МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.982.256

Скориков Евгений Михайлович

ИНФОРМАЦИОННЫЙ КОЛМОГОРОВСКИЙ ПОПЕРЕЧНИК И ПРИЛОЖЕНИЯ.

Специальность 01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор И.Г. Царьков
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Г.Г. Магарил-Ильяев
	кандидат физико-математических наук, А.С. Кочуров
Ведущая организация:	Институт математики и механики Уральского отделения РАН.

Защита диссертации состоится 19 октября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 сентября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Т.П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации изучается новая аппроксимационная характеристика множеств - информационный колмогоровский поперечник. В ней вычисляются порядки убывания этого поперечника для многомерных классов Соболева и их конечных пересечений, а также исследуется проблема устойчивости решения задачи Дирихле для нелинейного уравнения Пуассона.

Различные виды поперечников и копоперечников, являющиеся важными характеристиками множеств в нормированных пространствах, стали возникать и исследоваться по мере развития все более совершенных методов вычисления. Как известно, для работы большинства вычислительных алгоритмов часть их исходных данных должна быть, в силу невозможности точного представления, заменена некоторыми "приближенными" данными. Кроме того, и сами исходные данные могут содержать ошибку, возникающую при измерении. Результатом работы алгоритма являются значения, "аппроксимирующие" или "восстанавливающие" истинные с определенной степенью точности. Поэтому вопрос об удовлетворительной замене множества данных и множества результатов является одной из первых проблем, встающих на пути решения вычислительной задачи. Для изучения этой проблемы оказались существенными понятия поперечника и копоперечника. Фактически первые поперечники были определены Урысоном П.С. [1], Александровым П.С. [2] и Колмогоровым А.Н. [3], и известны сейчас, как поперечники по Урысону, Александрову и Колмогорову.

Проблему аппроксимации множества решений некоторых задач математической физики иногда удается свести к вычислению поперечников классов Соболева и их аналогов.

Определение А. При $r \in \mathbb{N}$, в случае одной переменной, классом Соболева $W_p^r[0,1]$ называют множество $r-1$ непрерывно-дифференцируемых функций f, у которых производная порядка $r-1$ абсолютно-непрерывна и выполнено условие

$$\|f^{(r)}\|_{L_p[0,1]} \leqslant 1.$$

[1] *Урысон П.С.* Труды по топологии и другим областям математики. — М. ГИТТЛ, 1952, т.1.

[2] *Александров П.С.* Über die Urisohnsche kostsanten, — Fund.Math.V20(1933) p.140-150.

[3] *Колмогоров А.Н.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. — Ann. of math. 1936. v.37. p.107-110.

Аналогично определяется периодический класс Соболева $\tilde{W}_p^r(\mathbb{T})$ (вместо отрезка $[0,1]$ рассматривается одномерный тор $\mathbb{T}$)

Первый результат, касающийся вычисления колмогоровских поперечников $d_n(W_p^r, L_q)$ был получен в тридцатых годах 20-го века [4] , для поперечника $d_n(W_2^r(\mathbb{T}^1), L_2(\mathbb{T}^1))$ одномерного периодического класса Соболева.

В шестидесятых годах прошлого века были подсчитаны точные значения колмогоровских поперечников некоторых одномерных периодических и непериодических классов Соболева, и конечномерных множеств. Эта задача исследовалась Тихомировым В.М., Стечкиным С.Б., Рудиным У. и многими другими авторами. Но к сожалению, точное значение поперечника по Колмогорову удалось вычислить только при некоторых значениях параметров p и q, и, в связи с этим, возникла задача о вычислении асимптотического поведения колмогоровских поперечников. Для случая функций одной переменной асимптотика поперечника по Колмогорову $d_n(\tilde{W}_p^r(\mathbb{T}^1), L_q(\mathbb{T}^1))$, в случае $rp > 1$, была вычислена в семидесятых годах прошлого века. В работах Тихомирова В.М., [5] , [6] Бабаджанова С.Б.и Тихомирова В.М. [7] , Маковоза Ю.И. [8] найден порядок поперечника при $p \geqslant q$, при $2 \geqslant q > p$ порядок был получен Исмагиловым Р.С. [9] , а в остальных случаях Кашиным Б.С. [10]

В многомерном случае порядки убывания колмогоровских поперечников исследовались в работах: Бабенко К.И. [11] , Митягина Б.С. [12] ,

---

[4] *Колмогоров А.Н.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. — Ann. of math. 1936. v.37. p.107-110.

