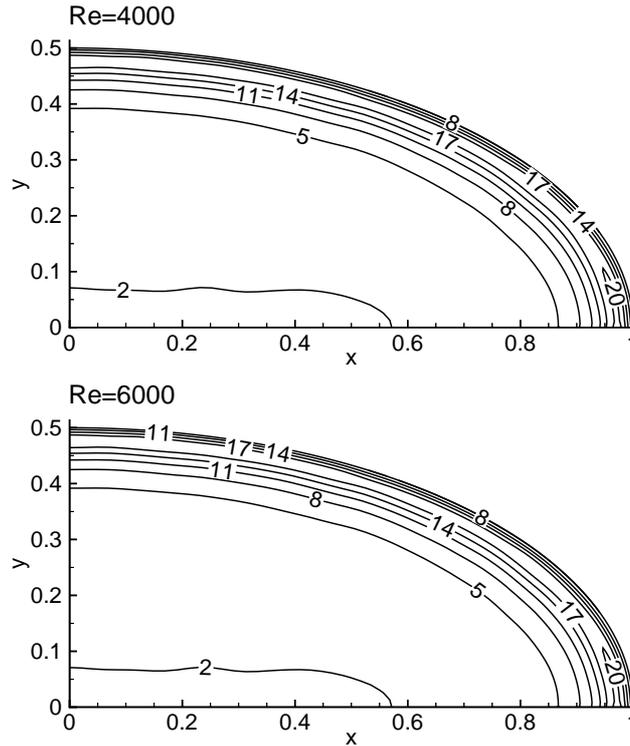
$$K^* = \frac{2u_{z,rms}^2}{u_{x,rms}^2 + u_{y,rms}^2}$$

( $u_{z,rms}$ ,  $u_{x,rms}$ ,  $u_{y,rms}$ —интенсивности пульсаций продольной и поперечных компонент скорости)

Для изотропной турбулентности  $K^* = 1$ . В области вблизи стенки значительная разница между интенсивностями продольных и поперечных пульсаций приводит к намного большим значениям  $K^*$  (фиг.3).

Также показано, что вблизи стенки показатель степени неизотропности турбулентных пульсаций практически не зависит от угла.

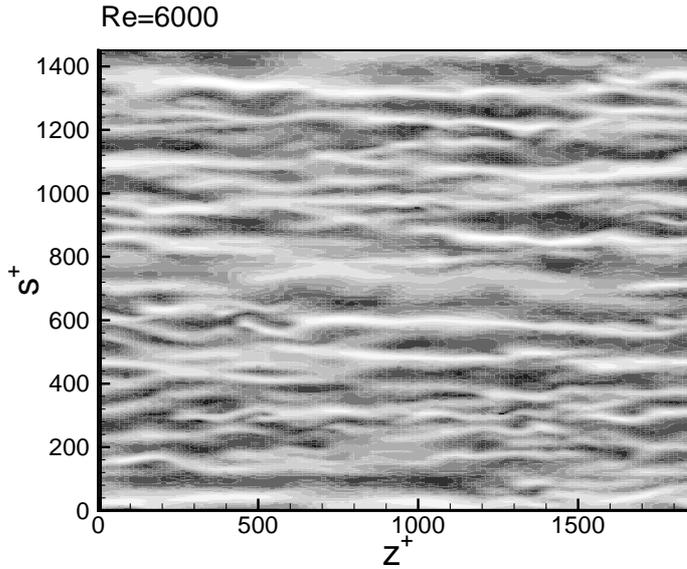
<sup>3</sup>Lee M., Kim J., Moin P. Structure of turbulence at high shear rate // J. Fluid Mech. 1990. V. 190. P. 561–583.



Фиг. 3: Распределения показатель степени неизотропности  $K^*$  по сечению трубы. Интервал между линиями уровня равен 3.

В пристенной области  $0 \leq d^+ \leq 30$  в распределении продольной скорости наблюдаются вытянутые вдоль потока полосы ускоренного и замедленного движения, почти периодически чередующиеся в боковом направлении (фиг. 4). Считается, что с образованием и разрушением данных структур связана наибольшая часть производства напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности. Применение критерия, связывающего значения показателя степени неизотропности турбулентных пульсаций с наличием полос на определенном расстоянии от стенки, показывает, что полосы выражены при  $d^+ \leq 30 - 35$ . Это согласуется с описанным видом распределений продольной скорости.

