Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.76

Зак Николай Федорович

# Рациональность и унирациональность многообразий Фано над незамкнутыми полями

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена в отделе теории чисел Математического Института имени В. А. Стеклова РАН.

**Научные руководители:**
доктор физико-математических наук, профессор Василий Алексеевич Исковских;
доктор физико-математических наук, профессор Юрий Геннадьевич Прохоров.

**Официальные оппоненты:**
доктор физико-математических наук, профессор Михаил Анатольевич Цфасман;
кандидат физико-математических наук, Дмитрий Александрович Степанов.

**Ведущая организация:**
Владимирский государственный университет.

Защита диссертации состоится 9 ноября 2007 г. в $16^{\underline{40}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08 (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 октября 20

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Простейшими алгебраическими многообразиями являются проективные пространства $\mathbb{P}^n$, а их ближайшими родственниками — рациональные и унирациональные многообразия. Многообразие *унирационально* над полем, если оно содержит открытое плотное подмножество, параметризуемое открытым подмножеством проективного пространства над этим полем, и *рационально*, если существует взаимно однозначная параметризация такого вида. Ввиду простоты определения и богатства внутренней геометрии, рациональные и унирациональные многообразия всегда были в центре внимания алгебраических геометров и доставляли интересные примеры во многих областях математики. В то же время, вопрос определения рациональности и унирациональности данного алгебраического многообразия, которому посвящена настоящая диссертация, все еще является очень мало изученным.

Уже в 19 веке было известно, что всякое бирациональное отображение между (полными) неособыми кривыми продолжается до изоморфизма, поэтому алгебраическая кривая является рациональной (унирациональной) над алгебраически замкнутым полем тогда и только тогда, когда ее нормализация изоморфна проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Если же основное поле $\mathrm{k}$ не является алгебраически замкнутым, то гладкая кривая рациональна (унирациональна) над этим полем тогда и только тогда, когда на ней есть точка и она рациональна над алгебраическим замыканием поля $\mathrm{k}$. Действительно, антиканоническое вложение отображает такую кривую в плоскую конику с точкой, проекция из которой обеспечивает искомую параметризацию.

Из критерия рациональности Кастельнуово следует, что над алгебраически замкнутым полем классы рациональных и унирациональных поверхностей совпадают между собой. Классификация гладких рациональных поверхностей над алгебраически замкнутым полем получена в классических работах итальянских геометров начала 20 века: все они изоморфны раздутиям проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ или рациональных линейчатых поверхностей $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$, $n \geqslant 0$, $n \neq 1$. С современной точки зрения, согласно программе минимальных моделей, всякое гладкое алгебраическое многообразие бирационально изоморфно либо минимальной модели, либо расслоению Мори[1], слоем которого является *многообразие Фано*, то есть многообразие с обильным антиканоническим дивизором $-K_X$. Проективная плоскость и поверхности $\mathbb{F}_n$ являются расслоениями Мори на двумерное и одномерные многообразия Фано, соответственно. Минимальные модели рациональных поверхностей над совершенными полями были классифицированы В. А Исковских[2]. В отличие от случая кривых, неизвестно, является ли условие наличия k-точки достаточным для k-унирациональности гладкой унирациональной поверхности. Гипотетическим контрпримером считается поверхность Дель Пеццо степени один, имеющая точку над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Рациональность над k форм проективной плоскости, равно как и форм произвольных проективных пространств $\mathbb{P}^n$ хорошо известна при условии наличия точки (теорема Севери–Брауэра).

Бирациональная геометрия трехмерных многообразий гораздо богаче бирациональной геометрии поверхностей. В частности для них перестает выполняться утверждение теоремы Люрота. В работе Исковских и Манина[3] методом максимальных особенностей доказывается, что гладкая трехмерная гиперповерхность четвертой степени не является рациональной, в то время как еще Б. Сегре[4] привел примеры гладких унирациональных квартик. Прак-

[1] См. [Mat1] *K. Matsuki* Introduction to the Mori program, Springer, 2002, 478 pp.

[2] [Isk1] *Исковских В. А.* Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия академии наук, серия математическая, 1979, том 43, No. 1, 19–43

[3] [ИМ] *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Мат. Сборник, 1971, том 86, No. 1, 140–166.

[4] [Seg] *B. Segre* Variazione continua ed omotopia in geometria algebrica // Ann. mat. pura ed appl., Ser. IV, **L**, 1960, 149-186.

