МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.3

ГИЯСИ АЗАР ХОДАБАХШ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

МОСКВА
2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.Н.Чубариков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор М.П.Минеев

кандидат физико-математических наук, доцент Л.П.Постникова

Ведущая организация: Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н.Толстого

Защита диссертации состоится 12 октября 2007 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 28 сентября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

В.Н. Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важнейшим вопросом аналитической теории чисел является исследование аддитивной и мультипликативной структур множества натуральных чисел. Основным инструментом для получения результатов в этой области служит теория функций натурального аргумента или теория теоретико-числовых (арифметических) функций.

Мощным методом решения задач теории распределения значений функций вещественной переменной является метод тригонометрических сумм вида

$$S_t = \sum_{(x_1,\ldots,x_r)\in\Omega} f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{(x_1,\ldots,x_r)\in\Omega} e^{2\pi i t F(x_1,\ldots,x_r)},$$

где наборы $(x_1,\ldots,x_r)$ пробегают значения из дискретного множества Ω, t — вещественный параметр и $F(x_1,\ldots,x_r)$ — вещественнозначная функция.

И.М. Виноградову принадлежат первые постановки задач о распределении значений коротких сумм арифметических функций и их решении с помощью метода тригонометрических сумм.

Комплекснозначная функция $f(n)$ натурального аргумента n называется теоретико-числовой (или арифметической). Если для любых взаимно простых чисел m и n справедливо равенство

$$f(m)f(n) = f(mn), \tag{1}$$

то функция $f(n)$ называется мультипликативной функцией. Если равенство (1) выполняется всегда, то функция называется вполне мультипликативной.

Например, мультипликативной функцией является функция $\tau(n)$ — количество делителей числа n. Для любого натурального числа n имеем $\tau(n)\geq 2$. С другой стороны, известно предельное соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\tau(n)\ln\ln n}{\ln n} = \ln 2.$$

Важной задачей теории арифметических функций является задача нахождения асимптотики их средних значений. Например, для функции $\tau(n)$ при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая формула вида

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\tau(n) \sim \ln x + 2\gamma - 1,$$

где $\gamma = 0,577215664901532\ldots$ — постоянная Эйлера.

Тесным образом с рассмотренной выше функцией числа делителей связана функция $\sigma(n)$ — сумма всех делителей числа n, которая также является мультипликативной функцией. Для нее имеют место аналогичные соотношения

$$\sigma(n) \ge n+1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sigma(n)}{n\ln\ln n} = e^{\gamma}, \quad \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\sigma(n) \sim \frac{\pi^2}{12}x.$$

Родственной с функцией сумма делителей числа является функция Эйлера $\varphi(n)$, представляющая собой количество натуральных чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n. Она имеет вид

$$\varphi(n) = \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Для нее справедливы соотношения, подобные приведенным выше

$$\varphi(n) \le n-1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\varphi(n)\ln\ln n}{n} = e^{-\gamma}, \quad \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\varphi(x) \sim \frac{3}{\pi^2}x.$$

Другим широким классом являются арифметические функции $f(n)$, которые называются аддитивными функциями, если для любых взаимно простых чисел m и n выполняются равенства

$$f(m) + f(n) = f(mn). \qquad (2)$$

Если равенство (2) выполняется всегда, то функция $f(n)$ называется вполне аддитивной.

Первым примером аддитивной функции является функция $\omega(n)$ — количество различных простых делителей числа n. Здесь также имеют место соотношения, подобные приведенным выше

$$\omega(n) \ge 1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\omega(n)\ln\ln n}{\ln n} = 1, \quad \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n) \sim \ln\ln x.$$

В 1917 г. Г.Харди и С.Рамануджан доказали, что для любой положительной неограниченно возрастающей при $n \to \infty$ функции $\psi(n)$ частота

$$\nu_n\{m \le n : |\omega(m) - \ln\ln n| \le \psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\},$$

стремится к единице при $n \to \infty$, т.е. для функции $\omega(n)$ справедлив "закон больших чисел".

Известно, что для любого фиксированного натурального числа k при $n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\nu_n\{m \le n : \omega(m) = k\} \sim \frac{(\ln\ln n)^{k-1}}{(k-1)!\ln n}.$$

Последнее соотношение показывает, что функция $\omega(n)$ распределена приблизительно по закону Пуассона с параметром $\ln\ln n$.