[5] *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений. — УМН, XV, вып. 3 (1960),81-120.

[6] *Тихомиров В.М.* "Некоторые вопросы теории приближения". Дисс докт.физ-мат.наук. — М.,1969.

[7] *Бабаджанов С.Б., Тихомиров В.М.* О поперечнике одного класса в пространстве L^p , — Изв.АН Узб.ССР.Сер.физ.-матем.,2 (1967),24-30.

[8] *Маковоз Ю.И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве. — Мат.сб., 87 (129), №1 (1972), 136-146.

[9] *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами . — УМН XXIX,вып. 3 (1974), 161-178.

[10] *Кашин Б.С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций. — Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977, 41, № 2 ,стр 334-351.

[11] *Бабенко К.И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами. — Докл. АН СССР, 1960, т.132, № 5, с. 982-985.

[12] *Митягин Б.С.* Приближение функций в пространствах L^p и C на торе. — Матем. сб., 1962, т. 58, №4, с.397-414.

Никольской Н.С. [13] , Темлякова В.Н. [14, 15, 16] и Галеева Э.М. [17, 18, 19] . Для конечных пересечений классов Соболева порядки убывания колмогоровского поперечника были получены Галеевым Э.М.[19], при некоторых соотношениях на параметры.

Порядки убывания александровских поперечников были получены Стесиным М.И. [20] . Эти поперечники среди задач об оценках поперечников играют важную роль эталона, с которым, в первую очередь, сравниваются все остальные поперечники. Поведение линейных, бернштейновских, проекционных, ортопроекционных, энтропийных и пр. поперечников исследовалось в работах Тихомирова В.М., Майорова В.Е., Глускина Е.Д., Царькова И.Г. и многих других авторов.

Появление различных поперечников было вызвано расширяющимся классом задач, возникающих, как в самой теории приближения, так и в ее приложениях. Например, так появились абсолютные поперечники [21, 22] , порядки убывания которых для конечномерных множеств (точные в степенной шкале) были получены Глускиным Е.Д. [23] , а для некоторых функциональных классов Кочуровым А.С. [24] . Другой пример связан с работами Витушкина А.Г. [25,] , Темлякова В. Н.

---

[13] *Никольская Н.С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p. — Докл. АН СССР, 1973, т. 16, №4, с. 761-780.

[14] *Темляков В.Н.* О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 3, с.544-548.

[15] *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. — Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 3, с.314-317.

[16] *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций. — Изв. АН СССР Сер. матем., 1982, т. 46, № 1, с.171-186.

[17] *Галеев Э.М.* Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\tilde{L}_q$. —Успехи матем. наук, 1977, т. 32, в. 4, 251-252.

[18] *Галеев Э.М.* Приближение суммами Фурье класса функций с несколькими ограниченными производыми. —Матем. заметки, 1978, т. 22, в.2, 197-211.

[19] *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}_p^{\bar{\alpha}}$ и $\tilde{H}_p^{\bar{\alpha}}$ в пространстве $\tilde{L}_q$. — Изв. АН СССР. Сер. матем. т.49. №5, 1985, 916-934.

[20] *Стесин М.И.* Александровские поперечники множеств и классов гладких функций. — Докл. АН СССР, 1975, т.220, №6, с. 1278-1281.

[21] *Витушкин А.Г.* Абсолютная ε-энтропия метрических пространств. — ДАН СССР. 117. №5. 1957.с.745-748.

[22] *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами. — УМН. 1974.Т.29.№3.с.161-178.

[23] *Глускин Е.Д.* Об оценках снизу поперечников некоторых конечномерных множеств. — УМН. 1974.Т.36.Вып 2.с.179-180.

[24] *Kochurov A.S., Tikhomirov V.M* About the definition of the notion width.. — East journal on approximation, v.1,№2, 1995, p.221-230.