тически в то же время Клеменс и Гриффитс[5] методом промежуточного якобиана доказали нерациональность гладкой трехмерной кубики (унирациональность кубик над произвольными полями при условии наличия точки хорошо известна[6]). Другие примеры унирациональных, но не рациональных трехмерных многообразий приводятся в работе Артина и Мамфорда[7].

С развитием метода максимальных особенностей были получены многочисленные примеры нерациональных многообразий Фано[8] и, в частности, гиперповерхностей степени $N$ в $\mathbb{P}^N$, $N > 3$, а также различных многомерных полных пересечений[9]. Тем не менее, до сих пор не известно, является ли рациональной общая многомерная кубика. До недавнего времени примеры рациональных кубик в $\mathbb{P}^N$, $N > 3$ были известны лишь для нечетных $N$. В 2006 году М. Мелла[10] привел примеры рациональных кубик в $\mathbb{P}^N$ для всех $N > 7$.

В случае с унирациональностью ситуация еще более сложная. До сих пор неизвестно ни одного примера неунирационального многообразия Фано. В частности, неизвестно, существует ли неунирациональная гладкая трехмерная квартика. Все известные нам примеры гладких унирациональных многообразий, не являющихся унирациональными над алгебраически незамкнутым полем k, доставляют многообразия, не имеющие k-точек[11].

---

[5][CG] *H. Clemens, P. Griffiths* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Annals of Mathematics **95**, 1972, 73–100.

[6][Kol1] *J. Kollár* Unirationality of cubic hypersurfaces, preprint, alg-geom/0005146.

[7][AM] *M. Artin, D. Mumford* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. **25**, 1972, 75–95.

[8]См. [Isk2] *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // в сб. “Итоги науки и техники: современные проблемы математики”, т. 12, М.: ВИНИТИ, 1979., 159–236,

[IPu] *Исковских В. А., Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы многомерных алгебраических многообразий // в сб. “Итоги науки и техники: современные проблемы математики”, т. 19, М.: ВИНИТИ, Москва 2001., 5–139.

[9]См. [Pu] *Pukhlikov A.* Birationally rigid Fano complete intersections // J. Reine Angew. Math., 2001, No. 541., 55–79.

[10][Mel] *Mella M.* Rational cubic hypersurfaces, unpublished.

[11]См. [HT] *J. Harris, Yu. Tschinkel* Rational points on quartics // Duke Math. Journal, **104**, 2000, 477-500,

[MT] *Ю. И. Манин, М. А. Цфасман* Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, В работе [HMP][12] доказывается унирациональность произвольных гладких гиперповерхностей $H_d \subset \mathbb{P}^n$ степени $d$ для достаточно большого $n$. Поскольку соответствующие оценки на число $n$ далеки от оптимальных, представляет интерес разработка других способов доказательства унирациональности гиперповерхностей. Метод, используемый в [HMP], был впервые предложен У. Морином[13], использовавшим его для доказательства унирациональности общей гиперповерхности $H_d \subset \mathbb{P}^n$ степени $d$ для достаточно большого $n$. Этот метод состоит в нахождении линейного пространства $L^m \subset H_d$ некоторой положительной размерности $m$ и рассмотрении семейства гиперповерхностей $H_{d-1} \subset L^{m+1}$, полученных пересечением всевозможных подпространств $L^{m+1} \supset L^m$ с $H_d$.

В нескольких работах М. Маркизио[14] развивается другой метод доказательства унирациональности квартик, предложенный Б. Сегре в [Seg]. Этот метод использует существование рациональной кривой на многообразии Фано прямых на квартике.

## Цель работы

Цель работы — исследование рациональности и унирациональности форм многомерных многообразий Фано (в частности, форм многомерных квартик, многообразий Сегре и трехмерных многообразий Фано) над алгебраически незамкнутыми полями.

## Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 71 странице и состоит из пяти глав. Библиография включает 47 наименований.

арифметика // Успехи Математических Наук, 1986, т. 41, вып. 2(248), 43–94.

[12][HMP] *J. Harris, B. Mazur, R. Pandharipande* Hypersurfaces of Low Degree // Duke Math. Journal, **95**, 1998, 125-160.

