Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 511.331.1

Авдеев Иван Федорович

ОБ ОЦЕНКАХ ПЛОТНОСТИ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Геннадий Иванович Архипов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Николай Михайлович Добровольский кандидат физико-математических наук доцент Ольга Васильевна Тырина
Ведущая организация:	Владимирский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится 9 ноября 2007 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП – 1, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук
профессор В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность исследования

В 1860 году Б.Риман в своем знаменитом мемуаре «О числе простых чисел, не превышающих данной величины»[1] связал задачу исследования простых чисел в натуральном ряде с проблемой расположения нулей дзета-функции Римана в критической полосе. С тех пор изучение свойств дзета-функции Римана занимает центральное место в исследованиях по аналитической теории чисел. Исследования по теории дзета-функции Римана ведутся с большой интенсивностью вот уже на протяжении полутора столетий, и отдельные разделы этой теории стали самостоятельными научными направлениями современной аналитической теории чисел. Важную роль среди этих направлений играют теоремы о плотности распределения нулей дзета-функции в критической полосе. Такие оценки обычно называются плотностными теоремами.

Плотностные теоремы – общее название теорем, которые дают оценку сверху для числа $N(s,T,c)$ нулей $r=b+ig$ L-функций Дирихле, где $s=s+it$, $c(n,k)-$ характер Дирихле по модулю k, в прямоугольнике $\frac{1}{2}<s\le b<1$, $|g|\le T$. В случае $k=1$ получается плотностная теорема для числа нулей $N(s,T)$ дзета-функции Римана $z(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

Первые существенные результаты в доказательстве плотностных теорем об оценке нулей дзета-функции Римана получены в начале XX века в работах Г. Бора, Э. Ландау и Ф. Карлсона. В дальнейшем оценкой величины $N(s,T)$ занимались Дж. Литлвуд, А.Э. Ингам, Е.К. Титчмарш, А. Сельберг, Ю.В. Линник, Э. Бомбьери и другие математики.

В 1930 году Г. Гогейзель установил связь плотностных теорем с проблемой оценки распределения между соседними простыми числами, что еще больше повысило их значимость. В последние десятилетия вопросам, связанным с оценкой $N(s,T)$, были посвящены работы М.Н. Хаксли, Х.Л. Монтгомери, М. Ютилы, Д.Р. Хиз-Брауна, А.А. Карацубы, К. Рамачандры, А. Ивича и других известных специалистов.

Изложение доказательств теорем об оценках величины $N(s,T)$ содержится во многих известных монографиях и учебниках по аналитической теории чисел, включая книги Е.К. Титчмарша,

[1] B. Riemann Ueber die Anzahl der primzahlen unter einer gegebenen Größe // Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.

А. Прохара, Э. Дэвенпорта, Г. Монтгомери, А.А. Карацубы, А.А. Карацубы и С.М. Воронина, А. Ивича и др.

Цель работы

Целью работы является доказательство новых плотностных теорем о распределении нетривиальных нулей дзета-функции Римана правее критической прямой.

Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты:

- оценка снизу среднего значения модуля частичной суммы ряда Дирихле;
- новый метод доказательства теоремы Ингама;
- формула обращения для полинома Дирихле с неулучшаемой оценкой остаточного члена;
- новая оценка плотности нулей дзета-функции Римана $N(s,T)$ при $s \in \left(\frac{77}{101}, \frac{13}{17}\right)$.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории дзета-функции Римана, в том числе:

- применяется формула Виноградова-Корпута для обращения тригонометрических сумм;
- используется неравенство Халоша-Монтгомери;
- применяется метод сглаживания для полиномов Дирихле в форме неравенства А.Ивича.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. В ходе диссертационного исследования решены следующие задачи:

- получена оценка снизу среднего значения модуля частичной суммы ряда Дирихле;
- предложен новый метод доказательства теоремы Ингама;
- доказана формула обращения для полинома Дирихле с неулучшаемой оценкой остаточного члена;
- получена новая оценка плотности нулей дзета-функции Римана $N(s,T)$ при $s \in \left(\frac{77}{101}, \frac{13}{17}\right)$.

