МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.55

Коссовский Илья Григорьевич

ОБОЛОЧКИ ГОЛОМОРФНОСТИ МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Специальность: 01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор *Белошапка Валерий Константинович*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор *Лобода Александр Васильевич,*
	доктор физико-математических наук *с.н.с. Щепин Евгений Витальевич*
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

Защита состоится " 19 " октября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан " 19 " сентября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико - математических
наук, профессор Т.П.Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одним из основных объектов рассмотрения современного многомерного комплексного анализа являются вещественные подмногообразия комплексного пространства. Самая маломерная ситуация, когда они возникают - это ситуация кривой в $\mathbb{C}^1$. Наличие такого объекта иллюстрирует более богатую, по сравнению с вещественной прямой, геометрию комплексной плоскости. Это обстоятельство во многом явилось основой для построения одной из красивейших и важнейших математических теорий - теории функций одного комплексного переменного, которая вся, в определенном смысле, является следствием одного факта - теоремы Коши об интеграле по контуру. Теория функций многих комплексных переменных, в свою очередь, коренным образом отличается от теории функций одного комплексного переменного, как по методам исследования, так и по самой постановке задач, и причиной этого является именно более богатая геометрия пространств $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ по сравнению с геометрией $\mathbb{C}^1$, в частности - наличие большого количества подмногообразий, как вещественных, так и комплексных, крайне разнообразных по своим топологическим свойствам и по своей комплексной дифференциальной геометрии. Такое разнообразие объектов, населяющих комплексное пространство, обуславливает совершенно новые интересные свойства аналитических функций на таком пространстве. К примеру, наличие аналитических дисков приводит к эффекту обязательного аналитического продолжения [1]; наличие гиперповерхностей с различными CR-структурами [2] приводит к эффекту голоморфной неэквивалентности двух почти любых топологически тривиальных областей [3]; наличие аналитических подмножеств положительной размерности делает невозможным существование изолированных нулей голоморфных функций [1].

Вещественные подмногообразия комплексного пространства возникают в многомерном комплексном анализе самым естественным

[1] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Изд. "Наука". 1976. Т. 2.

[2] Chern S., Mozer J. Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 1974. 133. № 3-4. P. 219-271.

[3] Burns D., Shnider S., Wells R. Deformations of strictly-pseudoconvex domains, Invent. Math. 1978. V. 46 № 3. P. 199-217.

образом, прежде всего - как топологические границы областей в $\mathbb{C}^N$. Такие многообразия - вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^N$ - впервые изучались еще Пуанкаре[4] для случая $N = 2$. Ему принадлежит ряд результатов о классификации гиперповерхностей и о строении группы их голоморфных симметрий. Кроме того, гиперповерхности играют исключительно важную роль при изучении голоморфных функций и отображений в самой ограниченной ими области. Имеется ряд формул, аналогичных интегральной формуле Коши в одном переменном, выражающих значения аналитической функции в области через ее граничные значения[5]. Имеется также ряд результатов (К.Фефферман[6], С.Пинчук[7], А.Витушкин[8]) о продолжении биголоморфных отображний между областями на границы областей и в окрестности их замыканий, что сводит проблему голоморфной эквивалентности таких областей к проблеме голоморфной эквивалентности их границ. Эти результаты, вкупе со стремлением изучить вещественные гиперповерхности с дифференциально-геометрической точки зрения (Н.Танака[9], С.Черн и Д.Мозер[10]), послужили источником большого числа работ по геометрии гиперповерхностей и проблемам их классификации.

Вещественные подмногообразия более высокой коразмерности возникают в многомерном комплексном анализе, прежде всего, как остовы (Шиловские границы) областей и как орбиты действия вещественных групп Ли в $\mathbb{C}^N$. Например, остов полидиска в $\mathbb{C}^N$ - это N-мерный тор, а остов области Зигеля 2-го рода[11] в $\mathbb{C}^{n+k}$ - это вещественная квадрика коразмерности k. Также квадрики возникают как орбиты

---

[4] Poincare H. Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme, Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. 23. P.185-220.

[5] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Изд. "Наука". 1976. Т. 2.

[6] Fefferman C. Bergman Kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains, Invent. Math. 1974. V. 26 № 1. P. 1-65.

[7] Пинчук С.И. Об аналитических продолжениях голоморфных отображений, Мат. Сб. 1975. Т. 98 № 3 С. 416-435.

[8] Витушкин А.Г. Вещественно-аналитические гиперповерхности комплексных многообразий, Успехи мат. наук. 1985. Т. 40 №2. С.3-31.

