

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

**Механико-математический факультет**

---

На правах рукописи

**Якушева Елена Владимировна**

УДК 539.374

**О РАЗВИТИИ  
ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ  
ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЯ**

Специальность 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**А в т о р е ф е р а т**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2007

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:

академик АН СССР

Л. И. Седов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,  
профессор Р. А. Васин

кандидат физико-математических наук,  
доцент А. Н. Сахаров

Ведущая организация:

Самарский государственный университет

Защита состоится «2» ноября 2007 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу:  
119992, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2007 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета Д 501.001.91  
д.ф.-м.н., профессор

С. В. Шешенин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**А к т у а л ь н о с т ь т е м ы.** Для правильного описания процесса пластического деформирования требуется использовать сложные аналитические методы, вызывающие существенные затруднения. Поэтому при составлении математической модели среды стремятся, с одной стороны, учесть главные закономерности, а с другой — максимально упростить соотношения.

Напряженно-деформированное состояние, описываемое плоской деформацией, являясь, по-существу, приближением реальных пространственных задач, в ряде случаев дает довольно точную картину состояния тела и позволяет выявить внутренние особенности изучаемых объектов.

Поэтому плоские упругопластические задачи занимают важное место в теории пластичности. Они актуальны для фундаментальных исследований в механике деформируемого твердого тела и для прикладных разработок, необходимых для изучения напряженно-деформированного состояния различных объектов.

Тем не менее, аналитическое решение даже плоской упругопластической задачи связано со значительными трудностями и является сложной математической проблемой. По этой причине, несмотря на серьезный прогресс, достигнутый в решении этих задач, к настоящему времени известно немного плоских упругопластических задач, имеющих аналитическое решение. Однако при построении таких решений необходимо определять и учитывать границы их применимости.

Поскольку найти точное решение упругопластических задач можно лишь в отдельных весьма частных случаях, возникла задача о построении приближенного решения. Если уравнения состояния тела и граничные условия зависят от некоторого параметра  $\varepsilon$  и решение задачи при  $\varepsilon = 0$  известно, можно поставить задачу нахождения приближенного решения при  $\varepsilon$ , близких к нулю, т.е. построения асимптотики решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такой метод, получивший название метода малого параметра, разработанный при изучении задачи трех тел небесной механики, корнями уходит к Ж.Даламберу. Метод активно развивается и используется с конца XIX века и до наших дней, в том числе и в механике деформируемого твердого тела.

Для изучения особенностей применения метода малого параметра в решении упругопластических задач, этот метод использован на примере задач, имеющих аналитическое решение.

**Цель работы.** Целью работы является изучение допустимости упругих напряжений в плоской статически определимой упругопластической задаче, сводящейся к задаче сопряжения, в частности:

- обнаружение допредельных нагрузок, при которых поле напряжений в упругой зоне выходит за поверхность текучести;
- выяснение причин, по которым решение задачи сопряжения не является решением упругопластической задачи.

Второй целью работы является построение методом малого параметра решения поставленной упругопластической задачи с допустимым упругим полем напряжений.

Третьей целью является изучение формы границы пластической зоны в задаче об антиплоской деформации пространства с цилиндрическим отверстием и проверка работы метода малого параметра при решении этой задачи.

**Научная новизна работы.** В настоящей работе обнаружено, что при стандартном подходе к решению плоской упругопластической задачи в некоторых случаях происходит выход напряжений за поверхность текучести для допредельных нагрузок. Введено связанное с этим понятие критической нагрузки и найдена критическая нагрузка для задачи Галина о двухосном нагружении плоскости с отверстием. Обнаружена связь выхода напряжений за поверхность текучести и касания характеристики с контуром сопряжения. В случае закритической нагрузки предложена структура пластической зоны. При закритической нагрузке, мало отличающейся от критической методом малого параметра, для которого предложена модификация, решена задача о двухосном нагружении плоскости с круговым отверстием. Получены два приближения для поля напряжений и границы пластической зоны.

В задаче об антиплоской деформации пространства с цилиндрическим отверстием рассмотрена форма границы пластической зоны, найдены ее характерные размеры. Показано, что граница пластической зоны касается контура отверстия в точке их встречи. Получено асимптотическое представление точного решения для границы пластической зоны при наличии малого параметра в задаче об антиплоской деформации пространства с цилиндрическим отверстием. Произведено сравнение асимптотического представления с решением этой же задачи, полученным методом малого параметра.

**А п р о б а ц и я р а б о т ы.** Результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры теории пластичности и кафедры гидромеханики механико-математического факультета МГУ, на научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2006 г).

**П у б л и к а ц и и.** По теме диссертации опубликовано 3 работы, перечисленные в конце автореферата.

**С т р у к т у р а и о б ъ е м р а б о т ы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 130 наименований и 13 приложений. Общий объем работы составляет 201 страницу, из них 165 страниц основного текста и 36 страниц — приложения. Работа содержит 11 рисунков и 1 таблицу.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во в в е д е н и и** объясняется актуальность темы диссертационной работы, проводится краткий обзор предшествующей и современной научной литературы по данному вопросу, кратко излагается содержание работы.