Локальное трение в турбулентном режиме более равномерно распределено по границе по сравнению с ламинарным режимом. При обоих числах Рейнольдса описано поведение турбулентного касательного напряжения, вязкого



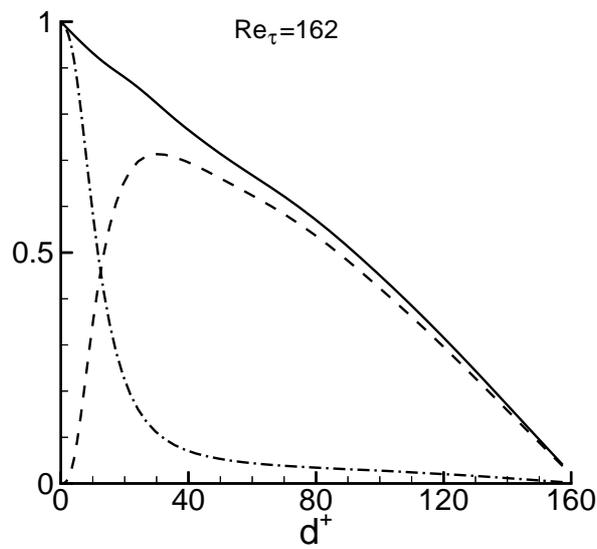
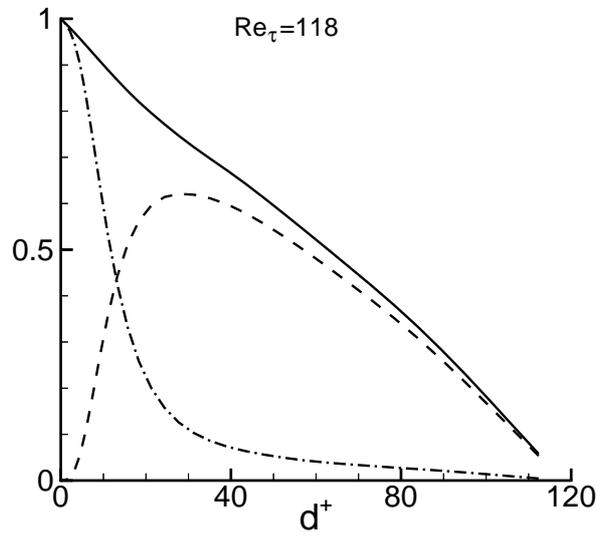
Фиг. 4: Распределение продольной компоненты скорости  $u_z$  на эллиптической поверхности на расстоянии от стенки  $d^+ = 10$  при  $Re = 6000$ .  $s^+$  — длина дуги вдоль координаты  $\theta$ .

трения и их суммы: общего касательного напряжения вдоль меньшей полуоси эллипса (фиг. 5). Турбулентное трение достигает наибольшего значения вблизи стенки, на стенке и в центре трубы оно нулевое. Показано, что в отдалении от стенки полное касательное напряжение определяется в основном турбулентным трением.

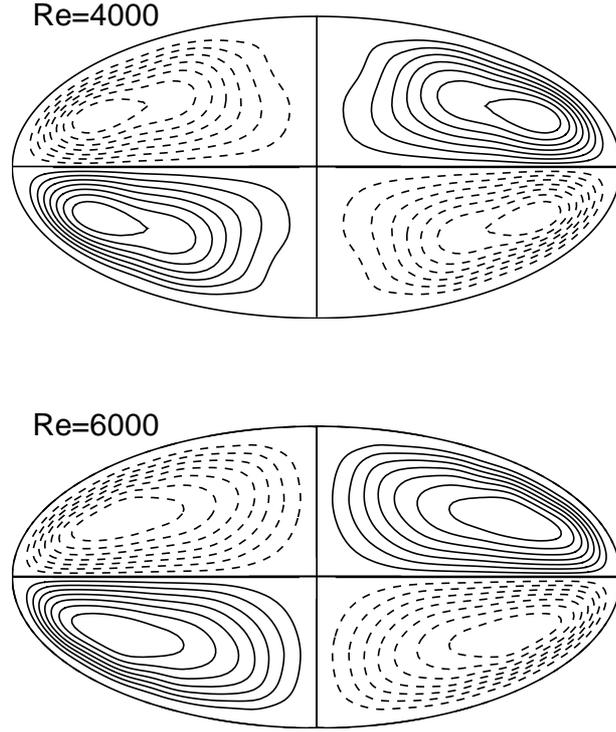
Данные по вторичным течениям Прандтля 2-ого рода вынесены в отдельный раздел главы, так как в анализе результатов расчетов им уделено особое внимание. В **разделе 3.3** описывается форма и интенсивность вторичных течений, изучаются основные факторы, влияющие на их особенности.