[9] Tanaka N. On generilized graded Lie algebras and geometric structures, Math. Soc. Japan. 1967. 19 №2. P. 215-264.

[10] Chern S., Mozer J. Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 1974. 133. № 3-4. P. 219-271.

[11] Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций // М.: Физматгиз, 1961.

действия в $\mathbb{C}^{n+k}$ вещественных групп Ли, являющихся многомерными аналогами группы Гейзенберга. Именно подмногообразиям высокой коразмерности посвящена настоящая диссертация.

Впервые тематика, послужившая основой для данного исследования, была затронута в вышеупомянутой работе Пуанкаре. Основной объект рассмотрения в этой работе - росток трехмерного многообразия в $\mathbb{C}^2$. Изучался вопрос о биголоморфной эквивалентности двух таких ростков, о возможном строении локальной группы голоморфных автоморфизмов ростка и о поиске ростка с самой богатой группой автоморфизмов в классе невырожденных ростков. Таким ростком оказался росток трехмерной сферы, причем группа голоморфных автоморфизмов этого ростка совпала с группой автоморфизмов сферы. Сфера выступила, таким образом, в качестве своего рода модельного многообразия в классе многообразий рассмотренного вида. Работа Пуанкаре послужила одним из основных идейных источников в локальной теории вещественных подмногообразий комплексного пространства, в частности, задача о нахождении "хорошей" модельной поверхности получила свое дальнейшее естественное обобщение. Чтобы описать соответствующую конструкцию, введем несколько важных определений.

Если в пространстве $\mathbb{C}^N$ дан росток M гладкого порождающего CR-многообразия с центром в точке p, то *типом* ростка будем называть пару чисел (n, k), где n - размерность комплексной касательной плоскости к M в точке p, а k - вещественная коразмерность M. При этом $n + k = N$ - размерности объемлющего пространства. Будем называть порождающее CR-многообразие M *многообразием конечного типа,* если линейное пространство, порожденное комплексной касательной плоскостью в точке $p \in M$, а также значениями в точке p всевозможных (кратных) скобок Ли векторных полей на многообразии, значения которых в каждой точке принадлежат комплексной касательной плоскости, совпадает со всем касательным пространством к M в точке p для всех точек $p \in M$ (многообразия конечного типа - это ровно те, для которых конечна длина их *алгебры Леви-Танаки*[12]). В частности, если число скобочных итераций в предыдущем определении - алгебраически минимально возможное для многообразия данного типа, то такое многообразие называется

[12]Чирка Е.М. Введение в геометрию CR-многообразий, Успехи мат. наук. 1991. Т.46 №1. С. 81-164.

вполне невырожденным[13]. Полная невырожденность многообразия – условие общего положения. В приведенных терминах класс *модельных многообразий,* введенный В.Белошапкой[14], можно описать как некоторый специальный класс вещественных алгебраических вполне невырожденных CR-многообразий, ростки которых в определенном смысле аппроксимируют всякий другой вполне невырожденный росток и которые обладают набором свойств "хорошей модельной поверхности", в том же смысле, в котором трехмерная сфера, согласно Пуанкаре, явилась "хорошей модельной поверхностью" для класса вполне невырожденных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$.

Структура уравнений, задающих модельные многообразия (или, более коротко, модели) данного типа (n, k), определяется типом таких многообразий, более точно - соотношениями между числами n и k. Так, при $1 \leq k \leq n^2$ в качестве модельных многообразий выступают *квадрики*[15] – алгебраические поверхности, заданные в пространстве $\mathbb{C}^{n+k}$ уравнениями

$$\operatorname{Im} w = \langle z, \overline{z} \rangle,$$

где $z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^k$, а $\langle z, \overline{z} \rangle$ - набор из k эрмитовых форм. Полная невырожденность квадрики означает линейную независимость этих форм и отсутствие у них общего ядра. Длина алгебры Леви-Танаки для квадрик равна 2. Важно отметить, что $(1,1)$-квадрика – первый по размерности пример модельного многообразия – биголоморфно эквивалентна трехмерной сфере. При $n^2 < k \leq n^2(n+2)$ модельными многообразиями служат *кубики*[16] – алгебраические многообразия с алгеброй Леви-Танаки длины 3, заданные в пространстве $\mathbb{C}^{n+n^2+m}, 1 \leq m \leq n^2(n+1)$ уравнениями

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_2 = \langle z, \overline{z} \rangle \\ \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re} \Phi(z, z, \overline{z}) \end{cases}$$

[13] Белошапка В.К. Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 4. С. 507-522.

[14] Белошапка В.К. Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 4. С. 507-522.