[25] *Витушкин А.Г.* Некоторые оценки в теории табулирования. — ДАН СССР. 114. 1957.с.923-

[26] , в которых были даны обобщения колмогоровского поперечника. Появление этих обобщений было связано с новым методом аппроксимации — n-членным приближением. Еще одно обобщение колмогоровского поперечника, связанное с необходимостью аппроксимации некомпактных классов функций, возникло в работах Магарил-Ильяева Г.Г. [27] .

Для задач аппроксимации решений нелинейных дифференциальных уравнений оказался полезным гельфандовский поперечник. Его применение естественно возникло при исследовании асимптотического поведения бесконечномерных диссипативных динамических систем. Во многих случаях задача определения асимптотического поведения системы оказывается некорректно поставленной, в связи с этим важным является вопрос об отыскании минимальных (или близких к минимальным) множеств естественных параметров задачи, которые однозначно и устойчиво определяют асимптотическое поведение системы. Впервые данный вопрос рассматривался для двумерной системы Навье-Стокса в работах Фоиаса С., Проди Г. [28] и Ладыженской О.А. [29], где было показано, что асимптотическое поведение решений полностью определяются динамикой первых N мод Фурье, если N достаточно велико. После этих работ подобные результаты были получены для других параметров и уравнений. В работе Чуешова И. Д. [30] была развита теория исследования некоторого класса бесконечномерных диссипативных динамических систем в терминах "определяющих" функционалов, являющихся искомыми параметрами, определяющими асимптотическое поведение решения. При этом большое значение для выбора функционалов приобретает значение гельфандовского поперечника некоторого вспомогательного множества.

Существование конечного числа функционалов, определяющих асимптотическое поведение решения, привело к исследованию некото-

---

926.

[26] *Темляков В. Н.* Нелинейные поперечники по Колмогорову. — Матем. заметки, 1998, т. 63, в.6, с.891–902.

[27] *Магарил-Ильяев Г.Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление классов Соболева на действительной прямой. — Мат.сборник. 182, 11(1991), с.1635-1656.

[28] *Foias C., Prodi G.* Sur le comportement global des solutions non stationnaires des equations de Navier-Stokes en dimension deux. — Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, 1967,V.39, p.1-34.

[29] *Ладыженская О.А.* О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. — Зап.научн. семин. ЛОМИ. 1972. Т.27. с.91-115. 1967,V.39, p.1-34.

[30] *Чуешов И. Д.* Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем. — УМН, 1998, т. 53, в.4, с.77–124.

рых некорректных задач в теории нелинейных уравнений в частных производных аналогичными методами. Царьковым И.Г. [31] показано, что решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u_\delta(x) - F(u_\delta)(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x), \quad x \in \Omega \\ u_\delta\Big|_{\partial\Omega}(x) = \tau(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

(где $\delta\varphi$ - некоторое возмущение, вносимое погрешностью измерения правой части, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ - компактная область с гладкой границей) при определенных условиях на функцию F (которые, вообще говоря, не обеспечивают ни единственность, ни существование решения задачи) полностью определяется значением u_δ на некоторой конечной сетке. Более того, когда значения u_δ на сетке известны, то решение оказывается устойчивым по отношению к погрешностям $\delta\varphi$. Естественным образом возникает вопрос об аналогах теоремы Царькова И.Г. для случая произвольных функционалов.

Данная работа посвящена изучению нового поперечника - информационного колмогоровского, соединяющего в себе свойства гельфандовского и колмогоровского поперечников. Этот поперечник возникает при решении задачи аппроксимации с учетом дополнительной информации о приближаемом объекте и является удобным инструментом при решении обозначенных выше задач.

Актуальность данной темы определяется еще и тем, что теория поперечников находит все более широкое применение в смежных разделах математики, таких как вычислительная математика, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, теория уравнений в частных производных и др.

Цель работы. Исследовать поведение информационного колмогоровского поперечника в зависимости от его параметров. Установить соотношения между информационным колмогоровским поперечником и известными классическими поперечниками. Найти порядки убывания информационного колмогоровского поперечника одномерных и многомерных классов Соболева. Исследовать задачу устойчивого восстановления решения задачи Дирихле нелинейного уравнения Пуассона.

