МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.547.7

Бирюков Лев Николаевич

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук А.М. Седлецкий.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Е.А. Севастьянов.
	кандидат физико-математических наук Г.Г. Брайчев.
Ведущая организация:	Московский технический университет связи и информатики.

Защита диссертации состоится 14 ноября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор Т.П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации исследуется вопрос о распределении нулей функций из обобщённых пространств Бергмана — пространств аналитических функций в единичном круге, модуль которых интегрируем с некоторым весом, а также связанный с ним вопрос о полноте систем экспонент в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Поведением нулей функций из различных пространств в своё время занимались Неванлинна, Карлесон, Шапиро, Шилдс, Когрен, Шамоян, Йевтич, Горовиц и другие.

Пусть f — аналитическая в единичном круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция, и пусть $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ — упорядоченная в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции f, причём каждый нуль участвует в последовательности столько раз, какова его кратность.

Хорошо известно, что если функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди H^p, то есть удовлетворяет условию

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

то её нули удовлетворяют условию Бляшке[1] [2] [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

То же условие выполняется и для нулей функций, принадлежащих более широкому пространству Неванлинны, состоящему из аналитических в единичном круге функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta \right) < \infty,$$

[1] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. — М.: Мир, 1984.
[2] Duren P.L., *Theory of H^p spaces.* Academic Press, New York, 1970
[3] Garnett J.B., *Bounded analytic functions,* New York, Academic Press, 1981

где $\log^+(x) = \max(\log x, 0)$.

Сложнее ведут себя нули функций из пространств Бергмана A^p — пространств аналитических в единичном круге функций, таких что

$$\|f(z)\|_p^p = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta} |f(z)|^p \, dxdy < \infty, \quad z = x + iy, \quad 0 < p < \infty.$$

Горовиц[4] показал, что нули функций из пространств A^p удовлетворяют условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n(1-|z_n|)}{\log n} \le \frac{1}{p}. \tag{1}$$

В той же работе Горовиц показал, что нули функций из пространств A^p_α $(-1 < \alpha < \infty,\ 0 < p < \infty)$ — пространств аналитических в единичном круге функций, таких что

$$\|f(z)\|_{p,\alpha}^p = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta} |f(z)|^p \cdot (1-|z|^2)^\alpha \, dxdy < \infty, \quad z = x + iy,$$

— удовлетворяют условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n(1-|z_n|)}{\log n} \le \frac{1+\alpha}{p}.$$

Несколькими годами позже Беллер[5] доказал точность константы $1/p$ в правой части (1).

В первой главе диссертации изучается распределение нулей функций из пространств A^p с весом в виде правильно меняющейся функции, то есть произведения степенной и медленно меняющейся функции.

---

[4] Horowitz C., *Zeros of functions in the Bergman spaces*//Duke Math. J. 41 (1974), 693-710.

[5] Beller E., *Zeros of A^p functions and related classes of analytic functions"*//Israel J. of Math., Vol. 22, №. 1, 1975.

Результаты первой главы применяются во второй главе, в задачах, связанных с полнотой систем экспонент в весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Такие задачи рассматривали Мюнц и Сас (в пространствах $C_0[0,1]$ и $L^2(0,1)$ соответственно, и в эквивалентных постановках для полноты систем степеней), а также Шварц, Грам, Зигель, Левинсон и другие. А.М. Седлецкий[6] рассмотрел такую задачу для весовых пространств $L^p_\alpha = L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$, состоящих из функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^p_{p,\alpha} = \int\limits_0^\infty |f(t)|^p\, t^\alpha\, dt < \infty.$$

и получил следующие условия полноты систем $\{e^{-\lambda_n t}\}$ в этих пространствах.