[15] Белошапка В.К. Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. № 1. С. 3-44.

[16] Белошапка В.К. Кубическая модель вещественного многообразия, Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 4. С. 503-519.

где Φ - набор из m однородных кубических многочленов бистепени (2,1), линейно независимых над $\mathbb{R}$ и симметричных по первым двум аргументам (размерность пространства таких многочленов равна $n^2(n+1)$), а $\langle z, \overline{z}\rangle$ - набор из n^2 линейно независимых эрмитовых форм (набор таких форм, в силу того, что последние образуют базис n^2-мерного пространства эрмитовых форм, можно считать фиксированным с точностью до вещественно-линейной замены по w_2). Случаю $n^2(n+2) < k \leq n^2(n+2) + n^2(n+1)(7n+11)/12$ соответствуют модельные многообразия порядка четыре[17] (вообще, *порядком* модельного многообразия называется старший из весов многочленов, входящих в уравнения модели, веса всегда назначаются по следующему правилу: $[z] = 1, [w_j] = j$; порядок модельного многообразия всегда совпадает с длиной его алгебры Леви-Танаки). Уравнения таких моделей записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_2 = \langle z, \overline{z}\rangle \\ \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}\langle z, z, \overline{z}\rangle \\ \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Re}\left(F_{22}(z, z, \overline{z}, \overline{z}) + F_{31}(z, z, z, \overline{z})\right) \end{cases}$$

где $\langle z, \overline{z}\rangle$ - набор из n^2 линейно независимых эрмитовых форм,$\langle z, z, \overline{z}\rangle$ - набор из $n^2(n+1)$ линейно независимых однородных кубических многочленов бистепени (2,1), симметричных по первым двум аргументам, $F_{22}(z, z, \overline{z}, \overline{z})$ и $F_{31}(z, z, z, \overline{z})$ - наборы из $k - n^2(n+2)$ однородных многочленов бистепеней (2,2) и (3,1) соответственно (F_{22} симметричен по первым двум и последним двум аргументам, F_{31} по первым трем аргументам), суммы которых образуют вектор-функцию с линейно независимыми компонентами. Более длинным алгебрам Леви-Танаки соответствуют модели более высоких порядков[18].

Модельные многообразия обладают набором свойств "хорошей" модельной поверхности. Перечислим их[18].

1. *Универсальность:* Ростку всякого вполне невырожденного многообразия типа (n, k) можно поставить в соответствие некоторое модельное многообразие (называемое *касательной моделью ростка*), уравнения которого в известном смысле аппроксимируют уравнения ростка.

[17] Белошапка В.К. Полиномиальные модели вещественных многообразий, Изв. РАН. Сер.Матем. 2001. Т. 65 №4 С. 3-20.

[18] Белошапка В.К. Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 4. С. 507-522.

2. *Конечномерность:* Алгебра инфинитезимальных автоморфизмов модельного многообразия - это конечномерная алгебра Ли; группа голоморфных автоморфизмов модельного многообразия - это конечномерная группа Ли.

3. *Однородность:* Всякое модельное многообразие является голоморфно однородным, однородность обеспечивается полиномиально-треугольными преобразованиями.

4. *Полиномиальность алгебры:* Алгебра инфинитезимальных автоморфизмов модельного многообразия - это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей, степени коэффициентов которых не превосходят константы, зависящей лишь от порядка многообразия.

5. *Рациональность группы:* Локальная группа голоморфных автоморфизмов ростка модельного многообразия совпадает с конечномерной группой Ли голоморфных автоморфизмов модели, причем последняя представляет собой подгруппу группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, для которых степени числителя и знаменателя ограничены некоторой константой (зависящей лишь от порядка модели).

6. *Симметричность:* Размерность локальной группы голоморфных автоморфизмов всякого вполне невырожденного ростка не превосходит размерности группы голоморфных автоморфизмов его касательного модельного многообразия, более того, стабилизатор центра ростка вкладывается как подгруппа Ли в стабилизатор начала координат в группе голоморфных автоморфизмов модельного многообразия; алгебра инфинитезимальных автоморфизмов модельного многообразия параметризует семейство биголоморфных отображений одного вполне невырожденного ростка в другой.

7. *Биголоморфная инвариантность:* Если два ростка биголоморфно эквивалентны, то эквивалентны и их касательные модельные многообразия; если два модельных многообразия биголоморфно эквивалентны, то они эквивалентны и линейно.

8. *Групповая структура:* Модельное многообразие обладает естественной структурой группы Ли.