Методы исследований. В работе использованы не только классические методы теории приближения классов функций, общей топо-

[31] *Царьков И.Г.* Устойчивость однозначной разрешимости в некорректной задаче Дирихле. — Матем.заметки, 2006. т.29, в. 2, с. 294-308.

логии и теории банаховых пространств, но также развиты новые и современные методы теории поперечников, в частности, геометрический метод получения неравенств между поперечниками.

Научная новизна. Главные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены неравенства между информационным колмогоровским поперечником и линейным, колмогоровским, гельфандовским, бернштейновким, александровским поперечниками. Доказана справедливость аналогов аддитивного и мультипликативного неравенств для информационного колмогоровского поперечника.

2. Получены порядки убывания информационного колмогоровского поперечника конечных пересечений классов Соболева $d_m^n\Big(\tilde{W}_{\bar{\mathbf{p}}}^{\bar{\alpha}}, \tilde{L}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^k)\Big)$ ($\alpha_{\mathbf{j}}, \mathbf{p_j}, \mathbf{q}$ - векторы), в случае $\mathbf{1} < \mathbf{q} \leqslant \mathbf{p_j} < \infty$, когда параметры n и m независимо стремятся к бесконечности, а так же в случае $\mathbf{1} < \mathbf{q}, \mathbf{p_j} < \infty$, когда параметр n равен параметру m и стремится к бесконечности.

3. Установлено, что оценка устойчивости решения задачи Дирихле для нелинейного уравнения Пуассона тесно связана с вычислением информационного колмогоровского поперечника.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию приближения классов функций. Полученные результаты могут найти применение в вычислительной математике, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений в частных производных.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством академика $\boxed{\text{П.Л. Ульянова}}$, д.ф.-м.н., профессора М.К. Потапова, д.ф.-м.н., профессора М.И. Дьяченко, д.ф.-м.н., профессора В.А. Скворцова и д.ф.-м.н., профессора Т.П. Лукашенко в 2006 г., на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством чл.-корр.РАН, проф. Б.С.Кашина и проф. С.В.Конягина в 2005 г., семинаре по теории вариационного исчисления и оптимального управления под руководством д.ф.-м.н., проф. В.М.Тихомирова в 2006 г., неоднократно на семинарах по теории приближения под руководством д.ф.-м.н., профессора И.Г.Царькова, в 2003 — 2007 г., а также на международных школах по теории функций им.С.Б. Стечкина (Миасс 2003, 2004, 2006).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 47 наименований. Общий объем диссертации составляет 73 страницы (из них 69 страниц — текст диссертации и 4 страницы — список литературы).

Краткое содержание диссертации

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике диссертации, приводятся определения основных используемых понятий, непосредственно связанных с темой диссертации. Вводится понятие информационного колмогоровского поперечника

Определение. Колмогоровским поперечником множества M в банаховом пространстве X называется

$$d_m(M,X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{L_m\subset X,\ \ a\in X} \sup_{f\in M} \inf_{\varphi\in L_m} \|f-\varphi-a\|_X,$$

где $\inf_{L_m\subset X}$ берется по всем подпространствам из X размерности m.

Определение. Информационным колмогоровским поперечником множества M в банаховом пространстве X назовем величину

$$d_m^n(M,X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{V^n} \sup_{b\in X} d_m(M\cap(V^n+b),X),$$

где $\inf_{V^n}$ - берется по всем подпространствам коразмерности n. Также определяются вспомогательные величины

$$\mathring{d}_m^n(M,X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{V^n} d_m(M\cap V^n,X),$$
$$\widehat{d}_m^n(M,X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{V^n,L_m} \sup_{b\in X} \inf_{a\in X} \sup_{f\in M\cap(V_n+b)} \inf_{\varphi\in L_m+a} \|f-\varphi-a\|_X.$$

Первая глава состоит из пяти параграфов. В ней устанавливаются неравенства, связывающие линейный, александровский, колмогоровский, гельфандовский, бернштейновский поперечники и информационный колмогоровский поперечник. Доказываются ряд теорем технического характера, которые используются в последующих главах.