Пусть $1 < p \leq 2$, $\alpha > p-2$. Обозначим через $N_\Lambda(x)$ число точек последовательности $\Lambda = (\lambda_n)$ в круге радиуса $(x^2-1)^{1/2}$ с центром в точке $x > 0$. Тогда если

$$\delta(\Lambda) := \limsup_{x\to\infty} \frac{N_\Lambda(x)}{x \log x} > \frac{\alpha - (p-2)}{p}, \qquad (2)$$

то система $\{e^{-\lambda_n t}\}$ полна в L^p_α. Если же $p \geq 2$, $\alpha > p-2$, то для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся последовательность $\Lambda = (\lambda_n)$ такая, что система $\{e^{-\lambda_n t}\}$ неполна в L^p_α и

$$\delta(\Lambda) \geq \frac{\alpha - (p-2)}{p} - \varepsilon$$

Таким образом, при $p = 2$ константа $(\alpha - (p-2))/p$ в правой части (2) является точной.

В диссертации исследуется вопрос полноты систем $\{e^{-\lambda_n t}\}$ в пространствах L^p_α с дополнительным весом в виде медленно меняющейся функции, в пограничном для приведённой выше задачи случае $\alpha = p-2$.

---

[6] Седлецкий А.М., "*Проблема Мюнца-Саса и нули аналитических функций* // Теория функций и приближений. — Тр. 3 Саратовской зимней школы. — СГУ, 1987. — с. 59-63.

Цель работы Исследование распределения нулей функций из пространств Бергмана с весом в виде правильно меняющейся функции и условий полноты систем экспонент в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$ с весом в виде правильно меняющейся функции.

Научная новизна. В диссертации получены

– в некотором смысле неулучшаемая оценка модифицированной плотности нулей функций из пространств Бергмана с весом в виде правильно меняющейся функции

– неулучшаемое, в некотором смысле, условие полноты систем экспонент в пространствах L^p с весом в виде правильно меняющейся функции

– оценка роста функций из пространств Бергмана с весом в виде правильно меняющейся функции и неулучшаемость, в некотором смысле, этой оценки.

Все перечисленные результаты являются новыми

Методы исследования. В работе применяются методы комплексного анализа, теории аппроксимации и аппарат медленно меняющихся функций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в исследовании функций из обобщённых пространств Бергмана и аппроксимаций функций из весовых пространств L^p.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались

на семинаре мех.-мат. ф-та МГУ "Негармонический спектральный анализ"под руководством профессоров А.М. Седлецкого и В.В. Власова (2004 г., неоднократно);

на 12-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения"(Саратов, 2004 г.).

на международной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"(Тула, 2005 г.)

на семинаре мех.-мат. ф-та МГУ "Негармонический анализ"под руководством профессора А.М. Седлецкого (2006 г.);

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора. Их список приведён в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве нет.

Структура работы. Диссертация состоит из введения и трёх глав. Общий объём диссертации 71 страница. Список литературы включает 29 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся краткий обзор по теме диссертации — распределениям нулей аналитических функций на единичном круге, модуль которых интегрируем с весом, и их применению в теории аппроксимации, приводится краткое содержание работы и основные результаты.

Медленно меняющейся (на бесконечности) функцией называется измеримая, положительная на полуоси $[A;+\infty)$, $A > 0$ функция $l(t)$, такая что для произвольного $\lambda > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1. \tag{3}$$

Функция $l(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если $l(1/x)$ медленно меняется (на бесконечности).

Здесь и далее $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Пусть $p > 0$, $\alpha \geq -1$, $l(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда через $A^p_{\alpha,l(t)}$ обозначим пространство функций, аналитических в единичном круге Δ, таких что

$$\|f\|^p_{p,\alpha,l(t)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta} |f(z)|^p \cdot (1-r^2)^\alpha \cdot l\left(\frac{1}{1-r}\right) dxdy < \infty.$$

При рассмотрении пространства $A^p_{-1,l(t)}$ на функцию $l(t)$ накладывается дополнительное условие

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{t} \cdot l\left(\frac{1}{t}\right)\, dt < \infty. \tag{4}$$

Условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы классы $A^p_{-1,l(t)}$ были нетривиальны.

Кроме того, мы, как правило, предполагаем, что $l(t)$ ограничена и отделена от нуля в любой окрестности нуля.