Результаты работы могут быть использованы при решении различных задач аналитической теории чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Научная конференция «Неделя науки» Орловского государственного университета, посвященная 60-летию Победы в Великой Отечественной войне (Россия, Орел, 28 марта–9 февраля 2005 г.);
2. Международная научная конференция, посвященная 300-летию со дня рождения Л.Эйлера (Россия, Санкт-Петербург, 14–17 мая 2007 года);
3. Научно-исследовательский семинар «Избранные главы аналитической теории чисел» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ под руководством Г.И.Архипова и В.Н.Чубарикова в 2005, 2006, 2007 годах.

Публикации

Результаты исследования по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце автореферата [1–5].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, библиографии (25 наименований). Общий объем диссертации составляет 82 с.

Краткое содержание работы

Во **Введении** приводится постановка исследуемой работы, излагается краткий исторический обзор исследований по теме диссертации, формулируются её основные результаты, описываются схемы их доказательств и проводимых рассуждений.

Современная постановка проблемы оценки количества плотности нулей дзета-функции Римана правее критической прямой, то есть оценка величины $N(s,T)$, обычно формулируется как задача нахождения новых значений показателя $A(s)$, для которого выполняется оценка

$$N(s,T) =_e T^{A(s)(1-s)+e}, \ \forall e > 0. \qquad (1)$$

В 1937 году А.Э. Ингам получил оценку (1) с значением $A(s) = A_1(s) = \frac{3}{2-s}$. Несколько позднее эту оценку он уточнил, заменив в ней величину T^e на множитель L^c, где $L = \ln T$ и $c > 0$ некоторая постоянная. Но новых степенных понижений в оценке (1), справедливой при всех $s > 0,5$, не было получено до настоящего времени. Наилучшее значение параметра $c=5$ указано в монографии А. Ивича[2].

Утверждение о том, что оценка (1) справедлива при всех $s>0,5$ с значением $A(s)=2$ называют плотностной гипотезой. Из неё следует, что для количества $p(x+h)-p(x)$ простых чисел на промежутке $(x,x+h)$ при $h \; ?_{e} \; x^{0,5+e}$ справедлива асимптотическая формула $p(x+h)-p(x) : \frac{h}{\ln x}$, $x\to\infty$. Если же использовать значение $A(s)=a>2$, то указанная асимптотика будет выполняться лишь при $h \; ?_{e} \; x^{1-1/a+e}$.

В 1972 году М.Н. Хаксли получил плотностное неравенство (1) со значением $A(s)=A_2(s)=\frac{3}{3s-1}$, $s>0,5$. Вместе с результатом Ингама для величины $A(s)$ это дало значение

$$A(s)=2,4=A_1(0,75)=A_2(0,75).$$

Тем самым асимптотическая формула для разности $p(x+h)-p(x)$ была доказана для значений $h \; ?_{e} \; x^{\frac{7}{12}+e}$.

Заметим, что нахождение новых значений $a=\sup\limits_{s\geq 0,5} A(s)$ прежде всего связано с получением новых оценок сверху для величины $A(s)$ в окрестности $s=0,75$. Но до настоящего времени это удалось сделать только в правой полуокрестности этой точки, то есть для значений $s>0,75$.

Последний результат в этом направлении был получен А. Ивичем[3]. Он может быть сформулирован в следующем виде

$$A(s)=\frac{3}{7s-4} \text{ при } s\in\left[\frac{13}{17},\frac{3}{4}\right].$$

При больших значениях s в настоящее время получены ещё более точные оценки величины $N(s,T)$, но нами этот промежуток не рассматривается. В диссертации доказывается, что на промежутке $\Delta=\left(\frac{77}{101},\frac{13}{17}\right)$ оценка

$$N(s,T) =_{e} T^{A(s)(1-s)+e}, \ \forall e>0$$

---

[2] The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. Aleksandar Ivic, University of Belgrade, Yugoslavia, 1985. C.274.

