Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.745

Чувашова Ольга Валерьевна

Действия подторов и инвариантные схемы Гильберта

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент И. В. Аржанцев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Д. И. Панюшев
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А. Г. Кузнецов
Ведущая организация:	Омский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится 9 ноября 2007 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 9 октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В современной трактовке теория инвариантов изучает действия линейных алгебраических групп на алгебраических многообразия. Пусть V — векторное пространство над полем k, G — связная редуктивная алгебраическая группа. Рассмотрим линейное действие $G : V$. Изучаемые в современной теории инвариантов свойства замыканий орбит $X = \overline{Gv} \subset V$ можно условно разделить на четыре группы:
(1) "комбинаторные" (число орбит в $\overline{Gv}$, граф примыканий орбит, ...),
(2) алгебро-геометрические (гладкость, нормальность, коэн - маколеевость, типы особенностей, ...),
(3) топологические (стягиваемость, односвязность, вычисление гомологий и когомологий, высших гомотопических групп, ...),
(4) свойства вложения $\overline{Gv} \subset V$ (размерность линейной оболочки, гиперплоские сечения, описание идеала, задающего многообразие, ...).

Свойство отделимости (в смысле работы Х. Крафта и Н. Р. Воллаха [KW][1]) относится к наиболее естественным свойствам четвертого типа. Его выполнение означает , что для любой однородной гиперплоскости H пересечение $H \cap X$ линейно порождает H. Впервые вопрос о свойстве отделимости появился у Й.-К. Янтцена в связи с работой А. Премета [P][2]:
В о п р о с. Пусть k — алгебраически замкнутое поле, G — простая алгебраическая группа и $\mathfrak{g}$ — ее касательная алгебра. Верно ли, что минимальная нильпотентная орбита в $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного представления обладает свойством отделимости?

Ответ на этот вопрос получен Х. Крафтом и Н. Р. Воллахом [KW]. Он положителен для всех простых групп за исключением Sp_{2n}. В этой работе также введены понятия "сильного"и "слабого"свойств отделимости и найдены простые критерии выполнения свойств отделимости для орбиты старшего вектора неприводимого представления связной полупростой группы. Доказано, что для такого представления типичная орбита обладает свойством отделимости, и если орбита старшего вектора обладает свойством отделимости, то любая орбита представления обладает свойством отделимости.

[1][KW] H. Kraft and N.R. Wallach *On the separation property of orbits in representation spaces* //, Journal of Algebra, vol. 258, 2002, p. 228-254.

[2][P] A. Premet *Support varieties of non-restricted modules over Lie algebras of reductive groups* // J. London Math. Soc., vol. 55, №2, 1997, p. 236-250.

Следующим этапом изучения действий редуктивный групп на аффинных многообразиях является переход от изучения индивидуальных свойств замыканий орбит к изучению семейств таких замыканий и описанию схем, параметризующих такие семейства. Фундаментальным результатом теории проективных многообразий является существование схемы Гильберта, т.е. проективной схемы, параметризующей замкнутые подсхемы в проективном пространстве с фиксированным многочленом Гильберта. Обобщению классической конструкции схемы Гильберта на другие естественные семейства подсхем посвящено множество работ. В контексте действия алгебраического тора T на аффинном многообразии $\mathbb{X}$ естественным аналогом классической схемы Гильберта является мультиградуированная схема Гильберта, которая параметризует замкнутые T-инвариантные подсхемы в $\mathbb{X}$, алгебра регулярных функций на которых имеет заданную функцию Гильберта относительно градуировки весами T. Существование такой схемы доказано в работе И. Пеевы и М. Стилмана [PS][3] для случая, когда $\mathbb{X}$ — конечномерный T-модуль, на котором нет непостоянных T-инвариантов, а в качестве функции Гильберта рассматривается функция Гильберта замыкания типичной T-орбиты (такая схема называется торической схемой Гильберта). В работе М. Хаймана и Б. Штурмфелса [HS][4] введено понятие мультиградуированной схемы Гильберта для случая произвольной функции Гильберта и доказано ее существование. Наконец, в работе В. Алексеева и М. Бриона [AB][5] это понятие обобщено на случай действия связной редуктивной группы G на аффинном многообразии $\mathbb{X}$ и доказано существование инвариантной схемы Гильберта, которая параметризует замкнутые G-инвариантные подсхемы в $\mathbb{X}$ с фиксированной структурой G-модуля на алгебре регулярных функций.