Линии тока вторичных течений представлены двумя парами вихрей противоположного знака (фиг. 6). Жидкость растекается от центра трубы к стенке вдоль больших полуосей и возвращается обратно вдоль малых.

Максимальная скорость вторичных течений составляет приблизительно 1% от средней скорости потока, однако, как показано Никитиным и Яхотом, вторичные течения вносят определяющий вклад в формирование распреде-



Фиг. 5: Распределение касательного напряжения вдоль меньшей полуоси трубы при локальном  $Re_\tau = 118$  и  $Re_\tau = 162$ . Пунктир с точкой — вязкое трение, пунктир — турбулентное трение, сплошная линия — их сумма, общее касательное напряжение.



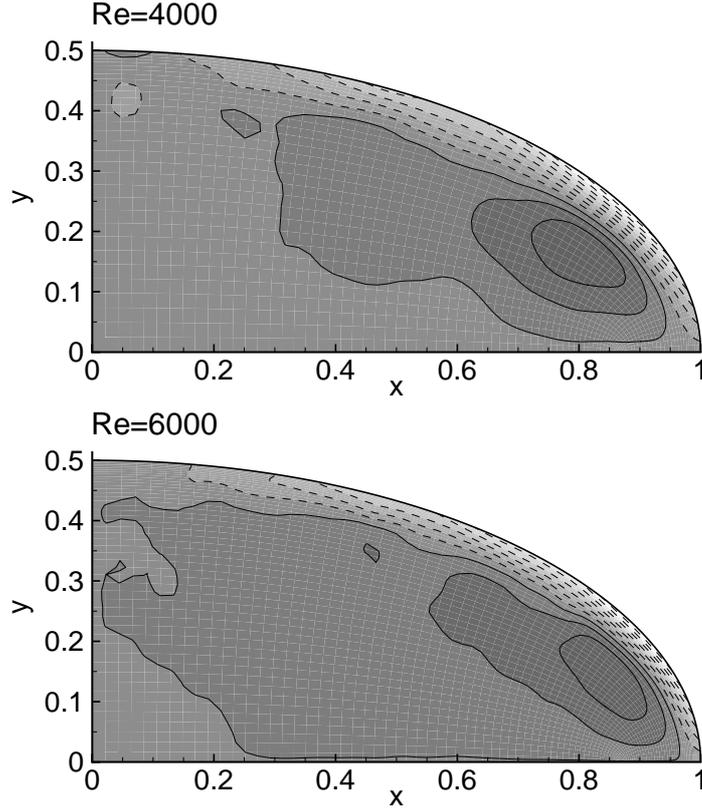
Фиг. 6: Линии тока вторичных течений (сплошные линии соответствуют движению против часовой стрелки, пунктирные — по часовой стрелке) ления средней продольной скорости  $U_z(x, y)$ .

Вторичное течение в развитом турбулентном потоке однозначно определяется по средней продольной компоненте завихренности  $\Omega_z = \partial U_y / \partial x - \partial U_x / \partial y$  ( $U_x, U_y$  — средние поперечные компоненты скорости). Из-за прилипания на стенке трубы  $\Omega_z^+$  меняет знак при приближении к ней и достигает минимального значения непосредственно на стенке (фиг. 7).

Из уравнений Рейнольдса для поперечных компонент средней скорости можно вывести уравнение для продольной завихренности. В эллиптической системе координат  $(r, \theta)$  это уравнение имеет вид:

$$\frac{U_r}{H} \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{H} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \theta} - \frac{\nu}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial \theta^2} \right) = Q_1 + Q_2 \quad (5)$$

$$H(r, \theta) = c \sqrt{\text{sh}^2 r + \sin^2 \theta}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



Фиг. 7: Распределение средней продольной компоненты завихренности по сечению трубы. Положительные уровни отмечены сплошными линиями, отрицательные — штриховыми.

$$Q_1 = \frac{1}{2H^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] H^2 (\langle u_r'^2 \rangle - \langle u_\theta'^2 \rangle)$$

$$Q_2 = \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] H^2 \langle u_r' u_\theta' \rangle$$

Первые два слагаемых в левой части (5) описывают конвективный перенос завихренности вторичным течением, третье слагаемое ответственно за вязкое сглаживание градиента  $\Omega_z$ . Два слагаемых в правой части представляют собой источники завихренности. При отсутствии этих источников уравнение (5) совместно с уравнением неразрывности, выражением завихренности через компоненты скорости и условиями прилипания на стенке дает нулевое решение. Таким образом, наличие ненулевых источников, связанных с на-

пряжениями Рейнольдса — необходимое условие возникновения вторичного течения.