[3] The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. Aleksandar Ivic, University of Belgrade, Yugoslavia, 1985. C.290.

выполняется для значений $A(s)=\frac{51}{23}$. Поскольку при $s\in\Delta$ выполняется неравенство $\frac{51}{23}<\frac{3}{7s-4}$, то данный результат является улучшением соответствующей оценки А. Ивича $\forall s\in\Delta$.

Следует отметить, что ряд работ известных математиков — Х.Л. Монтгомери, М.Н. Хаксли, К. Рамачандра, Ф. Форти и С. Виолы, М. Ютилы, Д.Р. Хиз-Брауна — был посвящен вопросу расширения границ при $\Delta_0=(s_1,1]$, $s<0,75$, для которых выполняется оценка $A(s)\le 2$. Наилучший результат $s_1=\frac{11}{14}$, получен М. Ютилой[4].

Что же касается значений s, лежащих в левой окрестности точки $s_0=0,75$, то здесь наилучшей оценкой остается теорема Ингама в том смысле, что к настоящему времени удалось лишь уменьшить значение показателя степени в логарифмическом множителе L^c в этой оценке, доведя его, как уже было отмечено, до значения $c=5$.

Следует сказать, что за время, прошедшее после первого опубликования результата А.Э. Ингама, предложено много других схем доказательства, которые очень различаются.

В диссертации предложена новая модификация доказательства теоремы А.Э. Ингама. Её существенным моментом является вывод нижней оценки суммы модуля очень короткого начального отрезка ряда Дирихле, распространенной на все нули $r=b+ig$ дзета-функции Римана $z(s)$, лежащих в прямоугольнике $b\ge s$, $|g|\le T$. При этом нами в прямом виде не используется идея Г. Бора в модификации Ф. Карлсона, состоящая в рассмотрении произведения $M_x(s)z(s)$, где $M_x(s)\sum_{n\le x}m(n)n^{-s}$ представляет собой «короткую» частичную сумму формального ряда Дирихле для функции $z(s)^{-1}$.

Первая глава диссертации посвящена изложению нового доказательства теоремы Ингама. Эта теорема доказывается в следующей формулировке.

Теорема 1.1. *Пусть* $N(s,t)$ *обозначает число нулей дзета-функции Римана, лежащих в области* $\operatorname{Re}s\ge s\ge\frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im}s|\le T$.

Тогда при любом $e>0$ *и* $A(s)=\frac{3}{2-s}$ *справедлива оценка*

$$N(s,t)=_{e,s}T^{A(s)(1-s)+e}.$$

Доказательство теоремы опирается на новую оценку снизу среднего значения модуля «короткой» частичной суммы ряда Дирихле

---

[4] M. Jutila. Zero-density estimates for L-functions, Acta. Arith. 32, 52-62 (1977).

функции $z(s)$. Оно начинается со стандартного сведения оценки величины $N(s,T)$ к оценке величины N_1, равной количеству нулей r функции $z(s)$ в прямоугольнике P вида $\operatorname{Re} s \geq s$, $\operatorname{Im} s \in \left(\frac{T}{2}, T\right]$ с условием, что ординаты разных нулей отличаются между собой по крайней мере на единицу.

Затем значение $z(s)=0$ в точке $s=r$ записывается через приближенное функциональное уравнение Харди-Литлвуда для функции $z(s)$ в критической полосе[5]

$$z(r)=0=\sum_{n\leq y}\frac{1}{n^r}+c(r)\sum_{m\leq \frac{g}{2py}}\frac{1}{m^{1-r}}+R(r). \tag{2}$$

Здесь $|R(r)| = y^{-s}+T^{-\frac{1}{2}}y^{1-s} = T^{-\frac{1}{2}}y^{1-s}$, $c(r) = T^{\frac{1}{2}-s}$. Значение параметра y определим равенством $y=\min\left(T^{0,55}, T^{\frac{3}{4(2-s)}}\right)$.