Задача описания инвариантной схемы Гильберта является важным этапом классификации аффинных многообразий, снабженных действием редуктивной группы. Однако в общей постановке задачи вряд ли можно рассчитывать на ее эффективное решение. Поэтому нужно выделить некоторые естественные классы действий. Задача описания торической схемы Гильберта для действия тора T на аффинном многообразии $\mathbb{X}$ особенно интересна, так как торическая схема Гильберта параметризует замыкания типичных T-орбит и их плоские пределы, и, следовательно, может рас-

[3][PS] Peeva I. and Stillman M. Toric Hilbert schemes // Duke Math. J., vol. 111, 2002, p. 419–449

[4][HS] Haiman M. and Sturmfels B. Multigraded Hilbert schemes // J. Algebraic Geom., vol. 13, 2004, p. 725–769.

[5][AB] Alexeev V. and Brion M. Moduli of affine schemes with reductive group action // J. Algebraic Geom., vol. 14, 2005, p. 83–117.

сматриваться как один из возможных факторов действия T на $\mathbb{X}$. Помимо схемы Гильберта существуют и другие естественные формализации понятия фактора многообразия по действию тора, одной из которых является фактор Чжоу. Торический фактор Чжоу *проективного* T-многообразия $\mathbb{Y}$ параметризует T-инвариантные циклы в $\mathbb{Y}$ той же размерности и степени, что и замыкание типичной T-орбиты. Он изоморфен неприводимой компоненте обратного предела GIT-факторов действия T на $\mathbb{Y}$. Торический фактор Чжоу рассматривался в работе М. Капранова, Б. Штурмфелса и А. Зелевинского [KSZ][6]. В частности, в случае, когда $\mathbb{Y}$ — торическое многообразие для большего тора $\mathbb{T}$, получено описание его веера. Напомним, что веер проективного многообразия является нормальным веером к некоторому выпуклому многограннику P в пространстве, порожденном решеткой характеров тора $\mathbb{T}$. Пусть Q — проекция этого многогранника на подпространство $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}$, порожденное решеткой характеров подтора T. Тогда веер фактора Чжоу — это нормальный веер к многограннику слоев (the fiber-polytope) $F(P,Q)$ Л. Й. Биллеры и Б. Штурмфелса, см. [BS][7], который является усреднением слоев проекции P на Q. В случае аффинного T-многообразия $\mathbb{X}$ понятие фактора Чжоу не имеет смысла, однако можно по-прежнему рассматривать главную неприводимую компоненту обратного предела GIT-факторов. В случае, когда $\mathbb{X}$ является торическим многообразием для большего тора $\mathbb{T}$, для описания веера главной компоненты обратного предела GIT-факторов в работе А. Крау и Д. Маклаган [CM][8] было введено понятие веера слоев для проекции произвольных полиэдров.

Цель работы

Целью работы является изучение индивидуальных свойств замыканий орбит для действия тора на аффинном многообразии, а также свойств семейств таких замыканий. Перед автором стояли следующие задачи:

- исследовать свойства отделимости для замыканий орбит алгебраического тора T в конечномерном T-модуле и его проективизации;
- изучить строение торической схемы Гильберта для действия тора T на аффинном многообразии $\mathbb{X}$ и, в частности, для случая, когда $\mathbb{X}$

[6][KSZ] Kapranov M., Sturmfels B., and Zelevinsky A. Quotients of toric varieties // Math. Ann., vol. 290, 1991, p. 644–655.

[7][BS] Billera L. J. and Sturmfels B. Fiber polytopes // Ann. of Math., vol. 135, №2, 1992, p. 527–549.

[8][CM] Craw A. and Maclagan D. Fiber fans and toric quotients // Discrete Comput. Geom., vol.37, №2, 2007, p. 251-266.