С модельными многообразиями связано множество различных задач: задача о классификации моделей заданного типа; задача о вычислении алгебры автоморфизмов модели или о возможных оценках на размерность этой алгебры; задача о построении системы биголоморфных инвариантов вполне невырожденного ростка, связанных с его модельным многообразием; задача о распостранении свойства симметричности модельных многообразий на более широкий, по сравнению с классом вполне невырожденных, класс ростков; задача о структуре и свойствах пространства модулей модельных многообразий данного типа и множество других задач [19]. В частности, представляет интерес решение следующих двух малоисследованных задач: задачи о структуре оболочек голоморфности моделей высших порядков (т.е. моделей порядка, большего двух) и задачи о *жесткости* таких моделей.

Первая задача была поставлена В.Белошапкой в его обзорной работе по модельным многообразиям [19]. Поводом для этой задачи послужили следующие соображения. Как показал И.Наруки [20], оболочка голоморфности невырожденной квадрики представляет собой следующую область:

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^{n+k}:\,\mathrm{Im}\,w\,-\langle z,\overline{z}\rangle\in V\},\,\text{где}\,V=\mathrm{int}(\mathrm{conv}\{\langle z,\overline{z}\rangle\}),$$

причем конус V всегда непустой. При этом, если квадрика положительно определена (т.е. существует положительно определенная линейная комбинация компонент формы $\langle z,\overline{z}\rangle$), то оболочка голоморфности квадрики будет представлять собой в подходящей системе координат область Зигеля второго рода, отнесенную к конусу V и эрмитовой вектор-форме $\langle z,\overline{z}\rangle$. Такая область всегда будет *областью ограниченного вида* (т.е. областью, биголоморфно эквивалентной ограниченной). Голоморфная однородность этой области определяется аффинной однородностью конуса V. Если же квадрика, напротив, является знаконеопределенной (т.е. не существует положительно определенной линейной комбинации компонент формы $\langle z,\overline{z}\rangle$), то оболочка голоморфности квадрики в подходящей системе координат будет цилиндрической по части переменных областью. Такая область в силу того, что содержит комплексные прямые, не будет областью ограниченного вида. Про однородность этой цилиндрической области ничего определенного сказать нельзя.

[19]Белошапка В.К. Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. № 1. С. 3-44.

[20]Naruki I. Holomorphic extention problem for standart real submanidolds of second kind, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1970. V.6.№ 1. P. 113-187.

В связи с этим интересен следующий вопрос: что будут собой представлять оболочки голоморфности модельных многообразий более высокого порядка? Какие оболочки голоморфности окажутся цилиндрическими (соответственно, слоящимися на комплексные прямые), а какие нет? Дадут ли нецилиндрические оболочки голоморфности интересные примеры ограниченных (ограниченного вида) и (или) однородных областей?

Задача о *жесткости* моделей высших порядков состоит в следующем. Алгебра g инфинитезимальных автоморфизмов всякого модельного многообразия с помощью введения специальной градуировки приобретает вид

$$g = g_{-} + g_0 + g_{+}.$$

При этом алгебре g_{-} при экспоненциальном отображении соответствует группа полиномиально-треугольных автоморфизмов многообразия, обеспечивающих его однородность, алгебре g_0 соответствует группа линейных автоморфизмов многообразия, сохраняющих начало координат, а алгебре g_{+} соответствует группа нелинейных автоморфизмов многообразия, сохраняющих начало координат. Если алгебра g_{+} и соответствующая ей группа тривиальны, то модель называется *жесткой.* Среди квадрик имеется множество примеров как жестких, так и нежестких моделей [21]. Что касается моделей высших порядков, то, несмотря на множество усилий в этом направлении, до сих пор не обнаружено модельных многообразий с нетривиальной группой нелинейных автоморфизмов, сохраняющих начало координат, т.е. все изученные модели оказывались жесткими (см., например, работы В.Белошапки [22], А.Рябоненко [23], Е.Шананиной [24]). В связи с этим возникла гипотеза о жесткости *всех* моделей высших порядков.

[21] Белошапка В.К. Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. № 1. С. 3-44.

[22] Beloshapka V. CR-varieties of the type (1,2) as varieties of "super-high" codimension, Russian Journal of Mathematical Physics. 1997. V. 5 № 3. P. 399-404.

[23] Рябоненко А. О жесткости кубики типа $(n, n^2 + 1)$ // Дипл. раб. мех.-мат. фак. МГУ им.М.В.Ломономова. 2001.

[24] Шананина Е.Н. Полиномиальные модели вещественно - аналитических многообразий и алгебры их автоморфизмов, дисс. на соискание ученной степени канд. физ.-мат. наук. мех.-мат. фак. МГУ им.М.В.Ломоносова. 2006.