Положим $\sum_1=\sum_1(r)=\sum_{n\leq y}\frac{1}{n^r}$, $\sum_2=\sum_2(r)=c(r)\sum_{m\leq g/2py}\frac{1}{m^{1-r}}$. В этих обозначениях равенство (2) записывается в виде

$$0=\Sigma_1+\Sigma_1+R(r).$$

Положим $a=0{,}1$ и разобьём суммирование в сумме Σ_1 на две части. Получим

$$\sum_1=\sum_{11}(r)+\sum_{12}(r)=\sum_{n\leq T^a}n^{-r}+\sum_{T^a<n\leq y}n^{-r}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{11}(r)\right|=\left|\sum_{12}(r)+\sum_2(r)+R(r)\right|\leq\left|\sum_{12}(r)\right|+\left|\sum_2(r)\right|+\left|R(r)\right|.$$

В результате приходим к неравенству вида

$$G\leq F_1+F_2+F_3,$$

где $G=\sum_r\left|\sum_{11}(r)\right|$, $F_1=\sum_r\left|\sum_{12}(r)\right|$, $F_2=\sum_r\left|\sum_2(r)\right|$, $F_3=\sum_r\left|R(r)\right|$.

Следующие леммы первой главы устанавливают оценки G, F_1, F_2, F_3.

---

[5] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функций Римана. М.: Издательство иностранной литературы. 1953. С.82.

Лемма 1.4. *Оценка величины G.*

Обозначим через $h \geq 100$ *произвольное натуральное число. Тогда для величины G справедлива оценка сверху вида*

$$G \ ?_h \ N_1 T^{\frac{-1-s}{h}} .$$

Лемма 1.5. *Оценка величины* F_1

Существует натуральное число m *с условием* $2 \leq m \leq 11$, *для которого выполняется неравенство* $F_1 = N_1^{1-\frac{1}{2m}} T^{\frac{A(s)(1-s)}{2m}} L^{1+\frac{4}{m}}$, *где* $A(s) = \frac{3}{2-s}$ *и* $L = \ln T$.

Лемма 1.6. *Оценка величины* F_2.

Имеет место следующее неравенство $F_2^4 = N_1^3 T^{2-2s} L^{12}$.

Лемма 1.7. *Оценка величины* F_3.

Справедливо неравенство $F_3 = N_1 T^{-0,2}$.

Для завершения доказательства далее рассматриваются две возможности: $F_1 \geq F_2$ и $F_1 < F_2$. В первом случае приходим к оценке вида

$$N(s,T) =_e T^{A(s)(1-s)+e} .$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы в первом случае, когда $F_1 \geq F_2$.

В случае $F_1 < F_2$ имеем

$$N(s,T) =_e T^{2(1-s)+e} = T^{A(s)(1-s)+e} .$$

Это значит, что требуемая оценка справедлива и во втором случае; тем самым доказательство теоремы завершается.

Вторая глава посвящена выводу новой оценки функции $N(s,T)$ для значений параметра s, лежащего на промежутке $\Delta = \left(\frac{77}{101}, \frac{13}{17}\right]$. Основной целью является вывод неравенства вида $N(s,T) =_e T^{A(s)(1-s)+e}$, где $A(s) = \frac{51}{23} = 2,2173913...$, $s \in \Delta$ и $e > 0$ сколь угодно мало.

Как было отмечено выше, наилучшей из известных к настоящему времени оценок подобного рода для данного промежутка является оценка А. Ивича, приводимая, в частности, в его монографии

«The Riemann zeta-function»[6]. Она имеет тот же вид, что и приведенная выше оценка, но со значением $A(s)\le A_1(s)=\dfrac{3}{7s-4}$ при $s\in\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{13}{17}\right]$.

Сравнивая приведенную выше оценку А. Ивича с нашей оценкой, получаем, что разность

$$d(s)=A_1(s)-\frac{51}{23}=\frac{3}{7s-4}-\frac{51}{23}=\frac{21(13-17s)}{23(7s-4)}>0$$

при всех $s<\dfrac{13}{17}$ и $d\left(\dfrac{13}{17}\right)=0$.