является торическим многообразием относительно действия большего тора $\mathbb{T}$, содержащего T в качестве подтора;

- исследовать строение инвариантной схемы Гильберта для диагональных представлений классических линейных групп.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- получен критерий выполнения свойств отделимости для замыканий орбит алгебраического тора T в конечномерном T-модуле и его проективизации в терминах комбинаторных свойств взаимного расположения весов представления;
- описан веер главной компоненты торической схемы Гильберта для действия тора T на аффинном многообразии торическом относительно большего тора, что привело к определению целочисленного аналога многогранника слоев Биллеры-Штурмфелса.
- доказано, что инвариантная схема Гильберта для действия классической линейной группы на нескольких копиях ее тавтологического представления однозначно восстанавливается по инвариантной схеме Гильберта для случая, когда число копий равно размерности тавтологического представления; приведена явная конструкция такого восстановления.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории торических многообразий, теории алгебраических групп преобразований и теории инвариантов, алгебраической геометрии, теории представлений редуктивных алгебраических групп, а также комбинаторные метода выпуклой геометрии.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретических характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории алгебраических групп преобразований и алгебраической геометрии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. "Группы Ли и теория инвариантов" под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (2005);

2. "Алгебраическая геометрия" под руководством В. В. Батырева и Ю. Хаусена в Математическом институте им. Э. Карлса (Тюбинген, Германия, 2006);

3. "Геометрия алгебраических многообразий"под руководством Д. Б. Каледина и А. Г. Кузнецова в Московском математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (2006);

4. "Алгебра и геометрия" под руководством М. Бриона в институте им. Ж. Фурье (Гренобль, Франция, 2007).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 3 глав. Общий объем диссертации составляет 91 страницу. Список литературы содержит 29 наименований.

Краткое содержание работы

Введение

Здесь изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также описана структура и краткое содержание диссертации.

Первая глава

Цель первой главы диссертации — исследовать свойства отделимости для замыканий орбит тора в векторных и проективных пространствах над алгебраически замкнутым полем. Это простейшее обобщение теоремы [KW, Теор. 1] на случай приводимых представлений редуктивных групп.

В первом разделе приводятся определения свойств отделимости и простейшие примеры.

Определение. Подмножество X векторного пространства V обладает *свойством отделимости* (the separation property, кратко — (SP)), если для любой пары линейно независимых линейных функций $\alpha, \beta \in V^*$ найдется точка $x \in X$ такая, что $\alpha(x) = 0$ и $\beta(x) \neq 0$.

Другими словами, свойство отделимости для $X \subset V$ означает, что для любой пары $H \neq H'$ однородных гиперплоскостей в V выполняется $H \cap X \not\subseteq H'$. Или, эквивалентно, для любой однородной гиперплоскости H пересечение $H \cap X$ линейно порождает H.

Определение. Подмножество X векторного пространства V обладает *слабым свойством отделимости* (the weak separation property, кратко — (WSP)), если для любой пары однородных гиперплоскостей $H \neq H'$ имеем $H \cap X \neq H' \cap X$ (пересечения в теоретико-множественном смысле).

Очевидно, что из выполнения свойства отделимости следует выполнение слабого свойства отделимости. Свойства отделимости для подмножеств в проективном пространстве определяются аналогично.

Во втором разделе мы рассматриваем свойства отделимости для гиперповерхностей и показываем, что подмножество в векторном пространстве обладает (SP) (соотв. (WSP)) тогда и только тогда, когда все его содержащие гиперповерхности обладают (SP) (соотв. (WSP)).

В третьем разделе вводятся понятия характеристического многообразия и слабого характеристического многообразия произвольного подмножества $X \subset V$ (либо $X \subset \mathbb{P}(V)$):

$$\mathrm{Ch(X)} = \{(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \in \mathbb{P}(\mathrm{V}^*) \times \mathbb{P}(\mathrm{V}^*) \ : \ \alpha(\mathrm{x}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\beta(x) = 0 \quad \forall x \in X\};$$

$$\mathrm{Chw(X)} = \{(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \in \mathbb{P}(\mathrm{V}^*) \times \mathbb{P}(\mathrm{V}^*) \ : \ \alpha(\mathrm{x}) = 0 \iff$$

$$\beta(x) = 0 \quad \forall x \in X\}.$$

Заметим, что X обладает свойством отделимости (соотв. слабым свойством отделимости) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ch(X)}$ (соотв. $\mathrm{Chw(X)}$) совпадает с диагональю $D = (\langle\alpha\rangle, \langle\alpha\rangle)$. После этого доказывается:

Теорема 1. *Пусть аффинное подмногообразие $X \subset V$ неприводимо, не содержится в однородной гиперплоскости, пересекается с любой однородной гиперплоскостью и* $\dim X > 1$. *Тогда* $\mathrm{Ch(X)}$ *и* $\mathrm{Chw(X)}$ *замкнуты в* $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$.