Первая глава посвящена поведению нулей функций из пространств $A^p_{\alpha,l(t)}$. Поскольку случаи $\alpha > -1$ и $\alpha = -1$ существенно различаются, они рассматриваются отдельно. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f \in A^p_{\alpha,l(t)}$, $f(0) \neq 0$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $\{z_k\}$ *— последовательность нулей функции* f*, упорядоченная в порядке неубывания модуля,* $l(t)$ *— функция, медленно меняющаяся на бесконечности и ограниченная в любой окрестности нуля. Тогда имеет место оценка*

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{|z_k|} \leq C(p,\alpha,l(t)) N^{\frac{1+\alpha}{p}} \big(l(N)\big)^{-\frac{1}{p}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

В случае $\alpha = -1$ оценка (5) заменяется следующей:

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{|z_k|} \leq C(p,l(t)) \cdot \big(\mathcal{L}(N)\big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{L}(x) = \int\limits_0^{1/x} \frac{1}{t} \cdot l\left(\frac{1}{t}\right)\, dt.$$

Из (6) вытекает следующая оценка:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{N(1-|z_N|)}{\log\big(1/\mathcal{L}(N)\big)} \leq \frac{1}{p}.$$

Константа $1/p$ в правой части последней оценки точна, что доказано в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $0 < p < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся медленно меняющаяся на бесконечности функция $l(t)$, удовлетворяющая условию $\mathcal{L}(1) < \infty$, и функция $f \in A^p_{-1,\,l(t)}$, такие, что*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{N(1-|z_N|)}{\log\bigl(1/\mathcal{L}(N)\bigr)} > \frac{1}{p(1+\varepsilon)}.$$

В доказательстве теоремы используются полученные в настоящей работе достаточные условия принадлежности функций пространствам $A^p_{\alpha,l(t)}$ в терминах её коэффициентов Тейлора. Они также находят своё применение при изучении роста модуля функций из этих пространств в третьей главе. Остановимся подробнее на этих условиях при $\alpha = -1$.

Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Положим

$$S_n^{(q)} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^q.$$

Теорема. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — аналитическая функция в единичном круге Δ, $l(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда $f \in A^2_{-1,\,l(t)}$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \mathcal{L}(n) < \infty.$$

Теорема. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p \geq 2, \quad l(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда если*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^{(q)}}{n+1} \mathcal{L}(n)^{q-1} < \infty,$
2. $S_n^{(q)} \cdot \mathcal{L}^{q-1}(n) = O(1), \qquad n \to \infty$

то $f(z) \in A^p_{-1,\,l(t)}$.

Теорема. *Пусть* $0 < p < 2$, $0 < \delta < 2/p$ *и* $l(t)$ *— медленно меняющаяся на бесконечности функция, такая что*

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{r} \cdot l^{\frac{p\delta}{2}} \left(\frac{1}{r}\right) dr < \infty.$$

Пусть $S_N^{(2)} = O\left(l(N)^{-(2/p-\delta)}\right)$. *Тогда* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^p_{-1,\,l(t)}$

В первой части первой главы аналогичные теоремы доказаны для пространств $A^p_{\alpha,l(t)}$, $\quad \alpha > -1$.

Во второй главе, опираясь на результаты первой, изучается вопрос о полноте систем экспонент в пространствах функций, интегрируемых с некоторым весом на полупрямой.

Определение. *Через* $L^p_{\alpha,l(t)}(\mathbb{R}_+)$ $(1 < p < \infty,\ \alpha \geq -1, l(t)$ *— медленно меняющаяся на бесконечности функция) обозначим пространство функций* f *на* $\mathbb{R}_+$, *таких что*

$$\|f\|^p_{p,\alpha,l} = \int\limits_0^\infty |f(t)|^p\, t^\alpha\, l\left(\frac{1}{t}\right) dt < \infty.$$

Рассматривая пространство $L^p_{\alpha,l(t)}$, мы будем предполагать, что функция $l(t)$ ограничена и отделена от нуля на любом интервале вида (a,b), $0 < a < b < \infty$. Как уже упоминалась, наибольший интерес представляет случай $\alpha = p - 2$.

Неполнота системы

$$\left\{e^{-\lambda_n t}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \Re\lambda_n > 0 \qquad (7)$$

в $L^p_{\alpha,l(t)}$ равносильна существованию нетривиальной аналитической функции вида

$$G(w) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} g(t)\, dt, \quad u = \Re w > 0, \qquad (8)$$

такой что $G(\lambda_n)=0$ и $g(t)\in L^q_{-\alpha q/p,\,l(t)^{-q/p}}$. Здесь и далее $1/p+1/q=1$.