**В п е р в о й г л а в е** содержится постановка плоской упруго-пластической задачи, дается определение критической нагрузки. Доказывается связь выхода напряжений за поверхность текучести и касания характеристики с контуром сопряжения, а также предлагается структура пластической зоны при закритической нагрузке.

**В §1.1.** дается постановка плоской упругопластической задачи (УПЗ) в случае, когда на части границы области нагрузка не изменяется. Эта задача является статически определимой, поле напряжений может быть найдено только по текущему значению нагрузки. К части границы области, на которой нагрузка не изменяется, примыкает пластическая зона, поле напряжений в которой часто считается заранее известным. Тогда УПЗ сводится к задаче сопряжения (ЗС) известного пластического поля напряжений с искомым упругим полем при условии непрерывности напряжений на искомом контуре сопряжения. Так, в частности, построено известное решение задачи Галина о двухосном растяжении упругопластической плоскости с ненагруженным круговым отверстием.

**В §1.2.** показано, что определяемое при этом упругое поле напряжений может, однако, выйти за поверхность текучести, причем для допредельной нагрузки, т.е. для нагрузки, когда существование решения гарантировано. Нагрузка, начиная с которой это происходит, называется критической. Решение ЗС в задаче Галина построено при условии

$$|q - p| < 1, \quad (1 - |q - p|)e^{\frac{|p+q|-1}{2}} \geq 1,$$

где  $p$  и  $q$  — усилия, приложенные на бесконечности вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Но использовать это решение в качестве решения УПЗ можно лишь при выполнении дополнительного условия  $|q - p| \leq \sqrt{2} - 1$ . Критической нагрузкой является значение  $|q - p| = \sqrt{2} - 1$ . Нагрузки  $\sqrt{2} - 1 < |q - p| < 1$  являются закритическими. Показано, что при закритической нагрузке решение ЗС не является решением УПЗ по следующим причинам.

Во-первых, при закритической нагрузке имеются характеристики системы уравнений равновесия и условия текучести, построенные для поля напряжений в пластической зоне  $\sigma^p$ , которые пересекают контур сопряжения в трех точках. Из-за этого отсутствует соответствующее решение для перемещений. Кроме того, показано, что при  $0 \leq |q - p| < \sqrt{2} - 1$  характеристики пересекают контур сопряжения ровно в одной точке, при  $|q - p| = \sqrt{2} - 1$  существует характеристика, имеющая касание второго порядка с контуром сопряжения в точке  $z_0 = |z_0|e^{i\frac{\pi}{8}}$ , а также в точках, симметричных ей относительно осей координат.

Вторая причина состоит в том, что построенное поле напряжений при закритической нагрузке выходит за поверхность текучести. Показано также, что при закритических нагрузках, несколько превышающих  $\sqrt{2} - 1$ , упругое поле напряжений выходит за поверхность текучести именно в окрестности точки  $z_0 = |z_0|e^{i\frac{\pi}{8}}$  и точках, симметричных ей относительно осей координат.

Доказано, что такая связь выхода напряжений за поверхность текучести и касания характеристики с контуром отверстия имеет место и в общем случае. А именно, показано, что при критической нагрузке происходит касание характеристики с контуром сопряжения  $l_0$ , соответствующем этому значению нагрузки. Далее доказано, что если при значении параметра нагрузки  $\tau < \tau_*$  решение ЗС в упругой области  $\Omega_\tau^e$  удовлетворяет условию допустимости напряжений  $F(\sigma) \leq 0$ , а при  $\tau = \tau_*$  характеристика касается контура сопряжения  $l_{\tau_*}$  в точке  $Q_{\tau_*}$ , тогда  $\tau_*$  является критическим значением.

При закритической, но допустимой нагрузке УПЗ имеет единственное решение. Но поле напряжений этого решения в пластической зоне не может всюду совпадать с полем напряжений в ЗС, поскольку при

закритической нагрузке указанное решение в «упругой» зоне выходит за поверхность текучести. Таким образом, для закритической нагрузки должно быть указано новое поле напряжений в пластической зоне, которое при решении ЗС обеспечило бы допустимость напряжений.

**В §1.3.** предложена структура пластической зоны для закритической нагрузки. При этой нагрузке лишь в некоторой части  $P^-$  пластической зоны решения УПЗ сохраняется поле напряжений  $\sigma^p$ . Каждая точка области  $P^-$  соединяется с контуром отверстия кривыми обоих семейств характеристик уравнений равновесия, целиком лежащими в пластической зоне. В других областях  $P^+$  пластической зоны, точки которых нельзя так соединить с контуром отверстия, имеется отличное от  $\sigma^p$  поле напряжений  $s$ .