Это означает, что результат, полученный в диссертации, является улучшением оценки А. Ивича при всех значениях s из интервала $\Delta=\left(\dfrac{77}{101},\dfrac{13}{17}\right)$.

Основная теорема второй главы сформулирована следующим образом.

Теорема 2.1. *Обозначим через* $N(s,T)$ *количество нулей дзета-функции Римана* $z(s)$ *в прямоугольнике* P *вида* $\operatorname{Re}s\ge s$, $0<|\operatorname{Im}s|\le T$.

Тогда при $s\ge s_2=\dfrac{77}{101}=0{,}76237623762...$ *выполняется оценка вида*

$$N(s,T)=_e T^{A(s)(1-s)+e},$$

где $A(s)=\dfrac{51}{23}=2{,}2173913...$ *и* $e>0$ *сколь угодно мало.*

Приведем схему доказательства данной теоремы.

Обозначим через Ω_1 совокупность нулей $r=b+ig$ дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике P и удовлетворяющие дополнительным условиям, состоящих в том, что мнимые части g точек r превосходят значение $0{,}5T$ и отличаются между собой не менее чем на единицу. В этих обозначениях получим

$$N(s,T)=LN_1,$$

где $L=\ln T$, а N_1 представляет собой максимально возможную мощность множества Ω_1. Кроме того, учитывая, что при всех

[6] The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. Aleksandar Ivic, University of Belgrade, Yugoslavia, 1985. C.290.

$s \ge s_1 = \dfrac{13}{17}$ оценка теоремы вытекает из приведенного выше результата А. Ивича, то при доказательстве достаточно рассматривать случай $s \in [s_2, s_1)$. В каждой точке $r \in \Omega_1$ для значения $z(r) = 0$ запишем приближенное функциональное уравнение простейшего вида[7]

$$z(s) = \sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}\left(x^{-s} \ln x\right).$$

Преобразовав это соотношение при $s \in \Omega_1$, получим

$$z(s) = z(r) = 0 = \sum_{n \le T_1} \frac{1}{n^r} + \mathrm{O}\left(T^{\frac{1}{2}-s}\right).$$

Зафиксируем некоторое положительное $h \ge 100$ и положим $x_0 = T^{0.01}$, тогда последнее равенство можно будет записать в виде

$$-\sum_{n \le x_0} \frac{1}{n^r} = \sum_{x_0 < n \le T_1} \frac{1}{n^r} + \mathrm{O}\left(T^{\frac{1}{2}-s}\right).$$

Переходя к неравенствам, суммируя по всем $r \in \Omega_1$ и используя полученную в первой главе оценку снизу вида $\sum_{r \in \Omega_1} \left| \sum_{n \le x_0} \frac{1}{n^r} \right|$? $N_1 T^{\frac{s-1}{h}}$, приходим к $N_1 T^{\frac{s-1}{h}} = \sum_{r \in \Omega_1} \left| \sum_{x_0 < n \le T_1} \frac{1}{n^r} \right|$.

Дальнейшие рассуждения второй главы посвящены получению надлежащей верхней оценки правой части последнего неравенства. Обозначая её через A, имеем $N_1 = AT^{\frac{1-s}{h}}$. Переходя к неравенству, получим $A = LA(z)$, $N_1 = LT^{\frac{1-s}{h}} A(z)$, где $A(z)$ некоторая сумма вида

$$A(z) = \sum_{r \in \Omega_1} \left| \sum_{z < n \le z_1} \frac{1}{n^r} \right|,$$

причем z и z_1 некоторые целые числа с условием $z_1 \le 2z$ и $z \in (x_0, T_1]$. Оценивая сверху величину $A(z)$ в зависимости от значения параметра z, приходим к неравенству

[7]Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука. 1983. -240 С.72.

$$A(z) \le A_1(z) = \sum_{r\in\Omega_1}\left|\sum_{n=z+1}^{z_0}\frac{1}{n^{s+ig}}\right|,$$