Результаты расчетов показывают, что источниковые члены имеют заметные ненулевые значения лишь в узком пристенном слое, где компоненты скорости  $u_r$  и  $u_\theta$  могут интерпретироваться как нормальная и тангенсальная по отношению к стенке.

Первый член в правой части (5) отвечает генерации завихренности благодаря неоднородному вдоль стенки распределению разности нормальных напряжений Рейнольдса, отражающей анизотропию турбулентных пульсаций вблизи стенки. Пренебрегая переменностью  $H(r, \theta)$  в каждой точке пристенной области можно выписать следующее приближенное выражение для величины  $Q_1$ :

$$Q_1 \approx \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial n} (\langle u_\theta'^2 \rangle - \langle u_r'^2 \rangle)$$

Здесь  $\tau$  и  $n$  обозначают тангенсальную и нормальную координаты ( $d\tau \approx Hd\theta$ ,  $dn \approx -Hdr$ ). Вблизи стенки

$$\langle u_\theta'^2 \rangle \sim n^2, \quad \langle u_r'^2 \rangle \sim n^4 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} (\langle u_\theta'^2 \rangle - \langle u_r'^2 \rangle) > 0$$

Пульсации скорости в области меньшей полуоси эллипса ( $\theta = \pi/2$ ) интенсивнее, чем в области большей полуоси ( $\theta = 0$ ) (фиг. 2). Это в равной степени относится к интенсивности колебаний каждой компоненты скорости, так что растущей функцией  $\theta$  оказывается и  $\langle u_\theta'^2 \rangle - \langle u_r'^2 \rangle$  и ее нормальная производная. Таким образом получаем  $Q_1 > 0$ . В трубе круглого сечения или в плоском канале анизотропия нормальных напряжений Рейнольдса не создает вторичного течения из-за однородности вдоль стенки (тангенсальная производная от разности напряжений Рейнольдса тождественно равна нулю).

Аналогичное приближенное выражение для второго источникового члена в правой части (5) имеет вид:

$$Q_2 \approx \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right) \langle u_r' u_\theta' \rangle$$

Далее, очевидно, что изменение  $\langle u'_r u'_\theta \rangle$  вдоль стенки много меньше изменения вдоль нормали, поэтому производной  $\partial^2/\partial\tau^2$  можно пренебречь. Кроме того, из условий прилипания  $\langle u'_r u'_\theta \rangle \sim n^3$ , откуда следует, что знак  $Q_2$  противоположен знаку  $\langle u'_r u'_\theta \rangle$ . По крайней мере в области пристенного сдвигового слоя вторичного течения положительное  $u'_r$  (по направлению к стенке) переносит частицы жидкости с большей тангенсальной скоростью т.е. создает положительную пульсацию  $u'_\theta$  и наоборот, отрицательная радиальная пульсация создает отрицательную  $u'_\theta$ . Таким образом,  $\langle u'_r u'_\theta \rangle > 0$  и  $Q_2 < 0$ .

