На правах рукописи
УДК 511.335

Колпакова Ольга Викторовна

О средних значениях арифметических функций

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2006

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Н. М. Добровольский
	кандидат физико-математических наук, доцент О. В. Тырина
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 17 ноября 2006 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП–2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 октября 2006 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор В. Н. Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Настоящая диссертация является исследованием в области аналитической теории чисел. Основным предметом исследований, составляющих ее содержание, является многомерная проблема делителей Дирихле. Проблемой делителей называют задачу об исследовании асимптотического поведения среднего значения функции делителей Дирихле, распространенных на множества натуральных чисел, имеющих различную природу. Поясним, что функцией делителей $\tau_k(n)$ называется количество представлений натурального n в виде $n = x_1 \dots x_k$, где $x_1, \dots, x_k$ — натуральные числа. Данная задача допускает многочисленные арифметические и геометрические интерпретации. В частности, полученная самим Дирихле асимптотика для среднего значения числа делителей натурального аргумента одновременно является и асимптотикой для количества целых точек под гиперболой.

Проблема делителей Дирихле берет свое начало с классической работы Л. Дирихле [1] 1849 г., посвященной выводу асимптотической формулы для количества целых точек под гиперболой.

Современная постановка проблемы делителей включает в себя много различных аспектов, наиболее важным из которых является задача получения новых оценок остаточного члена $\Delta_k(x)$ в асимптотической формуле для сумматорной функции делителей вида

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x).$$

Здесь предполагается, что $x \to \infty$, и функция $P_{k-1}(y)$ представляет собой некоторый многочлен с вещественными коэффициентами степени $k-1$ от аргумента $y = \ln x$.

Верхней оценкой остатка $\Delta_k(x)$ при различных значениях величины k занимались многие известные математики. Кроме упомянутой выше работы Л. Дирихле 1849 г., в которой получена оценка вида

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

можно указать на работы Г. Ф. Вороного [2], Е. Ландау [3],Х.-Е. Рихерта [4],

[1] *Dirichlet L.* Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie// Abh. Akad. Berlin (Werke, 2, 49-66). (1849), 69-83.

[2] *Вороной Г. Ф.* Sur un probleme du calcul des fonctions asymptotiques, Für die reine und angewandte math. 126 (1903), 241-282.

[3] *Landau E.* Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen// Göttingen Nachrichten (1912), 687-771.

[4] *Richert H. - E.* Einfuhrung in die Theorie der starken Rieszchen Summierbarkeit von Dirichletreihen// Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Math. Physik) (1960), 17-75.

Ж. ван дер Корпута [5], Г. Харди и Ж. Литтвуда [6], А. А. Карацубы [7, 8], также на работы А. Ивича [9] и А. Ивича и М. Квелета [10]. Отдельно отметим результаты, полученные Е. Е. Баядиловым в работе [11], некоторые из которых улучшаются в данной диссертации.

Подчеркнем, однако, что интенсивные исследования, проводимые на протяжении многих лет и отраженные в указанных выше работах, в настоящий момент еще далеки от окончательного решения проблемы, которое предполагает получение наилучшей верхней оценки остаточного члена в асимптотической формуле, то есть получение оценки типа

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$ соответствующей Ω — теореме Г. Харди [12] для величины $\Delta_k(x)$, утверждающей, что верхняя оценка типа

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\varepsilon}$$

уже не имеет место.

Также к проблеме делителей относят еще целый класс задач, состоящий в нахождении асимптотических формул с оценкой остатка для среднего значения функции $\tau_k(n)$, когда n пробегает некоторое подмножество множества натуральных чисел, не совпадающее с натуральным рядом. Количество таких задач очень велико, как и число работ, им посвященных. Можно указать, например, на проблему нахождения асимптотики для среднего значения функции $\tau_k([n^c])$, рассмотренную в работах [13,14,15].

---

[5] *Corput J. G. van der* Verscharfung der Abschatzungen beim Teilerproblem// Math. Ann. 87 (1922), 39-65.

[6] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz// Proc. London Math. Soc. (2) (1922), 39-74.

[7] *Карацуба А. А.* Оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова и их применения// Труды МИАН СССР 112 (1971), 245-255.

[8] *Карацуба А. А.* Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле// Изв. АН СССР. Сер. матем. 36 №3 (1972), 475-483.