Для проективного случая имеет место аналогичная теорема.

Теорема 2. *Пусть алгебраическое подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}(V)$ неприводимо, не содержится в гиперплоскости, и* $\dim Y > 0$. *Тогда* $\mathrm{Ch(Y)}$ *и* $\mathrm{Chw(Y)}$ *замкнуты.*

В четвертом разделе мы рассматриваем случай, когда V — конечномерный T-модуль, а X — T-инвариантное подмножество. Используя тот факт, что алгебраический тор, действующий на проективном многообразии, имеет неподвижную точку, мы доказываем:

Предложение 1. *Если X не обладает свойством отделимости и* $\mathrm{Ch(X)}$ *замкнуто, то существует пара* $(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \in \mathrm{Ch(X)}$ *такая, что α и β собственны для T и линейно независимы.*

Это предложение позволяет упростить доказательство критерия отделимости для SL_2-орбит бинарных форм, полученного в диссертации К. Баур [B][9].

Теорема [3.4, B]. *Пусть $f \in k[x, y]_n$. Тогда орбита $O_f = SL_2 \cdot f$ обладает свойством отделимости тогда и только тогда, когда форма f имеет линейный делитель кратности один.*

Это более простое доказательство мы приводим в пятом разделе.

Наконец, в шестом разделе мы исследуем свойства отделимости для замыканий орбит представления тора. Пусть T — алгебраический тор, $\mathcal{X}(T)$ — решетка характеров T. Рассмотрим линейное действие $T : V$, где

$$t \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\chi_1(t)x_1, \ldots, \chi_n(t)x_n).$$

Пусть Σ — моноид в $\mathcal{X}(T)$, порожденный характерами $\chi_1, \ldots, \chi_n$, и $K = \mathrm{cone}(\Sigma) \subset \mathcal{X}(\mathrm{T})_{\mathbb{Q}}$.

Теорема 3. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T \cdot (1, \ldots, 1)} \subset V$ обладает свойством отделимости тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

[9][B] Baur K. Two Contributions to the Representation Theory of Algebraic Groups. Doctoral Thesis, Basel, 2002.

(1) конус K острый;
(2) $\mathbb{Q}_+\chi_i$ является ребром K для любого i;
(3) $\mathbb{Q}_+\chi_i \neq \mathbb{Q}_+\chi_j$ при $i \neq j$.

Для проективного действия тора верно следующее:

Теорема 4. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T \cdot (1 : \ldots : 1)} \subset \mathbb{P}(V)$ обладает свойством отделимости тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
(1) для любого i точка χ_i является вершиной выпуклой оболочки $\mathrm{conv}\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$;
(2) $\chi_i \neq \chi_j$ при $i \neq j$.

Для слабого свойства отделимости мы получили следующие теоремы.

Теорема 5. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T \cdot (1, \ldots, 1)} \subset V$ обладает слабым свойством отделимости тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
(1) конус K острый;
(2) во внутренности любой грани конуса K лежит не более одного характера χ_i (в частности, $\mathbb{Q}_+\chi_i \neq \mathbb{Q}_+\chi_j$ при $i \neq j$).

Теорема 6. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T \cdot (1 : \ldots : 1)} \subset \mathbb{P}(V)$ обладает слабым свойством отделимости тогда и только тогда, когда во внутренности любой грани выпуклой оболочки $\mathrm{conv}\{\chi_1, \ldots, \chi_{\mathrm{n}}\}$ лежит не более одного χ_j (в частности, $\chi_i \neq \chi_j$ при $i \neq j$).*

Вторая глава

Во второй главе мы переходим от исследования индивидуальных свойств замыканий орбит к изучению семейств замыканий типичных орбит и их плоских пределов, а именно, к рассмотрению торических схем Гильберта, параметризующих такие семейства.

Первый раздел второй главы вводный. Мы напоминает основные определения из выпуклой геометрии, теории торических многообразий, а также приводим определение мультиградуированной схемы Гильберта и основные результаты о ее существовании. Мультиградуированная схема Гильберта определяется посредством описания ее функтора точек. Пусть $\mathbb{X}$ — аффинное многообразие, снабженное действием алгебраического тора T. Следующее определение было введено в работе М. Хаймана и Б. Штурмфелса [HS].