В § **1.1** доказано, что поперечник по Бернштейну оценивает информационный колмогоровский поперечник снизу, а линейный поперечник сверху. Устанавливается, что для выпуклых, центрально-симметричных относительно нуля множеств величины $\mathring{d}^n_m(M,X)$, $\widehat{d}^n_m(M,X)$ и $d^n_m(M,X)$ совпадают по порядку.

Также показывается, что александровский поперечник оценивает снизу информационный колмогоровский поперечник для широкого класса множеств.

Пусть $\mathrm{Comp}_m(X)$ - класс всех компактов из X топологической размерности не выше m, а $C(U,V)$ - класс всех непрерывных отображений из метрического пространства U в метрическое пространство V.

Определение. Александровским поперечником множества M в банаховом пространстве X называется

$$a_m(M,X) \overset{\text{def}}{=} \inf_{N\in\mathrm{Comp}_m(X),\ \varphi\in C(X,N)} \sup_{x\in M} \|x-g(x)\|_X.$$

Теорема 1.8. Пусть $M\subset X$ - замкнуто, ограниченно. Тогда

$$a_{n+m}(M,X) \leqslant \widehat{d}^n_m(M,X).$$

В § **1.2** получены оценки сверху линейного, проекционного, гельфандовского поперечников через колмогоровский поперечник, умноженный на некоторую величину, которая выражается в терминах проекционной константы пространства (проекционные константы классических пространств вычислены в [32]). Показана точность доказанного неравенства на классе всех выпуклых, центрально - симметричных множеств.

В § **1.3** устанавливаются соотношения двойственности для информационного колмогоровского поперечника.

§ **1.4** посвящен изучению аддитивного и мультипликативного неравенства для информационного колмогоровского поперечника. Приведен пример, показывающий, что

$$\mathring{d}^{n_1+n_2}_{m_1+m_2}(M_1+M_2,X) \leqslant \mathring{d}^{n_1}_{m_1}(M_1,X) + \mathring{d}^{n_2}_{m_2}(M_2,X),$$

вообще говоря, не справедливо. Однако, если множества M_1 и M_2 оказываются в подпространствах L_N размерности N и V^N коразмерности N, для которых $L_N \oplus V^N = X$, то неравенство выполнено.

[32] *H.König, D.R. Lewis,P.K. Lin.* Finite dimensional projection constants. — Studia Math 75(1983), p.341-358. 1983.

$\S\,\mathbf{1.5}$ посвящен изучению проекционных свойств экстремальных подпространств, для колмогоровского поперечника.

Во **второй главе** вычисляются порядки убывания информационного колмогоровского поперечника классов Соболева.

В $\S\,\mathbf{2.1}$ устанавливаются правильные порядки убывания информационного колмогоровского поперечника конечномерных шаров, что используется в следующем параграфе.

$\S\,\mathbf{2.2}$ посвящен вычислению порядков убывания информационного колмогоровского поперечника классов $\tilde{W}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mathbf{p}}}$ в пространствах $\tilde{L}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)$.

Обозначим $\tilde{L}^0_p$ - пространство функций с нулевым средним по всем аргументам, состоящее из функций $x \in \tilde{L}_p(\mathbb{T}^n)$

$$x(t) \sim \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^n} x_k e^{i(k,t)}, \quad \text{где} \quad \mathring{\mathbb{Z}}^n = \{k \in \mathbb{Z}^n \ : \ \prod_{j=1}^{n} k_j \neq 0\},$$

x_k - коэффициенты Фурье для x. Для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ на пространстве $\tilde{L}^0_p$ введем формально операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^n} \prod_{j=1}^{n} (ik_j)^{\alpha_j} x_k e^{i(k,t)}, \quad (ik_j)^{\alpha_j} = \mid k_j \mid^{\alpha_j} e^{i\frac{\pi}{2}\alpha_j \operatorname{sgn} k_j}$$

(сходимость ряда понимается в смысле $\tilde{L}_p$ - сходимости).