Кривая  $L^-$ , разделяющая области  $P^-$  и  $P^+$ , является характеристикой системы уравнений равновесия.

**Во второй главе** содержится постановка и решение УПЗ при закритической нагрузке, мало отличающейся от критической. УПЗ решена методом малого параметра на примере задачи о двухосном нагружении плоскости с круговым отверстием.

**В §2.1.** приводится постановка УПЗ. Рассматривается закритическая нагрузка, соответствующая значению  $\tau = \tau_0(1 + \varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon^2 \ll 1$ , где  $\tau_0$  — критическое значение параметра нагружения.

Пусть  $E_\varepsilon$  и  $P_\varepsilon$  — упругая и пластическая зоны;  $P_\varepsilon^-$  и  $P_\varepsilon^+$  — части пластической зоны, в которых полем напряжений является соответственно  $\sigma^p$  и отличное от него поле  $s_\varepsilon$ . Поле напряжений в упругой зоне  $\sigma_\varepsilon^e$ . Кривые, разделяющие пары областей  $P_\varepsilon^-$  и  $P_\varepsilon^+$ ,  $P_\varepsilon^+$  и  $E_\varepsilon$ ,  $P_\varepsilon^-$  и  $E_\varepsilon$  обозначим соответственно  $L_\varepsilon^-, L_\varepsilon^+$  и  $L_\varepsilon$ .

При критической нагрузке  $\varepsilon = 0$  решением УПЗ является решение ЗС: область  $P_0^+$  и кривые  $L_0^-$  и  $L_0^+$  отсутствуют.

Решением УПЗ при  $\varepsilon \neq 0$  являются границы  $L_\varepsilon^-, L_\varepsilon^+, L_\varepsilon$ , и поля напряжений  $s_\varepsilon$  и  $\sigma_\varepsilon^e$  так, что

- 1) в области  $P_\varepsilon^+$  при  $\sigma = s_\varepsilon$  удовлетворяется система уравнений теории пластичности;
- 2) в области  $E_\varepsilon$  поле напряжений  $\sigma = \sigma_\varepsilon^e$  выражается через бигармоническую функцию напряжений и удовлетворяет условию допустимости  $F(\sigma) \leq 0$ ;
- 3) на контурах  $L_\varepsilon^-, L_\varepsilon^+$  и  $L_\varepsilon$  выполняется условие сопряжения — условие непрерывности напряжений;
- 4) на бесконечности выполняются краевые условия для напряжений при нагрузке, соответствующей значению  $\tau = \tau_0(1 + \varepsilon^2)$  параметра нагружения.

При решении поставленной задачи используется специальная криволинейная ортогональная система координат (СКОК), связанная с контуром  $L_0 \equiv l_{\tau_0}$ . Эта система координат вводится в параграфе §2.2. В этом же параграфе показано, что условия текучести в СКОК имеют такой же вид, как и в декартовой системе координат, а уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \left(1 + \frac{y}{R(x)}\right) \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{2}{R(x)} \sigma_{xy} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \left(1 + \frac{y}{R(x)}\right) \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{R(x)} &= 0, \end{aligned}$$

где  $R(x)$  — радиус кривизны контура  $L_0$ .

**В §2.3.** исследованы размеры области  $P_\varepsilon^+$ . Показано, что в направлении  $x$  эта область имеет размер порядка  $\varepsilon$ , а в направлении  $y$  — размер порядка  $\varepsilon^2$ .

В соответствии с оценкой размера зоны  $P_\varepsilon^+$  записано разложение функции  $y = f(x, r)$  — уравнения характеристики того же семейства, что и  $L_\varepsilon^-$ , проходящей через точку  $x = 0, y = r = r_2 \varepsilon^2 + r_3 \varepsilon^3 + \dots$

При помощи разложения в ряд уравнение кривой  $L_\varepsilon^-$  представляется в виде

$$y = \rho_\varepsilon^-(x) = \varepsilon^2 \rho_2^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 \rho_3^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \rho_2^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= r_2, \quad \rho_3^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{6} f_{xxx} \frac{x^3}{\varepsilon^3} + f_{xr} r_2 \frac{x}{\varepsilon} + r_3, \\ f_{xr} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(0, 0), \quad f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0). \end{aligned}$$

Величины  $\rho_2^-, \rho_3^-, \dots$  имеют порядок единицы; числа  $r_2, r_3, \dots$  — искомые в УПЗ.

Уравнения кривых  $L_\varepsilon^+$  и  $L_\varepsilon$  ищутся в виде

$$\begin{aligned} y &= \rho_\varepsilon^+(x) = \varepsilon^2 \rho_2^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 \rho_3^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \\ y &= \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \rho_2(x) + \varepsilon^3 \rho_3(x) + \dots, \end{aligned}$$

где  $\rho_i^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  и  $\rho_i(x)$  — неизвестные величины.