Цель работы

Целью работы является исследование структуры оболочек голоморфности модельных многообразий высших порядков, а также вопроса об их голоморфной жесткости.

Методы исследования

В диссертации используется аппарат теории функций одной и нескольких комплексных переменных, групп и алгебр Ли, функционального анализа, дифференциальной геометрии.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Получены следующие основные результаты:

1. Исследовано строение оболочек голоморфности произвольных кубик, двух классов модельных многообразий порядка четыре, а также одного специального модельного многообразия порядка четыре; при исследовании оболочки голоморфности этого многообразия получено семейство восьмимерных голоморфно однородных вполне невырожденных несферических многообразий в $\mathbb{C}^5$.

2. Доказана голоморфная жесткость произвольных кубик, а также одного класса модельных многообразий порядка четыре.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы специалистами по многомерному комплексному анализу и дифференциальной геометрии, работающими в МГУ им. М.В.Ломоносова, МИРАН им. В.А.Стеклова, ВГАСУ, ННГУ им. Н.И.Лобачевского.

Апробация работы

Результаты работы неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре им. академика А.Г.Витушкина по многомерному комплексному анализу в МГУ (Москва, 2004 - 2007 г.), на конференции памяти академика А.Г.Витушкина в МИРАН (Москва, 2005 г.), на конференции памяти академика А.Ф.Леонтьева (Уфа, 2007 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на разделы, и списка литературы. Общий объем текста – 108 страниц. Список литературы содержит 37 наименований.

Содержание работы

Во введении продемонстрирована актуальность темы настоящего исследования, проведен обзор работ, близких к теме диссертации, введены основные понятия и кратко изложены основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена модельным многообразиям с цилиндрическими оболочками голоморфности и присущему им феномену жесткости. Важно отметить, что жесткость во всех рассмотренных случаях явилась следствием результата о строении оболочек голоморфности многообразий рассматриваемых классов.

Все оболочки голоморфности в этой и последующей главах строятся с помощью технологии аналитических дисков [25]. Специфическим для главы 1 является использование при доказательстве цилиндричности оболочек голоморфности теоремы Туманова [26] о продолжимости в клин CR-функций, заданных на порождающем многообразии конечного типа.

В разделе 1.1 строится оболочка голоморфности произвольной невырожденной кубики. Доказывается, что оболочка голоморфности

[25] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Изд. "Наука". 1976. Т. 2.

[26] Туманов А.Е. Продолжение CR-функций в клин с многообразия конечного типа, Матем. сб. 1990. Т. 181. № 7. С. 951-964.

выглядит одинаково для всех кубик данного типа (n, k) и описывается следующим образом. Выберем в пространстве $\mathbb{C}^{n+k}, k = n^2 + m$ базис таким образом, чтобы набор эрмитовых форм $\langle z, \overline{z}\rangle$ принял вид:

$$\langle z, \overline{z}\rangle^{(p,q)} = \operatorname{Re} z_p \overline{z_q}, p \geq q;\ \langle z, \overline{z}\rangle^{(p,q)} = \operatorname{Im} z_p \overline{z_q}, p < q;\ p, q \in \overline{1, n}$$

(возможность такого выбора обьясняется тем, что приведенные формы образуют базис пространства эрмитовых форм). Введем также матрицу $\mathfrak{Im} W_2$, составленную по координатам пространства $\mathbb{C}^{n+k}$ следующим образом:

$$\mathfrak{Im} W_2^{(p,p)} = \operatorname{Im} w_2^{(p,p)};\ \mathfrak{Im} W_2^{(p,q)} = \operatorname{Im} w_2^{(p,q)} + i \operatorname{Im} w_2^{(q,p)}, p > q;$$
$$\mathfrak{Im} W_2^{(p,q)} = \operatorname{Im} w_2^{(p,q)} - i \operatorname{Im} w_2^{(q,p)}, p < q,$$

а также столбец Z с компонентами $z_1, .., z_n$. Обозначив через Z^* строку $(\overline{z_1}, ..., \overline{z_n})$, первую часть уравнений кубики можно записать в следующем матричном виде:

$$\mathfrak{Im} W_2 = Z Z^*.$$

Отметим, что построенное отображение $\operatorname{Im} w_2 \to \mathfrak{Im} W_2$ есть линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ (или пространства вещественных $n \times n$ матриц) и пространства эрмитовых $n \times n$ матриц. В частности, так называемой верхней матричной полуплоскости $\mathfrak{Im} W_2 >> 0$ при этом изоморфизме будет соответствовать острый конус V в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$.