Более того, для функции $\omega(n)$ имеет место "центральная предельная теорема". Для любого фиксированного x при $n \to \infty$ справедливо предельное соотношение

$$\nu_n\left\{m \le n : \frac{\omega(m) - \ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < x\right\} \to G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Отметим еще один интересный результат. В 1947 г. В.Левек получил "центральную предельную теорему" для распределения значений разностей $\omega(m) - \omega(m+1)$. Его результат звучит так. При фиксированном значении x и при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\nu_n\left\{m \le n : \frac{\omega(m) - \omega(m+1)}{\sqrt{2\ln\ln n}} < x\right\} \to G(x).$$

В настоящей диссертации мы уделяем особое внимание периодическим арифметическим функциям. Безусловно первым вопросом здесь является исследование среднего значения таких функций на периоде. Например, периодической арифметической функцией является являются символы Лежандра по простому модулю, характеризующие квадратичные вычеты и квадратичные невычеты по этому модулю. К.Ф. Гаусс доказал, что квадратичных вычетов и квадратичных невычетов на периоде поровну, т.е. сумма символов Лежандра на периоде равна нулю.

И.М. Виноградову[1] [2] принадлежат первые задачи по распределению значений периодических арифметических функций на коротких промежутках, т.е. на промежутках, длина которых меньше длины периода. Наиболее известной здесь является проблема оценки сверху величины наименьшего квадратичного невычета по простому модулю. В данной работе методом И.М. Виноградова[3] [4] мы вычисляем константы в неравенствах для средних значений арифметических функций на коротких промежутках. Кроме того, мы находим соответствующие разложения этих функций в ряд Фурье.

Г. Давенпорт и П. Эрдёш[5] поставили и решили первую задачу о распределении квадратичных вычетов и квадратичных невычетов по простому модулю на очень коротком промежутке. Здесь мы в подобной задаче для кратных очень коротких сумм Гаусса получаем асимптотики их моментов.

Цель работы. Улучшение констант в неравенствах для некоторых неполных сумм от периодических функций. Получение закона распределения остатков в разложении вещественного числа в системах счисления с не целыми основаниями (обобщение проблемы А.О.Гельфонда)[6]

Методы исследования. В работе использованы метод И.М. Виноградова, метод А.О. Гельфонда, теория рядов Фурье

[1] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. 9-е изд. — М.: Наука, 1981.

[2] *Виноградов И. М.* Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука,1976.

[3] *Виноградов И.М.* Sur la distribution des residues et des nonresidues des puissances//Журнал физ.-матем. об-ва Пермского государственного ун-та. 1918, **1**, 94–98.

[4] *Виноградов И.М.* О распределении квадратичных вычетов и невычетов//Журнал физ.-матем. об-ва Пермского государственного ун-та. 1919, **2**, 1–16.

[5] *Davenport H., Erdös P.* The distribution of quadratic and higher residues.//Publ. Math., Debrecen. 1952, **2,** №3–4, 252–265.

[6] *Гельфонд А.О.* Об одном общем свойстве систем счисления.//Изв. АН СССР, сер. матем. 1959, **23,** No. 6, 809–814.

и комплексного анализа.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены разложения в сходящиеся ряды Фурье некоторых неполных сумм периодических арифметических функций.

2. Найдены константы в оценках ряда неполных сумм периодических арифметических функций.

3. Найден закон распределения остатков при разложении вещественного числа в системах счисления с не целыми основаниями, обобщающий соответствующее утверждение А.О. Гельфонда.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на специальных семинарах по аналитической теории чисел в МГУ под руководством Г.И. Архипова, В.Н. Чубарикова (2005–2007 гг.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в трех работах автора. Их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Текст изложен на 66 страницах. Список литературы содержит 51 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Сформулируем основные результаты диссертации.

Теорема 1.2.2. *Пусть*

$$S(x) = \sum_{m\le x} \left(\frac{m+a_1}{p_1}\right)\dots\left(\frac{m+a_k}{p_k}\right),$$

где $k \ge 1$ *— натуральное число,* $p_1,\dots,p_r$ *— простые числа,* $Q = p_1\dots p_r$, $Q \ge x \ge 1$ *— вещественное число, и* $a_1,\dots,a_r$ *— целые числа.*

Пусть, далее, $S_0(x) = \frac{S(x+0)+S(x-0)}{2}$ *периодическая функция с периодом, равным* Q.