Таким образом, вопрос о полноте систем (7) в пространствах $L^p_{\alpha,l(t)}$ сводится к вопросу о поведении нулей функций вида (8) с функциями $g(t)\in L^q_{-\alpha q/p,\,l(t)^{-q/p}}$. Важным промежуточным шагом при этом служат доказанные в диссертации теоремы о преобразовании Лапласа как операторе на $L^p_{\alpha,l(t)}$. Вначале нам понадобится следующее определение.

Определение. *Обозначим через $A^p_{\alpha,l(t)}\{\Re w>0\}$ пространство функций, аналитических в полуплоскости $\{\Re w>0\}$, таких что*

$$\|f\|^p_{p,\alpha,l}=\int\limits_{u>0}|f(w)|^p u^\alpha l\left(\frac{1}{u}\right)du\,dv<\infty.$$

Теорема. *Пусть $2\le q<\infty$, $l(x)$ — медленно меняющаяся в 0 и на бесконечности функция, отделённая от 0 и ограниченная на всех интервалах вида (a,b), $0<a<b<\infty$. Пусть также $\mathcal{L}(x)<\infty$, $0<x<\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\mathcal{L}(x)=\infty$. Тогда если $g\in L^q_{q-2,\mathcal{L}(1/t)}$, то функция*

$$G(w)=\int\limits_{\mathbb{R}_+}e^{-wt}g(t)\,dt$$

принадлежит пространству $A^q_{-1,l(t)}\{\Re w>0\}$ и

$$\|G(w)\|_{q,-1,l(t)}\le c\|g\|_{q,q-2,\mathcal{L}(1/t)},$$

где константа c не зависит от g.

Теорема. *Пусть медленно меняющаяся в 0 и на бесконечности функция $l(x)$ ограничена и отделена от 0 на интервалах вида (a,b), $0<a<b<\infty$, и пусть $\mathcal{L}(x)<\infty$ при $0<x<\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\mathcal{L}(x)=\infty$. Тогда если $G(w)\in A^q_{-1,l(t)}(\Re w>0)$, $1<q\le 2$, то $G(w)$ представима в виде*

$$G(w)=\int\limits_{\mathbb{R}_+}e^{-wt}g(t)\,dt,$$

где $g(t) \in L^q_{q-2,\mathcal{L}(1/t)}$ *и*

$$\|g\|_{q,q-2,\mathcal{L}(1/t)} \le c\|G(w)\|_{q,-1,l(t)},$$

причём c *не зависит от* $G(w)$.

При $q = 2$ из последних двух теорем вытекает следующая теорема типа Пэли-Винера.

Следствие. *Пусть медленно меняющаяся в 0 и на бесконечности функция* $l(x)$ *ограничена и отделена от 0 на интервалах вида* (a, b), $\quad 0 < a < b < \infty$. *Пусть* $\mathcal{L}(x) < \infty$ *при* $0 < x < \infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \mathcal{L}(x) = \infty$. *Тогда пространство* $A^2_{-1,l(t)}\{\Re w > 0\}$ *совпадает с пространством функций, представимых в виде*

$$G(w) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} g(t)\, dt, \quad g \in L^2_{0,\mathcal{L}(1/t)},$$

причём

$$c_1\|g\|_{2,0,\mathcal{L}(1/t)} \le \|G(w)\|_{2,-1,l(t)} \le c_2\|g\|_{2,0,\mathcal{L}(1/t)}.$$

Константы c_1 *и* c_2 *не зависят от функции* g.

Аналогичные теоремы доказаны для пространств $L^p_{\beta,l(t)}$ при $\beta < q - 2$.