[9] *Ivič A.* Some recent results on the Riemann zeta-function// Proc. of the Intern. Number Theory Conf. (1989).

[10] *Ivič A., Quellet M.* Some new estimates in the Dirichlet divisor problem// Acta Arithmetica 52№(1989), 241-253.

[11] *Баядилов Е. Е.* О среднем значении функции делителей от тернарной кубической формы// Дисс. на соиск. уч. степ. к. ф.-м. наук, (2002).

[12] *Hardy G. H.* On Dirichlet's divisor problem// Proc. Lond. Math. Soc. (2), 15, (1915),1-25.

[13] *Заказак А.* Проблема делителей Дирихле в редких последовательностях// Дисс. на соиск. уч. степ. к. ф.-м. наук, (1993), 1-80.

[14] *Солиба Х. М.* О среднем значении тернарной функции делителей на последовательности нецелых степеней натуральных чисел// Материалы Междун. Конф. по анал. теории чисел, Москва, МГУ, (1997), 30.

[15] *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* О распределении простых в последовательности вида $[n^c]$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Мех. №6 (1999), 25-35.

Цель работы.

Целью данной работы является нахождение асимптотических формул и оценки остатков, а также улучшение оценок для абсциссы Карлсона и экспоненты Карлсона в теории дзета - функции Римана.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. доказан аналог формулы Перрона для средних Рисса при всех положительных вещественных значениях порядка осреднения;

2. получено обобщение известной в теории дзета - функции Римана теоремы Карлсона о связи абсциссы Карлсона и оценками моментов дзета - функции Римана на случай нецелых значений показателя степени осреднения;

3. получены новые оценки абсциссы Карлсона и экспоненты Карлсона в теории дзета - функции Римана;

4. получены новые оценки остатка в проблеме делителей Дирихле и оценка остатка в асимптотической формуле для средних Рисса от многомерной функции делителей.

Методы исследования.

В работе использованы методы теории дзета - функции Римана, соединяющие в себе методы теории чисел и комплексного анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация диссертации.

Результаты автора неоднократно докладывались на научных семинарах по аналитической теории чисел под руководством Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова на механико - математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, на IV Международной конференции "Современные проблемы теории чисел и ее приложения" в Туле в 2001 г. (10.09.2001 - 15.09.2001), на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" в Туле в 2003 г. (19.05.2003 - 20.05.2003), а также на VI Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" в Саратове в 2004 г. (13.09.2004 - 17.09.2004).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора. Их список приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве нет.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы и списка литературы. Текст диссертации изложен на 68 страницах. Список литературы содержит 43 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение.

Во введении излагается история вопроса и приводится краткий обзор результатов, связанных с темой диссертации. Также во введении формулируются основные результаты диссертации и кратко описывается ее содержание.

Глава 1.

Первая глава состоит из двух параграфов, в первом из которых приведены вспомогательные утверждения, а во втором параграфе доказывается аналог формулы Перрона для средних Рисса порядка α, то есть для $\sum\limits_{n\leqslant x} a_n \left(1-\frac{n}{x}\right)^{\alpha}$, где α — положительное вещественное число.

При целых значениях α подобные асимптотики получаются с помощью классической формулы Перрона [16].

Основной теоремой первой главы является вывод аналога формулы Перрона

Теорема 1.2. *Пусть функция $h(s)$ комплексного переменного $s = \sigma + it$ представляется рядом Дирихле вида*

$$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

который сходится абсолютно при $\mathrm{Re}\ s = \sigma > 1$. *Далее, пусть $A(n)$ — монотонно возрастающая функция от n и $|a_n| \leqslant A(n)$ при всех n. Пусть, также, $\beta > 0$, $\delta > 0$ и при $\sigma \to 1+$ выполняется асимптотическая оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma-1)^{-\beta}.$$

Тогда при всех $b \geqslant 1+\delta$, любом x вида $x = N + \frac{1}{2}$, где N — натуральное число, и $T \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\Phi(x,\alpha) = \sum_{n\leqslant x} a_n \left(1-\frac{n}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT} h(s) x^s B(s,\alpha+1)\, ds +$$

[16] *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983, 75–78.

$$+O\left(\frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^{\beta}}\right)+O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}}\right).$$

Глава 2.