[13][Mor] *U. Morin* Sull'unirationalità dell'ipersurficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta // Atti Secondo Congresso Un. Mat. Ital., Bologna, 1940, Edizioni Cremorense, Rome, 1942, 298-302.

[14]См. [Mar] *M. Marchisio* The unirationality of some quartic 4-folds // Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **136** (2003), 17-22.

## Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем (поле k предполагается произвольным полем характеристики нуль):

1. Всякая k-форма многообразия Сегре
$$S = \mathbb{P}^{a_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{a_n}$$
имеющая k-точку, рациональна над k.

2. Всякая k-форма неособого гиперплоского сечения многообразия Сегре $S = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$, имеющая k-точку, рациональна над k.

3. Для всякого $n \geqslant 8$ существует неособая унирациональная над $\mathbb{R}$ гиперповерхность $H_4 \subset \mathbb{P}^n$ степени четыре, не содержащая определенных над $\mathbb{R}$ прямых.

4. Пусть $X$ — k-форма гладкого трехмерного многообразия Фано $F$. Тогда $X$ k-рациональна при условии наличия k-точки, если $F$ не является одним из следующих многообразий:

   (a) Полное пересечение двух квадрик $V_4 \subset \mathbb{P}^5$, а также его раздутия, являющиеся многообразиями Фано, за исключением раздутия с центром в прямой. Формы $X$ многообразия $V_4$ и его раздутий, являющихся многообразиями Фано, k-унирациональны при условии наличия k-точки[15].

   (b) Многообразия $V_{12}, V_{18}$ и $V_{16}$. Формы многообразий $V_{12}$ и $V_{18}$ рациональны над k при условии, что k-точки на них всюду плотны. Это условие выполняется, в частности, для полей класса $C_1$ при условии наличия k-точки.

   (c) Двойное накрытие $F \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с ветвлением в дивизоре бистепени (2,2) и его раздутие в неособом слое проекции $F \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Формы этих многообразий квазиунирациональны.

[15] И, скорее всего, не всегда квазитривиальны.

(d) Произведения $\Sigma_d = \mathbb{P}^1 \times S_d$, где $S_d$ — поверхность Дель Пеццо степени $d < 5$. При $d > 2$ формы таких многообразий квазиунирациональны.

## Основные методы исследования

В диссертации используются методы проективной и бирациональной алгебраической геометрии (в частности, программы минимальных моделей[16]) и арифметики алгебраических многообразий[17]. Кроме того, используется классификация трехмерных многообразий Фано[18] и экстремальных стягиваний на этих многообразиях[19].

## Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для теории унирациональности многообразий Фано и арифметики алгебраических многообразий.

## Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Семинар "Геометрия алгебраических многообразий" под руководством В.А.Исковских и Ю.Г.Прохорова в МГУ (2006 и 2007).

2. Семинар по алгебраической геометрии в МИАН им. В.А Стеклова (2007).

[16] См. [Mat1] и [Tak] *Takeuchi K.* Some birational maps of Fano 3–folds // Compos. Math., 1989, No. 71, 265–284.

[17] См. [MT] и [EGA] *A. Grothendieck, J. Dieudonne Eléments de Géométrie Algébrique* // Publ. Math. IHES, 8 (1961), 11 (1961).

[18] См. [IP] *V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov* Fano varieties, Springer-Verlag, New York 1999.

[19] См. [Mat2] *K. Matsuki* Weyl Groups and Birational Transformations among Minimal Models // Memoirs of the American Mathematical Society, v. 116, N.557, 1995.

### Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации опубликовано в работах, список которых приведен в конце автореферата [1-3].

## Краткое содержание работы

Диссертация состоит из пяти глав.

Первая глава — **введение**. В ней обсуждается история вопроса, дается обзор ранее известных результатов и формулируются основные утверждения, доказанные в диссертации.

**В главе 2** приведены необходимые определения и известные вспомогательные утверждения. В частности, в разделе 2.2 вводятся и обсуждаются понятия k-рациональности, k-унирациональности, квазитривиальности и квазиунирациональности форм алгебраических многообразий над алгебраически незамкнутым полем k. Кроме того, в этом разделе формулируется утверждение 2.2.1, позволяющее при доказательстве квазитривиальности форм многообразий Фано оперировать со стандартными вложениями в проективное пространство. В разделе 2.3 приводится классификация трехмерных гладких многообразий Фано, рациональность которых известна, а также даются необходимые сведения из программы минимальных моделей, в частности, конструкция элементарного рационального преобразования многообразий Фано.