С помощью перечисленных теорем в диссертации доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $L(t)$ *— дифференцируемая, медленно меняющаяся на бесконечности функция, ограниченная вне некоторой окрестности 0, и такая, что* $L(t) \to \infty, \quad t \to 0$. *Пусть также функция*

$$l(t) = -(q/pt)L(1/t)^{-q}L'(1/t)$$

ограничена, отделена от нуля на всех интервалах вида $[0, a), \quad 0 < a < \infty$, *и медленно меняется в 0 и на бесконечности. Тогда*

1) *если* $1 < p \le 2$, *и последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ *такова, что*

$$\delta(\Lambda) = \limsup_{t\to\infty} \frac{N_\Lambda(t)}{t \log\left(L(1/t)^{q/p}\right)} > \frac{1}{q}, \tag{9}$$

то система $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ *полна в* $L^p_{p-2,L(t)}$.

2) если $p \ge 2$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и для любой функции* L, *с описанными выше свойствами, и такой что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{-\delta q/p}(1/n)}{n+1} < \infty,$$

найдётся последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, *такая что система* $\left\{e^{-\lambda_n t}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *неполна в* $L^p_{p-2,L(t)}$ *и* $\delta(\Lambda) \ge \frac{1}{q} - \varepsilon$.

При $p = 2$ из второго пункта теоремы вытекает точность константы $1/q$ в правой части (9).

Третья глава посвящена изучению роста функций из весовых пространств Бергмана на единичном круге.

Теорема. *Пусть функция* $f(z)$ *принадлежит пространству* $A^p_{\alpha,l(t)}, 0 < p < \infty, \quad \alpha \ge -1, \quad l(t)$ *— медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда имеет место следующая оценка роста модуля функции при приближении к единичной окружности:*

$$|f(re^{i\theta})| = o\left((1-r)^{-\frac{2+\alpha}{p}} l^{-1/p}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right), \quad r \to 1. \tag{10}$$

Далее показано, что при $\alpha > -1$ в оценке (10) нельзя заменить символ "o" ни на одну конкретную положительную, стремящуюся к 0 функцию:

Теорема. *Пусть* $\varphi(r) > 0$, $0 \le r < 1$ *и пусть* $\varphi(r) \to 0$, $r \to 1 - 0$. *Тогда существует такая функция* $f \in A^p_{\alpha,l(t)}, \quad (2 \le p < \infty, \quad \alpha > -1)$, *что*

$$|f(r_n)| \ge c\varphi(r_n)(1-r_n)^{-(2+\alpha)/p} l^{-1/p}\left(\frac{1}{1-r_n}\right),$$

где r_n *— последовательность вещественных чисел, таких что* $0 < r_1 < \cdots < r_n < \cdots < 1, \quad r_n \to 1, \quad c$ *— некоторая константа.*

Кроме того, в третьей главе при определённых ограничениях на функцию $l(t)$ получено утверждение о факторизации, то есть разложение произвольной функции из пространств $A^p_{\alpha,l(t)}$ в произведение функции из того же пространства, не имеющей нулей, и произведения типа Бляшке.

Пусть $\{z_k\}$ — произвольное подмножество последовательности нулей функции f,

$$\begin{aligned} c_a(z) &= \frac{a-z}{1-\bar{a}z}, \quad (|a|<1) \\ B_a(z) &= \frac{|a|}{a}c_a(z) = \frac{|a|}{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}, \quad (0<|a|<1) \\ B_0(z) &= -c_0(z) = z. \\ h(z) &= \prod_{k=1}^{\infty} B_{z_k}(z)(2-B_{z_k}(z)). \end{aligned}$$

Тогда функция $g(z) = f(z)/h(z)$ также принадлежит пространству $A^p_{\alpha,l(t)}$, причем

$$\|g\|_{p,\alpha,l} \le c\|f\|_{p,\alpha,l}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Анатолию Мечиславовичу Седлецкому за постановку интересной задачи, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] *Бирюков Л.Н.* Распределение нулей функций из классов $A_{p,-1,l}$ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2005. N5. С.13-20.

[2] *Biryukov L.N.* Some theorems on integrability of Laplace transforms and their applications // Integral Transforms and Special Functions. 2007. V.18, N7. P.459-469.

[3] *Бирюков Л.Н.* Классы Бергмана с весом в виде медленно меняющейся функции // Тезисы 12-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2004. С.24-25.

[4] *Бирюков Л.Н.* Полнота систем экспонент в прострас330нтвах $L_{p,\alpha,l}$ // Тезисы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. С. 55-56.