Вторая глава состоит из трех параграфов. Первый параграф посвящен получению обобщения известной теоремы Ф. Карлсона [17] об оценке абсциссы Карлсона[18] σ_k с целых значений k на случай произвольных вещественных значений k. Более точно, доказывается следующая теорема

Теорема 2.3. *Пусть k — любое вещественное число, $k>0$ и σ_k — нижняя грань чисел σ, таких, что для любого $\varepsilon>0$ выполняется оценка*

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt\ll_{\varepsilon}T^{\varepsilon}.$$

Пусть также при некотором a, где $1\leqslant a\leqslant 20$ и всех $t\geqslant 1$ и $\sigma\in(\frac{1}{2},1)$ выполняется оценка

$$\zeta(\sigma+it)\ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}(\ln t)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда для любого $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$ справедливо неравенство

$$\sigma_k\leqslant\max\left(1-\frac{1}{(a(b+2k))^{\frac{2}{3}}},1-\frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}\right)$$

в предположении, что $b=\frac{7}{6}5^{\frac{3}{2}}$, а величина $\mu_k(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T|\zeta(\alpha+it)|^{2k}dt\ll_{\varepsilon}T^{\mu_k(\alpha)+\varepsilon}.$$

Во втором параграфе второй главы с помощью данной теоремы для абсциссы Карлсона σ_k получена новая оценка вида

$$\sigma_k\leqslant 1-\frac{1}{(3ak)^{\frac{2}{3}}}\quad\text{при } k\geqslant 45.$$

Данная оценка абсциссы Карлсона при больших значениях величины k, а именно, при $k\geqslant 700000$, улучшает результат работы Г. И. Архипова, Е. Е. Баядилова, В. Н. Чубарикова [18].

[17] *Титчмарш Е. К.* Теория дзета - функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

[18] *Архипов Г. И., Баядилов Е. Е., Чубариков В. Н.* Об абсциссе и экспоненте Карлсона в проблеме моментов дзета - функции// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. №1 (2004) 42-45.

Далее показывается, что доказанная выше теорема 2.3 допускает некоторое усиление. Воспользовавшись результатом указанной выше работы А. Ивичем и М. Квелетом [10] в 1989 г., получаем следующий результат

Теорема 2.2.2. *Пусть при некотором* a, *где* $1 \leqslant a \leqslant 20$, $t \geqslant 1$ и всех $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$ *выполняется оценка*

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Далее, пусть $k \geqslant 40$ *и* $k_1 = \frac{20}{a}$. *Тогда для величины* σ_k *имеет место оценка*

$$\sigma_k \leqslant 1 - \frac{1}{(3a(k-k_1))^{\frac{2}{3}}}.$$

В следующем параграфе второй главы, используя доказанные выше теоремы об оценках величины σ_k, получаем новый результат для экспоненты Карлсона $m(\sigma)$.

Теорема 2.3. *При* $\sigma > c_1 = 1 - \frac{1}{31.2}$ *справедлива следующая оценка для экспоненты Карлсона*

$$m(\sigma) \geqslant \frac{1}{3a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} + k_1, \textit{где } k_1 = 79.95.$$

Эта теорема улучшает результат А. Ивича и М. Квелета [10]

$$m(\sigma) \geqslant \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Кроме того, при $k \geqslant 93$ она является уточнением результата Г. И. Архипова, Е. Е. Баядилова и В. Н. Чубарикова [18].

Глава 3.

Эта глава посвящена проблеме делителей Дирихле. Она состоит из трех параграфов, в первом из которых находятся новые оценки величины α_k, где α_k понимается как наименьшее вещественное число, обладающее свойством, что при $x \to \infty$ справедлива оценка вида

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k + \varepsilon}.$$

Современные оценки величины α_k, приведенные в работе А. Ивича и М. Квелета [10], имеют следующий вид

$$\alpha_k \leqslant \frac{3k-4}{4k} \quad \text{при } 4 \leqslant k \leqslant 8, \quad \alpha_9 \leqslant \frac{35}{54}, \quad \alpha_{10} \leqslant \frac{41}{60}, \quad \alpha_{11} \leqslant \frac{7}{10},$$

$$\alpha_k \leqslant \frac{k-2}{k+2} \quad \text{при } 12 \leqslant k \leqslant 25, \quad \alpha_k \leqslant \frac{k-1}{k+4} \quad \text{при } 26 \leqslant k \leqslant 50,$$
$$\alpha_k \leqslant \frac{31k-98}{32k} \quad \text{при } 51 \leqslant k \leqslant 57, \quad \alpha_k \leqslant \frac{7k-34}{7k} \quad \text{при } k \geqslant 58.$$