Определение. Для векторов $\alpha, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant \mathbf{p}_j < \infty$, $j = 1, \ldots, n$, классом Соболева называется множество функций из $\tilde{L}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$

$$\tilde{W}^{\alpha}_{p} \stackrel{\text{def}}{=} \{x(\cdot) \in \tilde{L}^0_p \ : \ \|x^{(\alpha)}\|_p \leqslant 1\}.$$

Для конечного набора $\bar{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^m\} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{p}^r < \infty, r = 1, \ldots, m$ и $\bar{\alpha} = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\} \subset \mathbb{R}^n$ определим класс

$$\tilde{W}^{\bar{\alpha}}_{\bar{p}} = \cap_{r=1}^{m} \tilde{W}^{\alpha^r}_{p^r}.$$

Обозначим $\mathring{\mathbb{R}}^n_+ = (0, +\infty)^n$.

Теорема 2.13. Пусть $\mathbf{q}, \mathbf{p^r}, \alpha^{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{1} < \mathbf{q} \leqslant \mathbf{p}^r < \infty$, $r = 1, \ldots, m$, A - выпуклая оболочка $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$. Тогда

$$d^N_K(\tilde{W}^{\bar{\alpha}}_{\bar{p}}, \tilde{L}_q) \asymp \big((N+K)^{-1} \log^l (N+K)\big)^{\frac{1}{M}}, \text{ при } \quad A \cap \mathring{\mathbb{R}}^n_+ \neq \oslash,$$

где M - значение, а l - размерность множества решений задачи $(s,1)\to\sup,\quad (s,\alpha^r)\leqslant 1,\quad r=1,\dots,m$.

Теорема 2.14. Пусть $\mathbf{q},\mathbf{p^r},\alpha^{\mathbf{r}}\in\mathbb{R}^n$ $\mathbf{1}<\mathbf{q},\mathbf{p}^r<\infty,\quad r=1,\dots,m$, A - выпуклая оболочка $\{\alpha^1,\dots,\alpha^m\}$. Тогда

$$d_N^N(\tilde W^{\bar\alpha}_{\bar p},\tilde L_q)\asymp\left(N^{-1}\log^l N\right)^{\frac{1}{M}},\quad \text{при}\quad (A-\mathbf{1})\cap\mathring{\mathbb{R}}^n_+\neq\oslash,$$

где M - значение, а l - размерность множества решений задачи $(s,1)\to\sup,\quad (s,\alpha^r)\leqslant 1,\quad r=1,\dots,m$

Таким образом в случае большой гладкости порядки убывания поперечников $a_n(\tilde W^\alpha_p,L_q(\mathbb{T}^1))$ и $d_n^n(\tilde W^\alpha_p,L_q(\mathbb{T}^1))$ совпали.

В **третьей главе** исследуются некоторые приложения поперечника по Гельфанду и информационного колмогоровского поперечника к задаче устойчивости решения задачи Дирихле для нелинейных уравнений Пуассона.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ - открытая, ограниченная связная область с C^∞ - гладкой границей, $1<p<\infty$. Рассмотрим множество уравнений

$$[*]\begin{cases}\Delta u_\delta(x)-F(u_\delta)(x)=\varphi(x)+\delta\varphi(x), & x\in\Omega\\ u_\delta\Big|_{\partial\Omega}(x)=\tau(x)+\delta\tau(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

где $\varphi(\cdot)\in L_p(\Omega)$, $\tau(\cdot)\in L_p(\partial\Omega)$, $\delta\varphi$, $\delta\tau$ - некоторые возмущения, вносимое погрешностью измерения $\varphi(\cdot)$ и $\tau(\cdot)$. Обозначим $X=L_p(\Omega)$. Решения уравнения ищутся в пространстве $W^2_p(\Omega)$. Предполагаем, что для $\delta\varphi=0,\delta\tau=0$ существует решение $u_0(x)\in W^2_p(\Omega)$.

Возмущения $\delta\varphi$ и $\delta\tau$ рассматриваются в банаховых пространствах $\Phi(\Omega)$ и $\mathcal{T}(\partial\Omega)$ соответственно.