**В §2.4.** приводится представление поля напряжений в зонах  $P_\varepsilon^+$  и  $E_\varepsilon$ . Поле напряжений  $s_\varepsilon(x, y)$  в зоне  $P_\varepsilon^+$  представлено в виде разложения в ряд по второму аргументу

$$y = \rho_\varepsilon^-(x) + (y - \rho_\varepsilon^-(x))$$

в окрестности его значения  $\rho_\varepsilon^-(x)$ .



С использованием непрерывности напряжений на кривой  $L_\varepsilon^-$  и представления производных

$$\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial y}(x, \rho_\varepsilon^-(x)) = \frac{\partial \sigma^p}{\partial y}(x, \rho_\varepsilon^-(x)) + \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right](x),$$

где скачок берется на контуре  $L_\varepsilon^-$ , и аналогичного представления для высших производных, этот ряд имеет вид

$$s_\varepsilon(x, y) = \sigma^p(x, 0) + \frac{\partial \sigma^p}{\partial y}(x, 0) \cdot y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^p}{\partial y^2}(x, 0) \cdot y^2 + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right](x) (y - \rho_\varepsilon^-(x)) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right](x) (y - \rho_\varepsilon^-(x))^2 + \dots$$

Поле напряжений в упругой зоне  $E_\varepsilon$  записано в виде

$$\sigma_\varepsilon^e(x, y) = \sigma_0^e(x, y) + \varepsilon^2 \sigma_2^e(x, y) + \varepsilon^3 \sigma_3^e(x, y) + \varepsilon^4 \sigma_4^e(x, y) + \dots,$$

где  $\sigma_0^e(x, y)$  — решение ЗС при критической нагрузке.

На кривой  $L_\varepsilon^-$  поле напряжений непрерывно, а его производные терпят разрыв. Величины этих скачков используются для представления поля напряжений в  $P_\varepsilon^+$ . Выражения для скачков производных поля напряжений получены в §2.5.

Соотношения на характеристике  $f(x, r)$  системы уравнений равновесия имеют вид

$$\left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right] = A, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right] = A\alpha \quad \text{и} \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right] = A\alpha^2,$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, r) \cdot \left( 1 + \frac{f(x, r)}{R(x)} \right)^{-1}.$$

Транспортное уравнение, управляющее значениями  $A(x)$  приведено в переменных  $\sigma$  и  $\psi$

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2\sigma, \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} = \sin 2\psi, \quad 2\sigma_{xy} = \cos 2\psi.$$

Характеристика  $L_\varepsilon^-$ , для которой записывается транспортное уравнение, имеет наклон, близкий к нулю, и принадлежит первому или второму из семейств

$$\frac{dy}{dx} = \left( 1 + \frac{y}{R(x)} \right) \operatorname{tg} \psi, \quad \frac{dy}{dx} = - \left( 1 + \frac{y}{R(x)} \right) \operatorname{ctg} \psi$$

в зависимости от значения

$$\sigma_{xy}^p(0, 0) = -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sigma_{xy}^p(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

В примере реализуется  $\sigma_{xy}^p(0, 0) = -\frac{1}{2}$  и, следовательно,  $\psi(0, 0) = \frac{\pi}{2}$ . Тогда транспортное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \left( -\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial c}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] - \frac{\partial c}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]^2,$$

где  $c = -\left(1 + \frac{y}{R(x)}\right) \operatorname{ctg} \psi$ , при учете соотношения на характеристике

$$\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right],$$

полученного в § 2.5., преобразуется к виду

$$\frac{dA}{dx} = k_1(x)A + k_2(x)A^2, \quad A = \left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right].$$

При помощи его решения скачки производных поля напряжений выражаются через значение  $A(0)$  в точке  $x = 0$ ,  $y = r$  характеристики  $L_\varepsilon^-$ .

Решение этого уравнения ищется в виде разложения по координате  $x$  в окрестности точки  $x = 0$ . Коэффициенты разложения, как и коэффициенты  $k_1(x)$ ,  $k_2(x)$  в уравнении и значение  $A(0)$ , зависят от величины  $r = r_2 \varepsilon^2 + \dots$ , поэтому, в свою очередь, разложены по параметру  $\varepsilon$ . Коэффициенты разложений имеют порядок единицы.

В результате вычислений получено (не выписываются члены более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon^2$ )

$$A(x) = A_0 + \varepsilon A'_0 \frac{x}{\varepsilon} + \varepsilon^2 \left( A_1 r_2 + \frac{1}{2} A''_0 \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right) + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} A'_0 &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{yy}^p}{\partial y}(0, 0) - \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial y}(0, 0) \right) A_0 - \frac{1}{2} A_0^2, \\ A''_0 &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^p}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x \partial y}(0, 0) \right) A_0 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{yy}^p}{\partial y}(0, 0) - 2 \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial y}(0, 0) - 2 A_0 \right) A'_0. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_0, A_1, \dots$  разложения скачка  $\left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right] \Big|_{x=0}$  являются искомыми в УПЗ.