В таких обозначениях оболочка голоморфности произвольной кубики M будет выглядеть так:

$$\widehat{M} = \{(z, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^{n+n^2+m} : \mathfrak{Im} W_2 >> Z Z^*,\ w_3 \in \mathbb{C}^m\}$$

(подразумевается матричное неравенство) и представляет из себя, таким образом, цилиндрическую по w_3 область, основанием которой служит область Зигеля 2-го рода в пространстве переменных z, w_2. Отметим, что для "малой" кубики - кубики типа (1,2) - этот результат был получен ранее группой авторов [27] посредством явного предъявления семейства аналитических дисков, подклеенных к кубике. Доказательство теоремы в общем случае требует более сложных рассуждений.

Раздел 1.2 посвящен доказательству жесткости произвольной невырожденной кубики. Доказательство основывается на результате

[27] Белошапка В.К., Ежов В.В., Шмальц Г. Голоморфная классификация четырехмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$, Изв. РАН. Сер.мат. 2007 (в печати).

предыдущего раздела и на важном результате Р.Гаммеля о строении алгебры инфинитезимальных автоморфизмов кубики [28], который утверждает, что критерием тривиальности положительно градуированной компоненты алгебры является тривиальность ее компоненты веса 1. Отметим, что аналогичный результат был доказан Н.Палинчак для квадрик [29]. Как следствие, получается улучшенная, по сравнению с ранее известной [30], оценка на размерность локальной группы голоморфных автоморфизмов произвольного вполне невырожденного ростка типа $(n, k), n^2 < k \leq n^2(n+2)$. Феномен жесткости *произвольной* модели порядка, следующего за двойкой, послужил серьезным подтверждением гипотезы о жесткости моделей высших порядков.

Раздел 1.3 посвящен построению оболочки голоморфности модели четвертого порядка *с отражением.* Модельное многообразие порядка четыре называется *моделью с отражением,* если все многочлены старшего веса в уравнении модели имеют фиксированную бистепень $(3, 1)$ по $z, \overline{z}$. Это название обусловлено наличием у таких многообразий специального линейного автоморфизма типа отражения:

$$z \to iz,\ w_2 \to w_2,\ w_3 \to \nu w_3,\ w_4 \to -w_4,$$

где ν - матрица, которая находится из уравнения:

$$\nu\langle z, z, \overline{z}\rangle = i\langle z, z, \overline{z}\rangle,\ \mathrm{Im}\,\nu = 0.$$

Уравнения страшего веса для такой модели имеют вид:

$$\mathrm{Im}\, w_4 = 2\mathrm{Re}\, F_{31}(z, z, z, \overline{z}). \qquad (1)$$

Основное содержание этого раздела составляет следующая теорема: оболочка голоморфности произвольного многообразия четвертого порядка с отражением представляет собой область, вид которой определяется лишь типом (n, k) многообразия и которая выглядит так:

$$\widehat{M} = \{(z, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^{n+k} : \mathfrak{Im} W_2 >> ZZ^*,\ (w_3, w_4) \in \mathbb{C}^{k-n^2}\}$$

[28] Гаммель Р.В., Коссовский И.Г. Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен "жесткости", Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова. 2006. Т. 253. С. 30-45.

[29] Палинчак Н.Ф. О с-жестких квадриках, Деп. в ВИНИТИ РАН 10.04.95, № 973-В95.

[30] Белошапка В.К. Кубическая модель вещественного многообразия, Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 4. С. 503-519.

и представляет из себя, таким образом, цилиндрическую по w_3, w_4 область, основанием которой служит область Зигеля 2-го рода в пространстве переменных z, w_2 (все обозначения - такие же, как в разделе 1.1). То, что добавление к уравнениям последней кубики произвольных уравнений вида (1), которые имеют четную (четвертую) степень, не меняет структуру оболочки голоморфности многообразия - факт весьма примечательный.

В разделе 1.4 результат о строении оболочки голоморфности модели четвертого порядка с отражением применяется, как это произошло и в случае кубики, к доказательству жесткости модели. Как следствие, опять же, получается улучшенная, по сравнению с имевшейся ранее[31], оценка для размерности локальной группы голоморфных автоморфизмов вполне невырожденного ростка с касательной моделью с отражением. Таким образом, модели четвертого порядка с отражением - еще один важный класс многообразий, для которых феномен жесткости имеет место.

Рассмотренные в главе 1 модельные многообразия дали пример модельных многообразий, оболочка голоморфности которых является голоморфно однородной областью, но не является областью ограниченного вида.