Обозначим через Q_η - множество решений задач [*], получающееся при всевозможных вариациях прогрешностей, подчиненных условию $\|\delta\varphi\|_\Phi+\|\delta\tau\|_{\mathcal{T}}\leqslant\eta$, где параметр η отвечает за точность измерения.

Для некоторого подпространства $V^n=\cap_{j=1}^n\ker<\cdot,y_k^*>$, с выбранным двойственным базисом $Y=\{y_k^*\}_{k=1}^n$, для произвольного вектора $x\in X$, через $<x,Y>$ мы будем обозначать вектор из $\mathbb{R}^n$ с координатами $<x,Y>_k=<x,y_k^*>$.

Наша задача состоит в приближенном восстановлении решения из Q_η по дополнительной информации, заданной неточно.

Для этого рассмотрим множество

$$Q(v,\eta,Y)=\{u_\delta\in Q_\eta,\quad <u_\delta-u_0,Y>=v\},$$

где вектор $v \in \mathbb{R}^n$.

Пусть

$$W^0 = \Big\{ w | \ \exists \mu \in (0,1] : \quad u^\mu = \mu w + u_0, \\ \|\Delta u^\mu - F(u^\mu) - \varphi\|_\Phi \leqslant \mu, \ \ \|w\Big|_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{T}} \leqslant 1 \Big\},$$

$$W^1 = \mathrm{Lin}\Big\{ w | \ \ \Delta(w+u_0) - F(w+u_0) = \varphi, \ \ w\Big|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}.$$

Обозначим

$$W = \overline{W^1 \bigcup \Big(\bigcup_{\xi \in [-1,1]} \xi W^0 \Big)}.$$

Через $< W, Y >$ будем обозначать множество

$$< W, Y >= \{ < u, Y >: \quad u \in W \},$$

$\mathrm{diam}(W, X)$ - диаметр множества W.

Устанавливается теорема, показывающая, что задача приближенного восстановления решения по значениям нескольких линейных непрерывных функционалов связана с задачей вычисления информационного колмогоровского поперечника множества W .

Теорема 3.6. Пусть

$$d_m^n(W, X) < \infty, \ \ \mathrm{diam}(W, X) < \infty,$$

тогда для произвольного $\gamma > 0$

$$\inf_{V^n} \sup_{v \in \mathbb{R}^n: \ \ p_{<W,Y>}(v) \leqslant \gamma} d_m(Q(v, \eta, Y), X) \leqslant \eta d_m^n(W, X) + \gamma \mathrm{diam}(W, X),$$

где $p_{<W,Y>}(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - функция Минковского множества $< W, Y >$. (Неравенства в утверждении теоремы не зависят от выбора двойственного базиса Y).

Одна из сложностей применения теоремы 3.6 заключается в том, что величина $p_{<W,Y>}(v)$ уменьшается при "раздутии" множества W, именно

$$W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad p_{<W_2,Y>}(v) \leqslant p_{<W_1,Y>}(v).$$

Эту сложность преодолевает следующее утверждение:

Теорема 3.7. Пусть

$$d_m^n(W, X) < \infty,$$

тогда для произвольного $\eta > 0$

$$\inf_{V^n} \sup_{v \in \mathbb{R}^n} d_{m+1}(Q(v,\eta,Y),X) \leqslant \eta d_m^n(W,X).$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору И. Г. Царькову за плодотворные обсуждения поставленных задач и постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. *Скориков Е.М.* "Информационный колмогоровский поперечник и некоторые точные неравенства между поперечниками."// Изв. РАН, Сер.матем. 2007, т.71 №3, с.173-196.

2. *Скориков Е.М.* "Информационный колмогоровский поперечник для пересечения соболевских классов."// Матем. заметки, т. 80, вып. 4, 2006, стр. 638-640.

3. *Скориков Е.М.* "Информационный колмогоровский поперечник классов функций с несколькими ограниченными производными."// Тезисы докладов международной конференции по функциональным пространствам, теории приближений, нелинейному анализу, Москва, 2005. с.195-196.

4. *Скориков Е.М.* "Вычисление интерполяционного колмогоровского поперечника в гильбертовом пространстве."// Труды участников международной школы по геометрии и анализу. Абрау-Дюрсо, 2002. с.135.