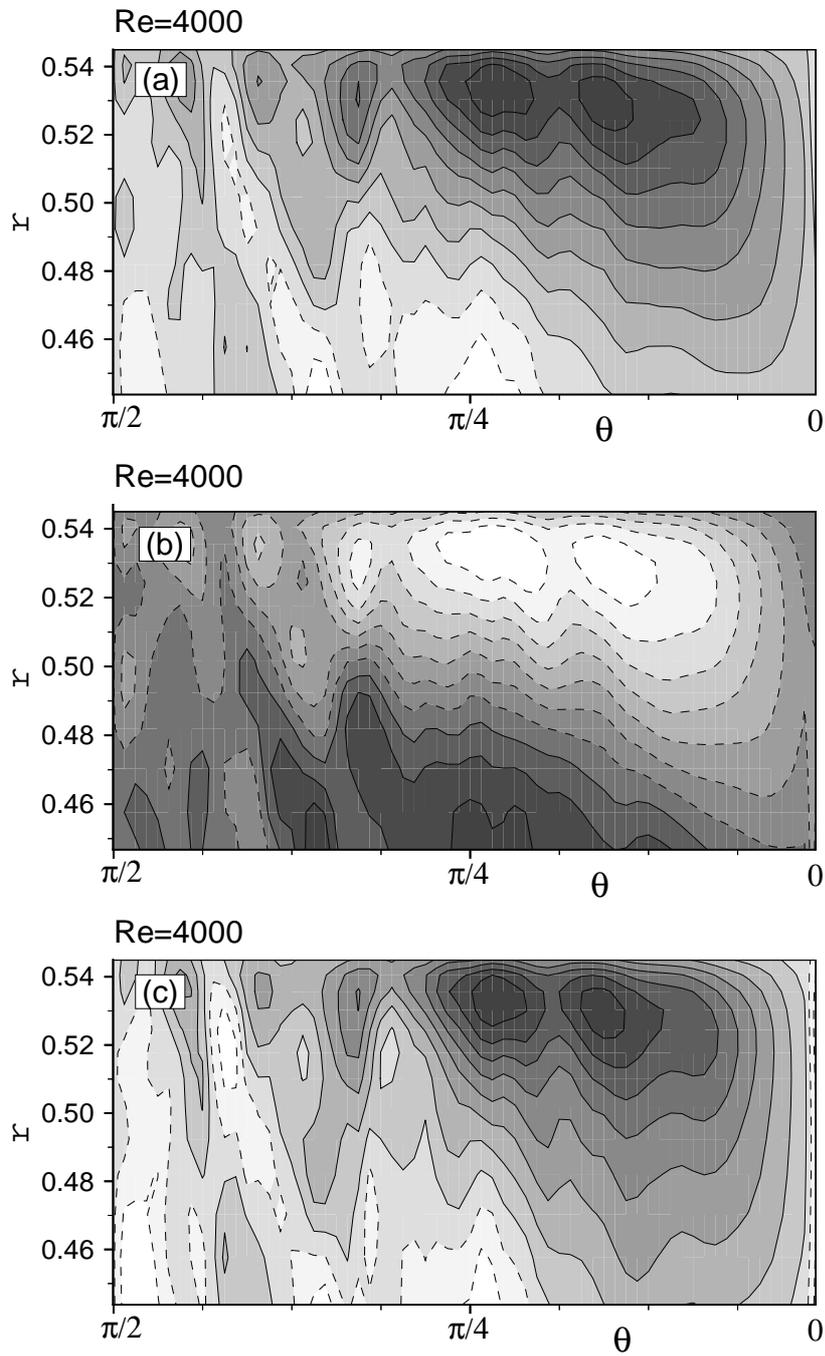
Несмотря на то, что два источниковых члена в правой части (5) имеют противоположные знаки, знак интегрального вклада должен совпадать со знаком  $Q_1$ . В противном случае вторичное течение изменило бы направление на противоположное, а вместе с ним изменился бы знак у  $\langle u'_r u'_\theta \rangle$  и, соответственно, у  $Q_2$ . Из приведенных приближенных оценок следует гипотетический вывод о том, что знак источника в уравнении для продольной завихренности определяется членом, содержащим разность нормальных напряжений Рейнольдса. Член содержащий касательные напряжения Рейнольдса действует в противоположном направлении, однако не может поменять направление вторичного течения.

Достаточно неожиданным является совпадение распределений  $Q_1$  и  $-Q_2$  вплоть до мелких деталей со значениями  $-Q_2$  примерно в одну треть от  $Q_1$  (фиг. 8, 9).