Для величины  $\varkappa(x)$  получено разложение

$$\varkappa(x) = \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} f_{xxx} \frac{x^2}{\varepsilon^2} + r_2 f_{xr} \right) + \dots$$

С учетом этого разложения и представления для величины  $A(x)$  получены выражения для скачков на характеристике  $L_\varepsilon^-$  (отбрасываются члены более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon^2$ )

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial y}\right] &= A_0 + \varepsilon A_0' \frac{x}{\varepsilon} + \varepsilon^2 \left( A_1 r_2 + \frac{1}{2} A_0'' \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right) + \dots, \\ \left[\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\right] &= \varepsilon^2 A_0 \left( \frac{1}{2} f_{xxx} \frac{x^2}{\varepsilon^2} + r_2 f_{xr} \right) + \dots, \\ \left[\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\right] &= 0 + \dots,\end{aligned}$$

где величины

$$f_{xr} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_{yy}^p - \sigma_{xx}^p)}{\partial y}(0; 0), \quad f_{xxx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma_{yy}^p - \sigma_{xx}^p)}{\partial x^2}(0; 0)$$

находятся при помощи уравнения характеристики.

Далее получены выражения для скачков производных второго порядка. Эти скачки (и если потребуются — скачки высших производных) выражаются через величины  $A_0, A_1, \dots$  и через параметры  $B_0, B_1, \dots$ , аналогичные величинам  $A_i$ .

Представления для поля напряжений  $s_\varepsilon$  вместе с выражениями для скачков производных и аналогичных им выражениям для скачков высших производных сводят задачу построения поля напряжений  $s_\varepsilon$  к разысканию величин  $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ .

Далее в §2.6. получены условия сопряжения на границе упругой и пластической областей. На контуре  $L_\varepsilon \cup L_\varepsilon^+$ , разделяющем упругую и пластическую зоны, напряжения непрерывны.

На кривой  $L_\varepsilon$  условия непрерывности  $\sigma_\varepsilon^e(x, \rho_\varepsilon(x)) = \sigma^p(x, \rho_\varepsilon(x))$  приводят к следующим условиям:

$$\sigma_{2xy}^e(x, 0) = 0, \quad \sigma_{2yy}^e(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{0xx}}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) + \sigma_{2xx}^e(x, 0) = 0,$$

$$\sigma_{3xy}^e(x, 0) = 0, \quad \sigma_{3yy}^e(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{0xx}}{\partial y}(x, 0)\rho_3(x) + \sigma_{3xx}^e(x, 0) = 0,$$

$$\sigma_{4xy}^e(x, 0) = -\frac{\partial\sigma_{2xy}^e}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\sigma_{0xy}}{\partial y^2}(x, 0)\rho_2^2(x),$$

$$\sigma_{4yy}^e(x, 0) = -\frac{\partial\sigma_{2yy}^e}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\sigma_{0yy}}{\partial y^2}(x, 0)\rho_2^2(x),$$

$$\sigma_{4xx}^e(x, 0) = -\frac{\partial\sigma_{0xx}}{\partial y}(x, 0)\rho_4(x) - \frac{\partial\sigma_{2xx}^e}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\sigma_{0xx}}{\partial y^2}(x, 0)\rho_2^2(x).$$

Условие непрерывности на  $L_\varepsilon^+$

$$s_\varepsilon(x, \rho_\varepsilon^+(x)) = \sigma_\varepsilon^e(x, \rho_\varepsilon^+(x))$$

(при записи этого условия производится дополнительное разложение по  $x$  в окрестности  $x = 0$ ) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_{2xy}^e(x, 0) &= 0; & \sigma_{2yy}^e(x, 0) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{0xx}}{\partial y}(0, 0)\rho_2^+ + \sigma_{2xx}^e(0, 0) - A_0(\rho_2^+ - \rho_2^-) &= 0; \\ \sigma_{3xy}^e(x, 0) &= 0; & \sigma_{3yy}^e(x, 0) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{0xx}}{\partial y}(0, 0)\rho_3^+ + \frac{\partial^2 \sigma_{0xx}}{\partial x \partial y}(0, 0)\frac{x}{\varepsilon}\rho_2^+ + \frac{\partial \sigma_{2xx}^e}{\partial x}(0, 0)\frac{x}{\varepsilon} + \\ &+ \sigma_{3xx}^e(0, 0) - A_0(\rho_3^+ - \rho_3^-) - A_0'\frac{x}{\varepsilon}(\rho_2^+ - \rho_2^-) &= 0. \end{aligned}$$