С другой стороны, в предположении справедливости оценки

$$\zeta(\sigma+it) \ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \ln^{\frac{2}{3}} t$$

в этой работе доказано, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{1}{3}\, 2^{\frac{2}{3}} (ak)^{-\frac{2}{3}}.$$

Здесь $a > 0$ — некоторая постоянная, значение которой последовательно улучшается. Последние оценки для параметра a дают значения $a \leqslant 15.21$, полученное Е. Е. Баядиловым и $a = 4.45$, полученное К. Фордом [19].

При растущих k последняя оценка принципиально точнее, чем оценка типа

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{c_0}{k},$$

где c_0 — любая фиксированная постоянная.

В 1960 г. Х.-Е. Рихерт доказал, что имеет место оценка вида

$$\alpha_k \leqslant 1 - ck^{-\frac{2}{3}},$$

причем числовое значение константы c не было указано.

В 1971 г. А. А. Карацуба установил справедливость этой оценки при

$$c = c_0 a^{\frac{2}{3}}, \text{ где } c_0 = 2^{-\frac{5}{3}} \approx 0.31498.$$

А. Фуджи в работе [20] анонсировал оценку того же типа со значением

$$c_0 = a^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{8}-1)^{-\frac{1}{3}} \approx 0.57826,$$

но полного доказательства в этой работе приведено не было.

Упомянутый выше результат А. Ивича и М. Квелета [10] соответствует значению

$$c_0 = \frac{1}{3} 2^{\frac{2}{3}} \approx 0.52913.$$

Наконец, в 2001 г. Е. Е. Баядилов в указанной выше работе получил оценку вида

$$\alpha_k \leqslant 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_0)}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{a\sqrt{k-2k_0}}\right)^{-1}, \quad \text{где } k_0 = 44 - \left[\frac{22}{a}\right],$$

[19] *Ford K.* Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta-function// Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), 565-633.

[20] *Fujii A.* On the problem of divisors// Acta aritnm. 31 №4 (1976), 355-360.

которая означает, что
$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \delta$$
при любом $\delta > 0$ для всех $k \geqslant h(\delta)$, где $h(\delta) > 0$ — некоторая функция, зависящая от δ.

Основной теоремой данного параграфа является

Теорема 3.1. *Пусть n, k — натуральные числа, $k \geqslant 93$, $\tau_k(n)$ — количество представлений n в виде произведения k натуральных сомножителей. Пусть, далее,*
$$D_k(x) = \sum_{n\leqslant x} \tau_k(n) = \sum_{x_1\ldots x_k\leqslant x} 1.$$
Предположим также, что для дзета - функции Римана $\zeta(s)$ в области $Re\ (s) = \sigma > 0.9$, $Im\ (s) = t > 1$ выполняется неравенство
$$\zeta(s) \ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \ln t,\ \ a \in [1, 20].$$
Тогда при $x \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула
$$D_k(x) = xP_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x),\ \ \Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k+\varepsilon},$$
где $\alpha_k = 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_1)}\right)^{\frac{2}{3}}$, $k_1 = 79.95$, а многочлен $P_{k-1}(\ln x)$ определен ранее.

Из этой теоремы следует справедливость оценки
$$\alpha_k \leqslant 1 - c_0(ak)^{-\frac{2}{3}}$$
со значением
$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.763143.$$

Данное значение c_0 является улучшением не только результата А. Ивича и М. Квелета [10], где
$$c_0 = \frac{1}{3}2^{\frac{2}{3}} \approx 0.52913$$
но и анонсированных результатов А. Фуджи [20] при
$$c_0 = a^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{8} - 1)^{-\frac{1}{3}} \approx 0.57826,$$
и Е. И. Пантелеевой [21]
$$c_0 = 2^{\frac{2}{3}} \approx 0.62996,$$

[20] *Пантелеева Е. И.* К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях// Матем. заметки 44 №4 (1988), 494-505.