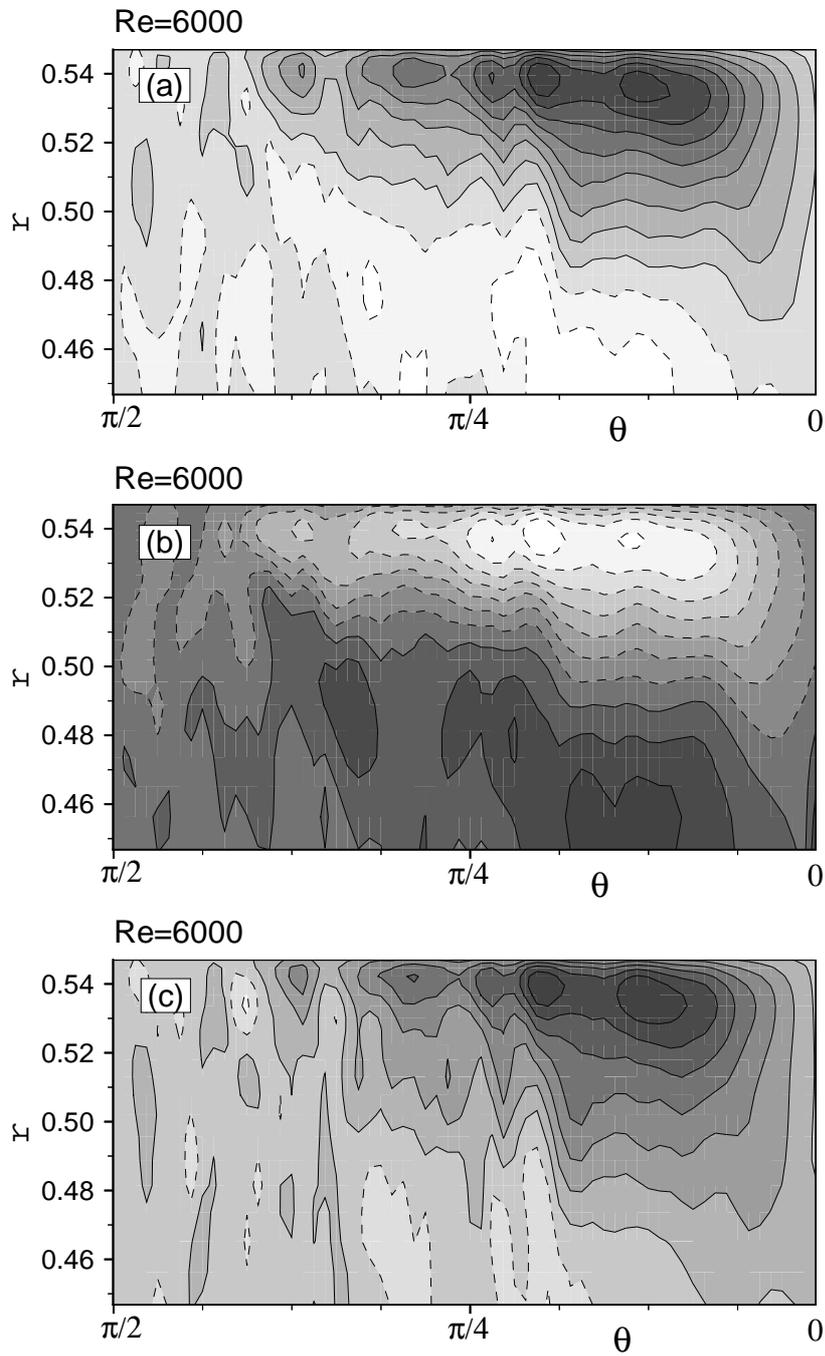
В частности, минимум  $Q_2$  достигается в той же точке, что и максимум  $Q_1$ . Там же достигается максимум  $Q_1 + Q_2$ .

В **разделе 3.4** описано поведение всех членов уравнения баланса кинетической энергии пульсаций, характеризующих производство, диссипацию и перераспределение энергии по сечению трубы. Выявлены сходства и отличия с поведением соответствующих характеристик в канале.

Большинство современных инженерных методов расчета турбулентных



Фиг. 8: Распределение источниковых членов уравнения (5) в плоскости переменных  $(\theta, r)$  при  $Re = 4000$ . (a) —  $Q_1$ , (b) —  $Q_2$ , (c) —  $Q_1 + Q_2$ . Положительные уровни отмечены сплошными линиями, отрицательные — штриховыми.



Фиг. 9: Распределение источниковых членов уравнения (5) в плоскости переменных  $(\theta, r)$  при  $Re = 6000$ . (a) —  $Q_1$ , (b) —  $Q_2$ , (c) —  $Q_1 + Q_2$ . Положительные уровни отмечены сплошными линиями, отрицательные — штриховыми.

течений использует модельное уравнение для кинетической энергии турбулентности  $k = 0.5u'_i u'_i$  вида

$$\frac{D\langle k \rangle}{Dt} = P + D - \varepsilon \quad (6)$$

Где  $D/Dt$ — полная производная, а члены в правой части  $P, D$  и  $\varepsilon$  — соответственно производство, диффузия и диссипация энергии, подлежащие модельному описанию. Прямой расчет всех членов уравнения для кинетической энергии, а также аналогичных уравнений для диссипации кинетической энергии и напряжений Рейнольдса в плоском канале (Мансур, Ким, Моин<sup>4</sup>) стимулировали построение нового поколения более точных моделей расчета неизотропных турбулентных течений.

Диффузия кинетической энергии происходит за счет трех различных физических механизмов — вязкости, турбулентности и пульсаций давления:

$$D = D_v + D_t + D_p$$

Диффузия кинетической энергии за счет пульсаций давления так же, как и конвективный перенос энергии вторичным течением, во всей области течения малы по сравнению с другими членами уравнения энергии. Качественно процессы производства, диссипации и диффузии кинетической энергии происходят одинаково вдоль всего периметра сечения трубы (фиг. 10). Максимум производства достигается на расстоянии  $d^+ = 12$  от стенки. Вязкая диффузия переносит кинетическую энергию из области активного производства  $6 < d^+ < 20$  в пристенную область  $d^+ < 6$ . Турбулентная диффузия действует в обе стороны. Из области  $8 < d^+ < 30$  энергия переносится как к стенке, так и во внешнюю область потока. Диссипация кинетической энергии турбулентности максимальна на стенке, где она балансирует вязкую диффузию.