где $z_0 = k$ некоторое фиксированное целое из промежутка $(z, z_1]$. Далее при рассмотрении случая $z \ge T^{0,5}$ получено неравенство

$$A_1(z)^2 = N_1\sum_{r\in\Omega_1}\left|\sum_{z<n\le z_0}\frac{1}{n^{s+ig}}\right|^2.$$

Двойная сумма в правой части последнего неравенства представляет собой среднее квадратичное значение модуля некоторого полинома Дирихле. Далее к сумме $\sum\limits_{z<n\le z_0}\frac{1}{n^{s+ig}}$ применяется доказанная в лемме 2.1 диссертации формула обращения вида

$$\sum_{k=x_0}^{x}\frac{1}{k^s} = c(s)\sum_{\frac{t}{2p\,x}<n\le\frac{t}{2p\,x_0}}\frac{1}{n^{1-s}} + \mathrm{O}\left(x_0^{-s} + x^{0,5}t^{-0,5}\right).$$

Здесь $c(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)p^{s-0,5} = \left(\frac{2p}{t}\right)^{s+it-0,5}e^{i\left(t+\frac{p}{4}\right)}\left(1+\mathrm{O}\left(t^{-1}\right)\right)$ и $|c(s)| = t^{0,5-s}$, $s = s + it,$ причем $\mathrm{Re}\,s = s \in (0,1)$, $t \ge 10$ и $1 \le x_0 < x \le \frac{t}{2p}$.

В результате в случае, когда $z \ge T^{0,5}$, выводится оценка

$$N_1 = T^{4\frac{1-s}{h}+2(1-b)}L^7.$$

При достаточно большом h эта оценка значительно лучше той, которая сформулирована в условии доказываемой теоремы. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай, когда $z < T^{0,5}$.

После этого промежуток изменения параметра $\frac{L}{\ln z}$ разбивается на отдельные участки. С этой целью определяется целое число $m = \left[\frac{L}{\ln z}\right]$, $m \in [2, h]$. Применение неравенства Гёльдера, дает оценку

$$A_1(z)^m \le N_1^{m-1}\sum_{r\in\Omega_1}\left|\sum_{n=z+1}^{z_0}\frac{1}{n^{s+ig}}\right|^m = N_1^{m-1}\sum_{r\in\Omega_1}\left|\sum_{z^m<n\le z_0^m}\frac{b(n)}{n^{s+ig}}\right|,$$

где $b(n)$ удовлетворяет условию $0 \le b(n) \le t_m(n)$. Положим далее $r = z^m$ и $r_0 = z_0^m$. Дальнейшие рассуждения второй главы приводят

нас к случаю $m=2$, когда отношение логарифмов $\frac{\ln r}{L} \in E_0 = \left(\frac{2}{3}, 1\right]$.
Затем с помощью стандартных оценок промежуток E_0 уменьшается до промежутка $E_3 = \left[\frac{A(s)}{3}, f_0\right]$, где $A(s) = \frac{51}{23}$, $f_0 = 0,90095189091...$

Далее рассматривается случай, когда отношение $f = \frac{\ln r}{L}$ лежит в промежутке E_3. Разобьем множество Ω_1 на не более чем $K = T^q$ подмножеств, в каждое из которых входят те точки r из Ω_1, разность ординат которых не превышает величины порядка $T_0 = T^{1-q} = TK^{-1}$. В дальнейшем значение K выбирается равным $T^{A(s)(1-s)} r^{2s-2}$.

Выделим из этих множеств одно, в котором содержится максимальное количество этих точек. Само это множество будем обозначать через Ω_0, а количество точек в нем обозначим через N_0. Проведенные преобразования с помощью неравенства Халоша-Монтгомери[8] приводят нас к оценке

$$N_0^2 =_e N_0 r^{2-2s+e} \sum_{\substack{r, r_1 \in \Omega_0 \\ g > g_1}} \left| \sum_{k=r+1}^{r_0} k^{-\frac{1}{2}+i(g-g_1)} \right|. \qquad (3)$$