Вторая глава посвящена оболочкам голоморфности модельных многообразий типа (1,4). Эти модельные многообразия подробно изучены Е.Шананиной[32]. Всякое такое многообразие - это модельное многообразие порядка 4 в $\mathbb{C}^5$, которое линейной заменой координат приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_2 = |z|^2 \\ \operatorname{Im} w_3 = \operatorname{Re} z^2\overline{z} \\ \operatorname{Im} w_3' = \operatorname{Im} z^2\overline{z} \\ \operatorname{Im} w_4 = |z|^4 + \alpha \operatorname{Re} z^3\overline{z}, \end{cases}$$

$z, w_j, w_3' \in \mathbb{C}, \alpha \geq 0$, либо к виду

[31] Белошапка В.К. Полиномиальные модели вещественных многообразий, Изв. РАН. Сер.Матем. 2001. Т. 65 №4 С. 3-20.

[32] Шананина Е.Н. Полиномиальные модели вещественно - аналитических многообразий и алгебры их автоморфизмов, дисс. на соискание ученной степени канд. физ.-мат. наук. мех.-мат. фак. МГУ им.М.В.Ломоносова. 2006.

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_2 = |z|^2 \\ \operatorname{Im} w_3 = \operatorname{Re} z^2\overline{z} \\ \operatorname{Im} w_3' = \operatorname{Im} z^2\overline{z} \\ \operatorname{Im} w_4 = \operatorname{Re} z^3\overline{z}, \end{cases}$$

$z, w_j, w_3' \in \mathbb{C}$ (модель с отражением).

В разделе 2.1 изучается оболочка голоморфности модели типа (1,4), для которой $\alpha = 0$. Такая модель называется S^1-*симметричной* благодаря присущему ей специальному действию окружности S^1:

$$z \to e^{i\varphi}z, w_2 \to w_2, w_3 \to w_3 \cos\varphi - w_3' \sin\varphi,$$
$$w_3' \to w_3 \sin\varphi + w_3' \cos\varphi, w_4 \to w_4, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Благодаря наличию этой подгруппы в группе голоморфных автоморфизмов модели размерность группы S^1-симметричного многообразия равняется 8, в то время как для всех остальных - 7.

В данном разделе показывается, что рассматриваемое многообразие Q_0 является первым известным модельным многообразием высшего порядка, для которого оболочка голоморфности представляет собой область D_0 ограниченного вида, остов (Шиловская граница) которой совпадает с исходным многообразием, так же, как это происходит в случае положительно определенной квадрики. При этом область D_0 выглядит следующим образом:

$$D_0 = \{2(v_3 - v_2 \mathrm{Re}\, z)^2 + 2(v_3' - v_2 \mathrm{Im}\, z)^2 < (v_2 - |z|^2)(v_4 - v_2^2);\ v_2 > |z|^2\}.$$

Здесь $v_2 = \operatorname{Im} w_2, v_3 = \operatorname{Im} w_3, v_3' = \operatorname{Im} w_3', v_4 = \operatorname{Im} w_4$. Доказывается, более того, что область D_0 может быть реализована как комплексная гиперповерхность области Зигеля второго рода в $\mathbb{C}^6$. Перечисленные свойства позволяют считать многообразие Q_0 ближайшим аналогом положительно определенных квадрик среди многообразий высокой коразмерности.

В разделе 2.2 изучаются дальнейшие свойства области D_0. Доказывается, что вопрос о голоморфной однородности D_0 решается отрицательно и что, более того, группа голоморфных автоморфизмов D_0 совпадает с группой автоморфизмов Q_0. Последняя имеет размерность 8, ввиду чего не может обеспечить однородности D_0 и порождает слоение

D_0 на орбиты коразмерностей ≥ 2. Эти орбиты будут представлять собой, по определению, голоморфно однородные поверхности в $\mathbb{C}^5$. Ранее голоморфно однородные многообразия изучались и классифицировались в ситуациях гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ в работах Э.Картана [33], А.Лободы [34], Д.Фелса и В.Каупа [35]. Примечательно, что все эти многообразия возникали как линии уровня элементарных функций. В данном разделе доказывается, что в нашем случае возникшие многообразия будут иметь размерности 8 (орбиты общего положения) и 7(особые орбиты). Все орбиты, кроме одной семимерной, будут представлять собой вполне невырожденные многообразия, заданные полиномиальными уравнениями. Их касательными моделями будут квадрики типа (3,2) для восьмимерных и (2,3) для семимерных. Доказывается, более того, что восьмимерные орбиты общего положения будут *несферичны* (т.е. локально биголоморфно неэквивалентны своей модельной поверхности).