---

<sup>4</sup>Mansour N.N., Kim J., Moin P. Reynolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 15–44.

При удалении от стенки диссипация уменьшается уравновешивая производство и турбулентный перенос. Те же процессы происходят и в плоском канале (Мансур, Ким, Моин<sup>4</sup>).

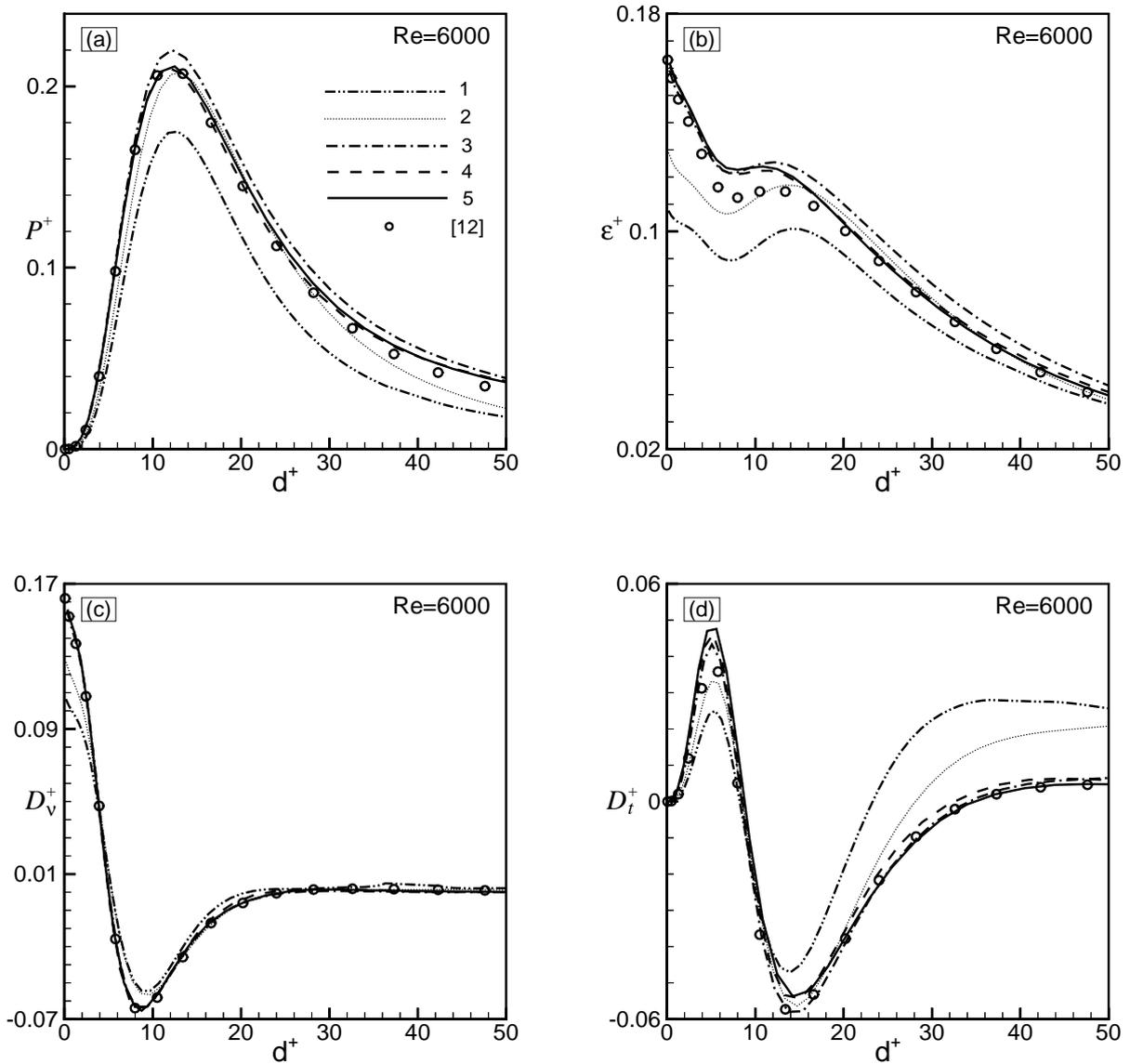
Вместе с тем, имеется заметное количественное отличие. В отдалении от стенки в узкой части трубы наблюдается повышенное положительное значение турбулентной диффузии. При пониженном уровне пульсаций в этой части трубы такое аномальное поведение может объясняться переносом энергии в тангенсальном направлении из области более интенсивных колебаний. Также необходимо отметить следующую особенность распределения производства энергии. Внутри координатных четвертей максимум производства энергии по радиальному направлению при нормировке на местные вязкие масштабы ведет себя не монотонно вдоль периметра трубы. Наибольшие значения наблюдаются в промежуточной области. Это связано с наличием углового градиента средней скорости и неоднородностью распределения энергии пульсаций по сечению трубы.