а также улучшением результата Е. Е. Баядилова [11], где

$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \delta$$

при любом $\delta > 0$ для всех $k \geqslant h(\delta)$, где $h(\delta) > 0$ — некоторая функция, зависящая от δ.

Второй параграф третьей главы посвящен еще одному направлению исследований в проблеме делителей Дирихле, состоящему в оценке порядка среднеквадратичного отклонения $R_k(x)$ для величины $D_k(x)$ от главного члена ее асимптотической формулы, то есть среднеквадратичное отклонение остатка $\Delta_k(x)$.

В этой тематике в качестве стандартного обозначения определяется величина β_k, которая обозначает точную нижнюю грань чисел $\beta > 0$ таких, что при $x \to \infty$ справедливо неравенство

$$x^{-1} \int\limits_1^x \Delta_k^2(x)\, dx \ll x^{2\beta}.$$

В уже упоминавшейся работе А. Ивича и М. Квелета получены следующие оценки величины β_k

$$\beta_5 \leqslant 0.45625, \quad \beta_7 < 0.55469, \quad \beta_8 < 0.60167,$$

$$\beta_9 < 0.63809, \quad \beta_{10} < 0.66717,$$

а если

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} (\ln t)^{\frac{2}{3}},$$

то

$$\beta_k \leqslant 1 - \frac{2}{3}(ak)^{-\frac{2}{3}}.$$

Последняя оценка величины β_k при $k \geqslant 93$ нами улучшена. Доказана следующая теорема

Теорема 3.2. *При $k \geqslant 93$ и $k_1 = 79.95$ выполняется следующая оценка*

$$\beta_k \leqslant 1 - \left(\frac{b}{3ak_3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

где $k_3 = k - k_1$, $a = 4.45$ и $b = 2.5$.

Сравнение результата этой теоремы с последней приведенной оценкой А. Ивича и М. Квелета показывает, что константа $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ улучшена нами до значения

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.885549.$$

В третьем параграфе третьей главы рассматривается еще один аспект в многомерной проблеме делителей, связанный с нахождением средних значений специального типа для функции делителей $\tau_k(n)$. Имеются в виду средние Рисса для арифметических функций. При каждом фиксированном значении $\alpha \geqslant 0$ средние Рисса порядка α для последовательности $f(n)$ при $x \to \infty$ определяются по формуле

$$\Phi(x) = \Phi(x, f, \alpha) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}.$$

Асимптотические формулы для средних Рисса от арифметических функций при натуральных значениях α являются одновременно инструментом и объектом изучения при решении различных проблем теории чисел. В случае $\alpha = 0$ среднее Рисса представляет собой обычную сумматорную функцию для данной арифметической последовательности.

Нами получена асимптотическая формула для средних Рисса от многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ при произвольном значении α.

Доказана следующая теорема

Теорема 3.3. *Пусть $\alpha > 0$ — произвольное вещественное число. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha} = A(x, \alpha) + \Delta(x, \alpha),$$

где $A(x, \alpha) = xP_{k-1}(\ln x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $\Delta_k(x, \alpha) \ll_{\varepsilon} x^{\varkappa(k,\alpha)+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало и величина $\varkappa(k, \alpha)$ удовлетворяет условию

$$\varkappa(k, \alpha) \leqslant f(k, \alpha) = 1 - \left(\frac{d}{ak_2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

при $d = \frac{2+3\alpha}{3}$.

Эта теорема при $\alpha = 1$ улучшает результат, полученный Е. Е. Баядиловым [11].

В заключение автор приносит глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В. Н. Чубарикову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Колпакова О. В.* Об одном аналоге формулы Перрона// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2001. №1, 23–25.
2. *Колпакова О. В.* Об одном обобщении формулы Перрона// Тезисы докладов IV Международной конференции "Современные проблемы теории чисел и ее приложения". 2001. 69–70.

3. *Колпакова О. В.* О теореме Карлсона для нецелых степеней дзета - функции Римана// Тезисы докладов V Международной конференции "Алгебра и теория чисел : современные проблемы и приложения". 2003. 138.
4. *Колпакова О. В.* О средних Рисса для обобщения функции делителей// Тезисы докладов VI Международной конференции "Алгебра и теория чисел : современные проблемы и приложения". 2004. 72.
5. *Колпакова О. В.* Об оценках абсциссы Карлсона для нецелых показателей степени осреднения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2006. №6, 45–48.