Обозначим через $D(g_1)$ величину вида

$$D(g_1) = \sum_{\substack{g \in \Omega_0 \\ g > g_1}} \left| B(g) \right|, \text{ где } B(g) = \sum_{k=r+1}^{r_1} k^{-\frac{1}{2}+i(g-g_1)}.$$

Сумму $D(g_1)$ разобьем по нулям $r \in \Omega_0$ на две части D_1 и D_2. Для этого все нули $r \in \Omega_0$ разобьем на 2 множества w_1 и w_2, относя к w_1 те из них, для которых выполняется неравенство $0 \le \frac{g-g_1}{2pr} \le \frac{1}{2}$, а все остальные отнесем к w_2. Тогда

$$D_1 = \sum_{r \in w_1} \left(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{g - g_1} + r^{-\frac{1}{2}} \right) \le r^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{4r} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{r} \right) = r^{\frac{1}{2}} L.$$

Оценка вклада суммы $\sum_{g_1 \in \Omega_0} D_1$ в общую оценку величины $\sum_{g_1 \in \Omega_0} D(g_1)$ лишь на логарифмический множитель отличается от оценки

[8] The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. Aleksandar Ivic, University of Belgrade, Yugoslavia, 1985. C.494.

«диагонального» члена, отвечающего значению $g = g_1$ и имеющего порядок $r^{\frac{1}{2}} N_0$. Далее рассматривается величина D_2. Для её оценки множество w_2 разобьем на два подмножества w_{21} и w_{22}, включая в w_{21} те r, для которых выполняется неравенство $g - g_1 \le r^{1+d}$. Тривиальная оценка величины D_2 для $\forall r \in w_2$ вносит в правую часть неравенства (3) вклад меньшего порядка чем N_0^2, поэтому им можно пренебречь.

Далее множество w_{22} разобьем на подмножества $m_1, m_2, \ldots, m_m, \ldots$ в количестве $L_1 = L$, отнесением к m_m тех значений r, для которых выполняется неравенство $r^{1+d} = x_m < g - g_1 \le x_{m+1} = T_0$, где $x_m = r^{1+d} 2^{m-1}$.

После этого оцениваемая величина A_{3m}, определяется равенством

$$A_{3m} = r^{\frac{3}{2} - 2s + e} \sum_{r \in m_m} \left| B(g) \right|.$$

К сумме $B(g)$ применим формулу обращения, в результате чего получим

$$A_{3m} = r^{\frac{3}{2} - 2s + e} \left(\sum_{r \in m_m} \left| \sum_{\frac{g - g_1}{2p r_1} < n \le \frac{g - g_1}{2p r}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + i(g - g_1)}} \right| \right) + R_m.$$

Остаток R_m в этом равенстве допускает следующую оценку

$$R_m = \left(r^{1-2s+e} + r^{2-2s+e} x_m^{-1} \right) N_0 = N_0 r^{2-2s-e}.$$

Но так как количество различных значений m, равное $L_1 = L$, то порядок суммарного вклада всех остатков R_m в правой части неравенства (3) не превосходит величины $N_0 r^{2-2s-e}$ и в дальнейшем его можно не учитывать.

Обозначим через D_{3m} величину вида $D_{3m} = \sum_{r \in \Omega_0} \sum_{r \in m_m} \left| \sum_{\frac{g - g_1}{2p r_1} < n \le \frac{g - g_1}{2p r}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + i(g - g_1)}} \right|$.

Тогда, с учетом сделанных выше замечаний, приходим к оценке вида

$$N_0^2 = N_0 r^{2-2s+e} + r^{\frac{3}{2} - 2s + e} D_{3m},$$

где значение m выбрано так, чтобы порядок величины D_{3m} при данном $m = m_0$ достигал своего наибольшего значения. Далее, устраняя зависимость промежутка суммирования во внутренней сумме от значений $g - g_1$ приходим к оценке $N_0 =_e r^{\frac{3}{2}-2s+e} \sum_{g \in m_m} |S(g)|$, где $S(g)$— сумма вида $S(g) = \sum_{k=y+1}^{y_1} \frac{a(k)}{k^{0,5+i(g-g_1)}}$, $y = T_0 r^{-1}$.