В §2.7. получены краевые условия. Нагрузка на бесконечности задается как функция параметра  $\tau$ . Ее разложение по параметру  $\varepsilon^2$  приводит к краевым условиям для полей  $\sigma_2^e, \sigma_3^e, \dots$ . В случае двухосного растяжения плоскости с отверстием усилиями  $p$  и  $q$  на бесконечности соответствующие краевые условия для первых членов разложения упругого поля напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{2xx}^e &\rightarrow \frac{dp}{d\tau}(\tau_0), & \sigma_{2yy}^e &\rightarrow \frac{dq}{d\tau}(\tau_0), & \sigma_{2xy}^e &\rightarrow 0, \\ \sigma_{3xx}^e &\rightarrow 0, & \sigma_{3yy}^e &\rightarrow 0, & \sigma_{3xy}^e &\rightarrow 0, \\ \sigma_{4xx}^e &\rightarrow \frac{1}{2}\frac{d^2p}{d\tau^2}(\tau_0), & \sigma_{4yy}^e &\rightarrow \frac{1}{2}\frac{d^2q}{d\tau^2}(\tau_0), & \sigma_{4xy}^e &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

При отсутствии пластической зоны  $P^+$  с отличным от  $\sigma^p$  полем напряжений условие сопряжения компонент  $\sigma_{nyy}^e$  и  $\sigma_{nxy}^e$  не содержат неизвестного коэффициента  $\rho_n$ , представляющего в том же приближении границу пластической зоны. Аналогичным свойством обладают и получившиеся условия сопряжения, а также условия сопряжения в дальнейших приближениях.

Однако процедура построения очередного приближения, применяемая при отсутствии зоны  $P^+$  (используются условия сопряжения компонент  $\sigma_{nyy}^e$  и  $\sigma_{nxy}^e$  для нахождения из упругой задачи поля  $\sigma_n^e$ , а затем условие сопряжения компоненты  $\sigma_{nxx}^e$  — для нахождения коэффициента  $\rho_n$ ), в рассматриваемом случае нуждается в дополнении.

Условия сопряжения при наличии зоны  $P^+$ , вообще говоря, содержат параметры, описывающие поле напряжений в этой зоне и положение границ зон  $P^-$  и  $P^+$ . Эти величины могут неполностью определяться

предыдущими приближениями. Чтобы найти их значения, следует использовать условия допустимости (отсутствие выхода за поверхность текучести) напряжений в упругой зоне. Это условие гарантирует единственность решения плоской УПЗ и поэтому позволяет определить значения всех свободных параметров.

**В §2.8.** найден первый неизвестный член в разложении поля напряжений в упругой зоне. Он определяется решением  $\sigma_2^e(x, y)$  упругой задачи во внешности контура  $L_0 = l_{\tau_0}, y = 0$  со следующими краевыми условиями: на всем контуре  $L_0$  должно выполняться условие отсутствия нагрузки, а также должны выполняться первые из краевых условий на бесконечности.

Далее доказывается утверждение.

**Утверждение.** Если  $\sigma_\tau^e(x, y)$  — решение ЗС в упругой зоне со стандартным полем  $\sigma^p$  при значении  $\tau$  параметра нагружения, то

$$\sigma_2^e(x, y) = \left. \frac{\partial \sigma_\tau^e(x, y)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0}.$$

Коэффициент  $\rho_2(x)$  в представлении кривой  $L_\varepsilon$  находится из условия сопряжения для  $\sigma_{2xx}^e$

$$\rho_2(x) = \rho_2^c(x) = -\sigma_{2xx}^e(x, 0) \cdot \left( \frac{\partial \sigma_{0xx}^e(x, 0)}{\partial y} \right)^{-1},$$

где  $\rho_2^c(x)$  — первый член разложения в представлении

$$y = \rho_\varepsilon^c(x) = \varepsilon^2 \rho_2^c + \varepsilon^4 \rho_4^c + \dots$$

контура сопряжения  $l_{\tau_0(1+\varepsilon^2)}$  решения ЗС.

Найденное уравнение кривой  $L_\varepsilon$  позволяет найти в первом приближении и уравнение оставшегося участка границы зоны  $P_\varepsilon^-$  характеристики  $L_\varepsilon^-$ . В соответствии с оценкой размер зоны  $P^+$  в направлении  $x$  (расстояние между общими точками кривой  $L_\varepsilon$  и характеристикой  $L_\varepsilon^-$ ) имеет порядок  $\varepsilon$ .

**В §2.8.** показано, что это возможно лишь при

$$r_2 = \rho_2^c(0) = -\sigma_{2xx}^e(0, 0) \cdot \left( \frac{\partial \sigma_{0xx}^e(0, 0)}{\partial y} \right)^{-1}.$$

Условия сопряжения не исчерпывают произвол в определении величин  $\rho_2^+$ ,  $A_0$  и  $s_\varepsilon$ . Для их нахождения необходимо использовать условие допустимости напряжений. Поле напряжений  $\sigma_\tau^e(x, y)$  близко к решению ЗС. Поэтому условие допустимости напряжений может нарушаться лишь в окрестности той области, где выходит за поверхность текучести решение ЗС, т.е. вблизи точки  $x = 0, y = 0$ .