Объединяя результаты главы 1, раздела 2.1 и результат И.Наруки [36] об оболочках квадрик, можно сформулировать предположение о том, что вид оболочки голоморфности модельного многообразия определяется тем, какой вид имеют многочлены старшего веса в уравнениях модели. Если эти многочлены являются в известном смысле положительно определенными или если последние в некотором смысле "превалируют" над знаконеопределенными, то оболочка будет областью ограниченного вида, как это происходит в случае положительно определенных квадрик и S^1-симметричной поверхности Q_0, а если "превалируют" знаконеопределенные, то оболочка будет цилиндрической областью, как это имеет место для знаконеопределенных квадрик, произвольных кубик и моделей порядка 4 с отражением.

В разделе 2.3 рассматриваются модельные многообразия, для которых высказанное предположение в известном смысле подтверждается. Изучаются оболочки голоморфности моделей

[33] Cartan E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes, Ann. Math. Pura Appl. (4). 1932. V. 11. P. 17-90.

[34] Лобода А.В. Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии, Труды МИАН. 2001. Т. 235. С. 114-142.

[35] Fels G., Kaup W. *CR*-Manifolds of dimension 5: Lie algebra approach, ArXiv: math.DS/0508011 V. 1. 1 Aug 2005.

[36] Naruki I. Holomorphic extention problem for standart real submanidolds of second kind, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1970. V.6.№1. P. 113-187.

типа (1,4) общего вида, т.е. моделей, не являющихся ни моделью с отражением, ни S^1-симметричной моделью (для первой оболочка построена в разделе 1.3, для последней в разделе 2.1). Такие многообразия a priori нельзя отнести ни к положительно определенным, ни к знаконеопределенным, поскольку в уравнении старшего веса присутствует как положительно определенное (в естественном смысле) слагаемое $|z|^4$, так и знаконеопределенное (в естественном смысле) $\mathrm{Re}\, z^3\overline{z}$, и вид оболочки голоморфности в действительности определяется тем, какое слагаемое "превалирует", т.е. нужно выяснить - насколько большим должен стать параметр α для того, чтобы оболочка перестала быть областью ограниченного вида (что, как мы знаем, происходит при $\alpha = 0$) и стала цилиндрической областью.

В данном разделе дается существенная часть ответа на этот вопрос. Для каждой (1,4)-модели общего вида строится голоморфное расширение D_α - область, заданная неравенствами

$$\begin{gathered}(2+\alpha)(v_3 - v_2 \mathrm{Re}\, z)^2 + (2-\alpha)(v_3' - v_2 \mathrm{Im}\, z)^2 < \\ (v_2 - |z|^2)(v_4 - v_2^2 - \alpha v_3 \mathrm{Re}\, z + \alpha v_3' \mathrm{Im}\, z), \\ v_2 > |z|^2\end{gathered}$$

(обозначения взяты из раздела 2.1).

Доказывается, что при $\alpha > 2$ область D_α расширяется голоморфно до цилиндрической по w_3, w_3', w_4 области того же вида, что и область из раздела 1.3. Последняя и представляет собой оболочку голоморфности рассматриваемых моделей. Доказывается также однолистность оболочек голоморфности (1,4)-моделей при $\alpha \in (0, 2]$, для $\alpha = 2$ доказывается, что оболочка не будет областью ограниченного вида. Вопрос о структуре оболочек голоморфности многообразий Q_α при $0 < \alpha < 2$ открыт.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю В.К.Белошапке за постановку задач, ценные указания и постоянное внимание к данной работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Гаммель Р.В., Коссовский И.Г. Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен "жесткости", Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова. 2006. Т. 253. С. 30-45.

Р.В.Гаммелем доказано, что критерием голоморфной жесткости кубической модельной поверхности является тривиальность компоненты веса 1 в алгебре инфинитезимальных автоморфизмов поверхности, И.Г. Коссовским построена оболочка голоморфности произвольной кубической модельной поверхности и доказана ее голоморфная жесткость.

[2] Коссовский И.Г. Об оболочках голоморфности модельных многообразий // Изв. РАН. Сер. Мат. 2007. Т.71. №3. С.113-140.

[3] Коссовский И.Г. Оболочка голоморфности модельной поверхности типа (1,4)// Деп. в ВИНИТИ РАН 13.04.07. №421-В 2007.

[4] Коссовский И.Г. Оболочки голоморфности модельных многообразий // Тезисы докладов Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти акад. А.Ф.Леонтьева, Уфа, 01.06.2007 - 05.06.2007. Т.2. С.23-24.