Утверждения главы 2 не доказываются, но снабжаются ссылками на источники.

**В главе 3** доказывается квазитривиальность форм многообразий Сегре $S = \mathbb{P}^{a_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{a_n}$ и некоторых гиперплоских сечений соответствующих вложений Сегре. В частности, в разделе 3.1 строится бирациональная проекция $\pi_L : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{\sum a_i}$ вложенного по Сегре многообразия $S$ на проективное пространство с центром в подпространстве $L$, а в разделе 3.2 строится Галуа-инвариантный центр проекции $L$. В разделе 3.3 доказывается квазитривиальность форм неособых гиперплоских сечений многообразий Сегре $S = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$ и

$S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

**В главе 4** предлагается метод доказательства унирациональности многомерных квартик, который, в отличие от ранее известных методов, не использует лежащих на них линейных подпространств. В частности, приводится пример $\mathbb{R}$-унирациональной квартики, не содержащей вещественных прямых. Данная глава имеет следующую структуру. В разделе 4.1 доказывается предложение 4.1.2, дающее достаточное условие k-унирациональности полных пересечений квадрики и кубики. В разделе 4.2 с помощью бирациональной перестройки в пересечение квадрики и кубики с нужными свойствами, мы доказываем предложение 4.2.1 об унирациональности над k общих особых четырехмерных квартик, содержащих k-рациональную трехмерную квадрику с кратностью два. В разделе 4.3 доказывается предложение 4.3.1 о k-унирациональности общих многомерных квартик, содержащих k-рациональную трехмерную квадрику с кратностью два. В разделе 4.4 доказывается существование вещественных квартик, удовлетворяющих условию предложения 4.3.1 и не содержащих прямых, что завершает доказательство основной теоремы 4.0.1 о существовании $\mathbb{R}$-унирациональных вещественных квартик, не содержащих вещественных прямых.

**В главе 5** исследуются вопросы квазитривиальности и квазиунирациональности форм трехмерных рациональных многообразий Фано. В частности, в разделе 5.1 изучаются формы многообразий Фано первого рода. Среди этих многообразий наиболее сложными с точки зрения вопроса k-рациональности являются формы полного пересечения двух квадрик $V_4 \subset \mathbb{P}^5$. Мы показываем, что из квазитривиальности таких форм над функциональными полями следует рациональность общих неприводимых $n$-мерных кубик, содержащих плоскость, что гипотетически не должно иметь место. В разделе 5.2 изучаются формы многообразий Фано, являющихся расслоениями на коники. Для всех многообразий этого типа, за исключением форм двойного накрытия $F \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с ветвлением в дивизоре бистепени $(2, 2)$, удается установить их квазитривиальность. В разделе 5.3 изучаются формы произведений двумерных и одномерных многообразий Фано. Здесь препятствием для квазитривиальности является неквазитривиальность форм некоторых поверхностей Дель Пеццо. В разделе 5.4 изучаются формы многообразий Фано, являющихся раздутиями других многообразий Фано. Для подавляющего большинства таких многообразий удается установить их квазитривиальность. Итогом главы является теорема 5.4.1, в которой доказывается квазитривиальность форм большинства рациональных трехмерных многообразий Фано. Кроме того, теорема 5.4.1 дает квазиунирациональность большинства форм, квазитривиальность которых установить не удалось.

### Благодарности

Я благодарю своих научных руководителей д. ф.-м. н. профессора В. А. Исковских за постоянное внимание к моей работе и д. ф.-м. н. профессора Ю. Г. Прохорова за постановку задачи и многочисленные полезные советы, к. ф.-м. н К. А. Шрамова за многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации, а также аспирантов С. С. Галкина и С. О. Горчинского за полезные обсуждения.

## Список литературы


[1] *Зак Н. Ф.* Квазитривиальность форм многообразий Сегре // Успехи мат. наук, 2007, т. 62, No. 5, 153-154.

[2] *Зак Н. Ф.* К вопросу унирациональности квартик над незамкнутыми полями // Депонировано в ВИНИТИ 28.09.07, No. 937-В2007, 9 страниц.

[3] *Зак Н. Ф.* О квазитривиальности форм трехмерных многообразий Фано // Депонировано в ВИНИТИ, 28.09.07, No. 936-В2007, 29 страниц.