Тогда функция $S_0(x)$ *разлагается в сходящийся ряд Фурье вида*

$$S_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i \frac{nx}{Q}},$$

где коэффициенты Фурье c_n *имеют вид*

$$c_0 = \sum_{n=1}^{Q} \left(1 - \frac{n}{Q}\right) \left(\frac{n+a_1}{p_1}\right) \dots \left(\frac{n+a_k}{p_k}\right),$$

а при $n \neq 0$ *имеем*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i n} \sum_{m=1}^{Q} \left(\frac{m+a_1}{p_1}\right) \dots \left(\frac{m+a_k}{p_k}\right) e^{-2\pi i \frac{mn}{Q}}.$$

Кроме того, при $n \neq 0$ *справедливо неравенство*

$$|c_n| \leq \frac{\sqrt{Q}}{2\pi n}.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* N *— натуральное число,*

$$T = T(a_1, \dots, a_k) = \max_{Q \geq N \geq 1} |S(N)|,$$

где $S(N)$ *обозначает сумму*

$$S(N) = \sum_{m \leq N} \left(\frac{m+a_1}{p_1}\right) \dots \left(\frac{m+a_k}{p_k}\right),$$

причем $a_1, \dots, a_k$ *— некоторые целые числа, а* $p_1, \dots, p_k$ *— различные нечетные простые числа,* $Q = p_1 \dots p_k$.

Тогда имеет место следующее неравенство

$$T \leq \frac{2\sqrt{Q}}{\pi^2} \log Q(1 + o(1)).$$

Теорема 1.3.1. *Пусть N — нечетное число, x — целое число, $1 \le x \le N$, и пусть*

$$G(x) = \sum_{m \le x} e^{2\pi i \frac{m^2}{N}}$$

неполная сумма Гаусса. Тогда справедливо неравенство

$$|G(x)| \le \frac{1}{\pi^2}\sqrt{N}\log N.$$

Теорема 1.3.2. *Пусть N — нечетное число, x — целое число, $1 \le x \le N$, и пусть*

$$G(x) = \sum_{m \le x} e^{2\pi i \frac{m^2}{N}}$$

неполная сумма Гаусса, и пусть

$$G_0(x) = \frac{G(x+0) + G(x-0)}{2},\ 0 \le x \le N,$$

периодическая функция с периодом N.

Тогда имеет место следующее разложение $G_0(x)$ в сходящийся ряд Фурье

$$G_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{2\pi i \frac{nx}{N}},$$

где коэффициенты Фурье g_n имеют вид

$$g_n = \frac{1}{N}\int\limits_0^N G_0(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{N}}\, dx.$$

Более точно, имеем

$$g_0 = \sum_{m \le N}\left(1 - \frac{m}{N}\right) e^{2\pi i \frac{m^2}{N}},$$

$$g_{2n} = \frac{G}{4\pi i n} e^{-2\pi i \frac{n^2}{N}}, n \ne 0;$$

$$g_{2n+1} = \frac{H}{2\pi i(2n+1)} e^{-2\pi i \frac{(2n+1)^2}{4N}},$$

причем

$$G = \sum_{m=1}^{N} e^{\frac{2\pi i}{N} m^2}, H = \sum_{m=1}^{N} e^{\frac{2\pi i}{N}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Теорема 1.3.3. *Пусть N — нечетное число, и пусть*

$$H = \sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i \frac{(m-\frac{1}{2})^2}{N}}$$

обобщенная сумма Гаусса. Тогда справедливо равенство

$$H = \frac{1-i^{-N}}{1+i^{-1}} \sqrt{N}.$$

Теорема 1.3.4. *Пусть p — нечетное простое число, и пусть символ $\tau(x)$ обозначает неполную сумму Гаусса вида*

$$\tau(x) = \sum_{m \le x} \left(\frac{m}{p}\right) e^{2\pi i \frac{m}{p}}, \tau(p) = G(p) = \eta\sqrt{p},$$

где $\eta = 1$, если $p \equiv 1 \pmod 4$, и $\eta = i$, если $p \equiv 3 \pmod 4$.