Возводя обе части последнего неравенства в степень $n \geq 2$, применяя процедуру сглаживания в форме А. Ивича[9], получим

$$N_0 =_e r^{n(3-4s)+e} \sum_{g \in m_m} \left| \sum_{k=y^n}^{y_1^n} \frac{1}{k^{0,5+i(g-g_1)}} \right|^2. \qquad (4)$$

В правой части неравенства (4) выделим члены, отвечающие значениям g, удовлетворяющих неравенству $|g - g_1| < 20y^n$. Для вклада V_1 этих членов в сумму (4) по индексу k получим оценку $V_1 = y^n r^{n(3-4s)+e}$.

Для значений g с условием $|g - g_1| \geq 20y^n$ к сумме по k применяется формула обращения (лемма 2.1 диссертации). В результате мы приходим к неравенству вида $N_0 = V_1 + V_2$, где

$$\begin{cases} V_1 = r^{n(3-4s)} y^n T_0^e = r^{n(3-4s)} r^{-n} T_0^{n+e} = r^{2-2s}, \\ V_2 = T_0^{1+e} y^{-n} r^{n(3-4s)} N_0 = T_0^{-n+1+e} r^n N_0 r^{n(3-4s)}. \end{cases}$$

Дальнейшее доказательство сводится к оптимальному выбору значения степени n в зависимости от величины отношения $f = \frac{\ln r}{L}$ и от значения параметра $x_m \approx g - g_1$. При этом случаи $n = 7$ и $n = 8$ требуют отдельного рассмотрения, а случаи $n \geq 9$ разбираются единообразно. В конечном итоге мы приходим к оценкам, дающим полное доказательство теоремы 2.1.

В заключении отметим, что изложенный выше метод доказательства теоремы о плотности нулей дзета-функции Римана в полосе от $\frac{77}{101} < s \leq \frac{13}{17}$, развиваемый нами в данной главе, на самом деле позволяет еще немного уточнить оценки величины $N(s,T)$. Для этого лишь требуется рассматривать функцию $A(s)$ как переменную величину с условием $A(s) < \frac{51}{23}$ при $s \in \left(\frac{77}{101}, \frac{13}{17}\right]$. Кроме того, таким же

---

[9] The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. Aleksandar Ivic, University of Belgrade, Yugoslavia, 1985. C.282.

образом можно получить новые степенные понижения нулей $N(s,T)$ и при всех $s \in \left(\frac{3}{4}, \frac{77}{101}\right]$.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Архипову Геннадию Ивановичу за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Авдеев, И.Ф. Об оценках снизу функции Чебышева в методе Гельфонда-Шнирельмана [Текст]/ И.Ф.Авдеев// Чебышевский сборник. — 2006. — Том 7, вып. 2. — С.144–154.
2. Авдеев, И.Ф. О плотностной теореме Ингама для нулей дзета-функции Римана [Текст]/ И.Ф.Авдеев// Чебышевский сборник. — 2006. — Том 7, вып. 4(20). — С.3–17.
3. Авдеев, И.Ф. О плотности распределения нулей дзета-функции Римана в критической полосе [Текст]/ И.Ф.Авдеев// Вестник Московского университета. — Серия 1, Математика. Механика. — 2007. — №6. — С.3–5.
4. Авдеев, И.Ф. Леонард Эйлер — основоположник теории чисел [Текст]/И.Ф.Авдеев, Т.К.Авдеева// Леонард Эйлер и современная наука. Материалы Междунар. науч. конф. 14–17 мая 2007 г. Санкт-Петербург. — Санкт-Петербург: 2007. — С. 84–90.
   И.Ф. Авдееву принадлежит описание развития идей для Л. Эйлера в работах других математиков (70% работы).
5. Авдеев, И.Ф. Об оценках количества нетривиальных нулей дзета-функции Римана [Текст]. — Орел: Изд-во Орловского государственного университета. — 2007. — 57 с. — ISBN 978-5-9929-0001-9.