**В §2.9.** рассмотрено условие допустимости

$$F(\sigma_\varepsilon^\varepsilon(x, y)) = 0$$

как уравнение относительно  $y$  при фиксированном  $x$ . Кривые  $y(x)$ , соответствующие корням этого уравнения, определяют область, в которой напряжения выходят за поверхность текучести  $F(\sigma_\varepsilon^\varepsilon(x, y)) > 0$ . Одним из корней является  $y_1 = \varepsilon^2 \rho_2^+$ . Показано, что в случае, когда  $x$  не принадлежит малой окрестности нуля, этот корень единственный. При значениях  $x$ , близких к нулю, вторым корнем является

$$y_2 = -\varepsilon^2 \left( a^{-1} \left( b_1 \frac{x^2}{\varepsilon^2} + b_2 \right) + \rho_2^+ \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right).$$

Условие допустимости напряжений в зоне  $E_\varepsilon$  означает, что с ней не пересекается область, в которой  $F(\sigma_\varepsilon^\varepsilon(x, y)) > 0$ . Это эквивалентно условию  $y_2 \leq y_1$ , т. е. неравенству

$$-\rho_2^+ \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - a^{-1} \left( b_1 \frac{x^2}{\varepsilon^2} + b_2 \right) \leq \rho_2^+ \left( \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

**В §2.10.** доказано, что если выполнено условие допустимости напряжений в зоне  $E_\varepsilon$ , то имеет место равенство

$$A_0 = \frac{\partial \sigma_{0xx}}{\partial y}(0, 0).$$

Из условий сопряжения для  $\sigma_3^\varepsilon$  и краевых условий следует, что  $\sigma_3^\varepsilon = 0$  и на границе  $L_\varepsilon$  выполнено  $\rho_3 = 0$ .

Кривая  $L_\varepsilon^+$  определена из соотношения для  $\sigma_{3xx}^\varepsilon$ :

$$\rho_2^+ \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) = \frac{\frac{1}{6} A_0 f_{xxx} \frac{x^2}{\varepsilon^2} + N}{M},$$

где  $M = A'_0 - \frac{\partial^2 \sigma_{0xx}}{\partial x \partial y}$ ,  $N = \frac{\partial \sigma_{2xx}^\varepsilon}{\partial x}(0, 0) + A_0 f_{xr} r_2 + A'_0 r_2$ . Кроме того, из этого соотношения вытекает, что  $r_3 = 0$ .

В качестве примера на рис. 1 показаны результаты расчетов границ пластической зоны — графики функций:

- 1)  $y = \varepsilon^2 \rho_2(x)$  (соответствующий кривой  $L_\varepsilon$ ),
- 2)  $y = \varepsilon^2 \rho_2^- + \varepsilon^3 \rho_3^-$  (соответствующий кривой  $L_\varepsilon^-$ ),
- 3)  $y = \varepsilon^2 \rho_2^+(x)$  (соответствующий кривой  $L_\varepsilon^+$ ),
- 4)  $y = \varepsilon^2 \hat{\rho}_2(x)$  — второй корень уравнения  $F(\sigma_\varepsilon^\varepsilon(x, y)) = 0$ .

Расчеты произведены при  $p_0 = 1,5$ ,  $q_0 = \sqrt{2} + 0,5$ ,  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ .

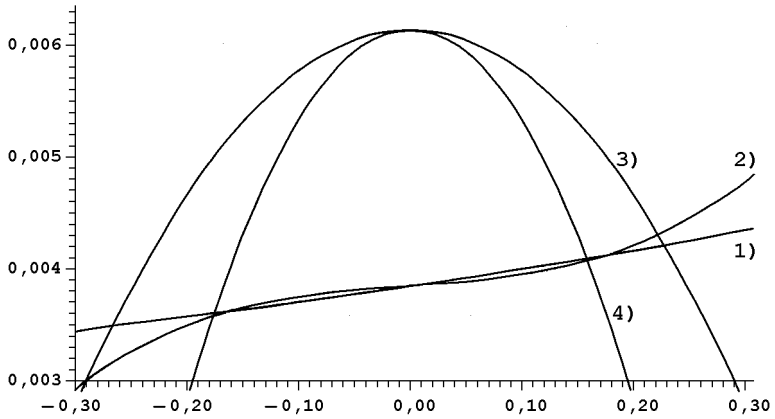


Рис. 1. Пример расчета границы пластической зоны.

Кривая  $L_\varepsilon$  в первом приближении совпадает с эллипсом — контуром сопряжения в решении ЗС при  $\tau = \tau_0(1 + \varepsilon^2)$ . Полная пластическая зона рассматриваемого решения УПЗ в первом приближении получается добавлением к «пластической» зоне решения ЗС части плоскости, внешней границей которой является кривая  $y = \varepsilon^2 \rho_2^+ \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ .

Отметим, что независимо от значений  $p_0$  и  $q_0$  развитие пластической зоны  $P_\varepsilon^+$  начинается из точки, которая лежит на контуре сопряжения  $l_{\tau_0}$ , соответствующем критической нагрузке, и расположенной на луче, образующем угол  $\frac{\pi}{8}$  с направлением оси  $x$ . Развитие таких же зон начинается и из точек, симметричных указанной относительно координатных осей  $x$  и  $y$ .

**В §2.11.** определено поле напряжений в зоне  $P_\varepsilon^+$  в первых двух приближениях.

**В третьей главе** рассмотрена задача об антиплоской деформации пространства с цилиндрическим отверстием.

**В §3.1.** содержится постановка задачи об антиплоской деформации призматического бруса, ослабленного цилиндрической полостью и подверженного на бесконечном удалении от нее сдвигу касательными усилиями  $\tau_\infty$ , параллельными оси  $z$  цилиндра (усилия постоянны по длине бруса и произвольно изменяются по контуру поперечного сечения).

Приведены уравнения статики и кинематики для этой задачи, получающиеся из соответствующих уравнений теории кручения. Приведена постановка задачи в упругой зоне с использованием функции напряжений, а также в пластической зоне.

**В §3.2.** приведено известное аналитическое решение задачи об антиплоской деформации, дано решение упругой задачи. Далее содержится постановка и решение упругопластической задачи.

**В §3.3.** рассмотрена граница пластической зоны в задаче об антиплоской деформации пространства. Показано, что граница пластической зоны касается контура отверстия в точке подхода к нему. Найдены характерные размеры пластической зоны.

**В §3.4.** получено асимптотическое представление точного, но сложного решения для границы пластической зоны в задаче об антиплоской деформации пространства при нагрузке  $\tau_\infty = \tau_\infty^*(1 + \varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon^2 \ll 1$ , где  $\tau_\infty^* = \frac{k}{2}$  — нагрузка, при которой происходит первое достижение предела текучести.

Показано, что асимптотическое представление границы пластической зоны совпадает с первым приближением при построении приближенного решения методом малого параметра, которое получено в §3.5.

**В з а к л ю ч е н и и** приведены основные результаты диссертационной работы:

- В некоторых случаях обнаружен выход напряжений за поверхность текучести при стандартном подходе к решению плоской упругопластической задачи; введено связанное с этим понятие критической нагрузки; найдена критическая нагрузка для задачи Галина; обнаружена связь выхода напряжений за поверхность текучести и касания характеристики с контуром сопряжения.
- Предложена структура пластической зоны в случае закритической нагрузки.
- Предложена модификация метода малого параметра, предназначенная для решения упругопластической задачи при закритической нагрузке (мало отличающейся от критической).
- Этим методом решена задача о пластической зоне вблизи отверстия при закритической нагрузке.
- В качестве примера рассмотрено решение задачи о двухосном нагружении плоскости с круговым отверстием — для закритической нагрузки, когда известное решение Л. А. Галина выходит за поверхность текучести в «упругой» зоне. Получено поле напряжений и граница пластической зоны (два приближения).
- Подробно рассмотрена форма границы пластической зоны и найдены ее характерные размеры в задаче об антиплоской деформации



пространства с цилиндрическим отверстием. Показано, что граница пластической зоны касается контура отверстия в точке их встречи.

- Для точного, но сложного решения для границы пластической зоны в задаче об антиплоской деформации пространства с цилиндрическим отверстием получено асимптотическое представление при наличии малого параметра.
- Методом малого параметра построено решение задачи об антиплоской деформации пространства с цилиндрическим отверстием. Сравнение этого решения с точным подтверждает хорошую работу метода малого параметра в случае, когда пластическая зона не охватывает контур отверстия полностью.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1, 2, 3].

### **Публикации по теме диссертации**

1. Григорьев П. А., Каменярж Я. А., Якушева Е. В. Безопасные нагрузки при растяжении полосы и плоскости с отверстиями // *Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика.* 1990, N 3. 46–51.
2. Каменярж Я. А., Якушева Е. В. О развитии пластической зоны вблизи отверстия. *ПММ.* 1993, Т. 57, Вып. 1, 157–171.
3. Якушева Е. В. Метод малого параметра в некоторых плоских упругопластических задачах. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18-28 апреля 2006, Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, с. 155-156.

Формат  $60 \times 90$  1/16  
Заказ

Объем 2,0 п.л.  
Тираж 100 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ  
119992, г. Москва, Ленинские горы, МГУ

Лицензия на издательскую деятельность ИД N 04059 от 20.02.2001 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ и Франко-русского центра имени А. М. Ляпунова