## **Заключение**

В заключении подведены итоги работы и сформулированы ее основные результаты.

## **Приложение**

В приложении приводится структурная диаграмма программного кода. Ее компоненты отражают основные этапы расчета и особенности их взаимодействия.



Фиг. 10: Распределения членов в правой части уравнения кинетической энергии турбулентности (6) в пристенной области трубы при  $Re = 6000$ . (a) — производство, (b) — диссипация, (c) — вязкая диффузия, (d) — турбулентная диффузия. Линии 1–5 соответствуют координате  $\theta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ . Точки — результаты для плоского канала при  $Re_\tau = u_\tau h/\nu = 150$  ( $h$  — полуширина канала).

### 3 Основные результаты и выводы

- Определены интегральные характеристики турбулентных течений в эллиптических трубах, распределения средних и пульсационных характеристик по сечению трубы при  $Re = 4000$  и  $Re = 6000$ .
- Описано поведение всех членов уравнения баланса кинетической энергии пульсаций, характеризующих производство, диссипацию и перераспределение энергии по сечению трубы. Выявлено, что качественно процессы производства, диссипации и диффузии кинетической энергии происходят одинаково вдоль всего периметра сечения трубы и качественно совпадают с распределением соответствующих характеристик в плоском канале. Вместе с тем, имеется заметное количественное отличие. В отдалении от стенки в узкой части трубы наблюдается повышенное положительное значение турбулентной диффузии. При пониженном уровне пульсаций в этой части трубы такое аномальное поведение может объясняться переносом энергии в тангенсальном направлении из области более интенсивных колебаний. Также необходимо отметить следующую особенность распределения производства энергии. Внутри координатных четвертей максимум производства энергии по радиальному направлению при нормировке на местные вязкие масштабы ведет себя не монотонно вдоль периметра трубы. Наибольшие значения наблюдаются в промежуточной области. Это связано с наличием углового градиента средней скорости и неоднородностью распределения энергии пульсаций по сечению трубы.
- Из уравнений Рейнольдса для поперечных компонент средней скорости получено уравнение для средней продольной завихренности в эллиптической системе координат. Один из источников членов уравне-

ния отвечает генерации завихренности благодаря неоднородному вдоль стенки распределению разности нормальных поперечных напряжений Рейнольдса. (Отметим, что в трубе круглого сечения или в плоском канале анизотропия нормальных напряжений Рейнольдса не создает вторичного течения из-за однородности разности напряжений Рейнольдса вдоль стенки.) Другой источниковый член определяет вклад сдвигового напряжения Рейнольдса. Показано, что главным фактором, определяющим форму и интенсивность вторичного течения, является вклад первого источникового члена. Вклад второго члена является противоположным по знаку, однако не является определяющим.

## Публикации по теме диссертации

1. *Воронова Т.В., Никитин Н.В.* Прямой расчет турбулентных течений в трубе эллиптического сечения // ЖВМ и МФ. 2006. N 46(8). С. 1477 — 1485.
2. *Воронова Т.В., Никитин Н.В.* Результаты прямого расчета турбулентного течения в трубе эллиптического сечения // Изв. РАН. МЖГ. 2007. N 2. С. 59 — 70.
3. *Воронова Т.В.* Прямой расчет турбулентного течения в трубе эллиптического сечения. // Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность: Матер. междун. конференции.—Моск. обл., 26 февраля — 5 марта 2006г. — М., 2006. — С. 26.
4. *Воронова Т.В., Никитин Н.В.* Прямой расчет турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости в трубах эллиптического сечения. // Ломоносовские чтения: тез. докл. научной конференции. Секция механики; г. Москва, апрель 2006г. — М., 2006. — С. 46.

5. *Воронова Т.В.* Результаты прямого расчета турбулентного течения в трубе эллиптического сечения при  $Re = 4000$  и  $Re = 6000$ . // Ломоносовские чтения: тез. докл. научной конференции. Секция механики; г. Москва, апрель 2007г. — М., 2007. — С. 131.