Пусть, далее, $\tau_0(x) = \frac{\tau(x+0)+\tau(x-0)}{2}$ периодическая функция с периодом p. Тогда она разлагается в сходящийся ряд Фурье вида

$$\tau_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n e^{2\pi i \frac{nx}{p}},\ t_n = \frac{1}{p}\int_0^p \tau_0(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{p}}\, dx,$$

где коэффициент t_0 равен

$$t_0 = \frac{1}{p}\int_0^p \tau_0(x)\, dx = \sum_{n \le p-1} \left(1 - \frac{n}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right) e^{2\pi i \frac{n}{p}}.$$

Далее при $n \ne 0$ имеем

$$t_n = \frac{1}{2\pi i n}\left(\left(\frac{1-n}{p}\right) - 1\right)\tau(p).$$

Теорема 1.3.5. *Пусть p — нечетное простое число, и пусть символ $\tau(p^2)$ обозначает сумму Гаусса с характером Дирихле $\chi(r) = \chi(r; m, p^2)$ по модулю p^2*

$$\tau(p^2) = \sum_{r=1}^{p^2} \chi(r) e^{2\pi i \frac{r}{p^2}}.$$

Пусть, также, при $0 \le x \le p^2$ символ $\tau(x)$ обозначает неполную сумму Гаусса вида

$$\tau(x) = \sum_{m \le x} \chi(m) e^{2\pi i \frac{m}{p^2}}.$$

Пусть, далее, $\tau_0(x) = \frac{\tau(x+0)+\tau(x-0)}{2}$ периодическая функция с периодом p^2. Тогда она разлагается в сходящийся ряд Фурье вида

$$\tau_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n e^{2\pi i \frac{nx}{p}},\ t_n = \frac{1}{p} \int_0^p \tau_0(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{p}}\, dx,$$

где коэффициент t_0 равен

$$t_0 = \frac{1}{p^2} \int_0^{p^2} \tau_0(x)\, dx = \sum_{n \le p^2} \left(1 - \frac{n}{p^2}\right) \chi(n) e^{2\pi i \frac{n}{p^2}}.$$

Далее при $n \ne 0$ имеем

$$t_n = \frac{1}{2\pi i n} \left(\chi(1-n) - 1\right) \tau(p^2).$$

Во второй главе мы находим закон распределения значений остатков при разложении чисел из единичного отрезка в специальной системе счисления.

Пусть задана последовательность вещественных чисел θ_n, $n = 1, 2, \ldots$, больших единицы. Тогда любое вещественное число α, $0 < \alpha \le 1$, представляется в следующем виде

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\theta_1 \ldots \theta_k} + \frac{x_{k+1}}{\theta_1 \ldots \theta_k},$$

где последовательность x_n остаточных членов определяется рекуррентными равенствами

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \{\theta_1 x_1\}, \dots x_{n+1} = \{\theta_n x_n\}, \dots,$$

и последовательность целых чисел λ_n определяется так

$$\lambda_1 = [\theta_1 x_1], \dots, \lambda_n = [\theta_n x_n], \dots,$$

символы $\{\alpha\}, [\alpha]$ обозначают дробную и целую части числа α соответственно.

Здесь мы находим распределение средних значений последовательности остаточных членов $x_n = x_n(\alpha)$. Для этого мы определяем для любого вещественного числа $t \in [0, 1]$ периодическую функцию $\chi_t(x)$ с периодом 1,

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 < x < t, \\ 1/2, & \text{если} \quad x = 0, t, \\ 0, & \text{если} \quad t < x < 1. \end{cases}$$

Тогда сумма

$$S_N(\alpha; t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_t(x_n),\ N \geq 1,$$

представляет собой среднее значение последовательности остаточных членов $x_n = x_n(\alpha)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть по крайней мере одно из чисел* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots,$ *будет нецелым числом и* $\theta = \inf\{\theta_1, \dots, \theta_n, \dots\} > 2$. *Тогда для почти всех чисел* α *имеет место следующее предельное равенство*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\alpha; t) = \sigma(t),$$

где

$$\sigma(t) = \frac{1}{\tau}\left(t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\min(t, t_k)}{\theta_1 \dots \theta_{k-1}}\right).$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность научному руководителю, профессору В.Н. Чубарикову за постановку задач и большую помощь в работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Ghyasi A.K. A Generalisation of the Gel'fond Theorem Concerning Number Systems. — Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14,** №3, 370.

[2] Гияси А.Х. О константах в неравенствах для средних значений некоторых периодических арифметических функций. — Вестник МГУ. Сер.1, мат. и мех. 2007 (в печати).

[3] Гияси А.Х., Чубариков В.Н. Об остаточном члене в формуле суммирования Л.Д. Морделла — Вестник МГУ. Сер.1, мат. и мех. 2005, №1, 66–68. Постановка задачи в этой работе принадлежит В.Н. Чубарикову, доказательство теоремы выполнено А.Х. Гияси.