Определение. Фиксируем функцию $h : \mathcal{X}(T) \to \mathbb{Z}_+$. *Функтором Гильберта* называется контравариантный функтор из категории схем в категорию множеств, который каждой схеме S сопоставляет множество замкнутых T-инвариантных подсхем $X \subset S \times \mathbb{X}$ таких, что $p_*(\mathcal{O}_X)_\chi$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_S$-модулей ранга $h(\chi)$ для любого $\chi \in \mathcal{X}(T)$ (здесь $p : X \to S$ — проекция).

В [Теор. 1.1, HS] было доказано, что существует квазипроективная схема $H^h_{\mathbb{X},T}$, которая представляет функтор Гильберта в случае, когда $\mathbb{X}$ является конечномерным T-модулем. В [Лемма 1.6, AB] это утверждение было обобщено на случай произвольного аффинного T-многообразия $\mathbb{X}$. В работе [HS] было также доказано, что в случае, когда $k[\mathbb{X}]^T = k$, схема Гильберта $H^h_{\mathbb{X},T}$ проективна. Мы доказываем более сильное утверждение: если $h(0) = 1$, то существует проективный морфизм из схемы Гильберта $H^h_{\mathbb{X},T}$ в категорный фактор $\mathbb{X}//T$.

Начиная со второго раздела мы рассматриваем случай торической схемы Гильберта. Пусть $\mathbb{X}$ — аффинное T-многообразие, причем T действует на $\mathbb{X}$ эффективно. Положим

$$\Sigma := \{\chi \in \mathcal{X}(T) \ : \ k[\mathbb{X}]_\chi \neq 0\}.$$

Точки $x \in \mathbb{X}$ такие, что замыкание орбиты $\overline{Tx}$ имеет следующую функцию Гильберта

$$h_\Sigma(\chi) := \begin{cases} 1 & \text{если} \quad \chi \in \Sigma, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

образуют открытое подмножество $\mathbb{X}^s$ в $\mathbb{X}$. Мы будем обозначать $H_{\mathbb{X},T}$ мультиградуированную схему Гильберта $H^{h_\Sigma}_{\mathbb{X},T}$; она называется *торической схемой Гильберта* [PS]. Таким образом, каждая точка $x \in \mathbb{X}^s$ задает k-рациональную точку $\overline{Tx} \in H_{\mathbb{X},T}$. Мы доказываем, что это соответствие продолжается до открытого вложения геометрического фактора $\mathbb{X}^s/T$ в $H_{\mathbb{X},T}$. Замыкание образа этого вложения называется *главной компонентой* H_0 схемы Гильберта $H_{\mathbb{X},T}$. Это неприводимая компонента схемы $H_{\mathbb{X},T}$, которая параметризует замыкания типичных T-орбит и их плоские пределы.

В третьем разделе мы рассматриваем случай, когда $\mathbb{X}$ — это аффинное торическое многообразие для тора $\mathbb{T}$. Пусть задан подтор $T \subset \mathbb{T}$, действие которого на $\mathbb{X}$ задано ограничением действия $\mathbb{T}$. Вложение $T \subset \mathbb{T}$ определяет сюръективное линейное отображение решеток характеров

$$\pi : \mathcal{X}(\mathbb{T}) \to \mathcal{X}(T),$$

которое характеру тора $\mathbb{T}$ сопоставляет его ограничение на подтор T. Положим

$$\Omega := \{\chi \in \mathcal{X}(\mathbb{T}) \ : \ k[\mathbb{X}]_\chi \neq 0\},$$

тогда $\pi(\Omega) = \Sigma$. Будем обозначать $\Lambda(T)$ решетку однопараметрических подгрупп тора T. Фактортор $\mathbb{T}/T$ естественным образом действует на торической схеме Гильберта $H_{\mathbb{X},T}$, причем главная компонента H_0 является торическим (не обязательно нормальным) многообразием относительно этого действия. Главный результат второй главы — это явное описание веера этого торического многообразия.

Теорема 7. *Веер $\mathcal{C}_{H_0} \subset \Lambda(\mathbb{T})_\mathbb{Q}$ торического $\mathbb{T}/T$-многообразия H_0 — это пересечение нормальных вееров $\mathcal{C}_\chi$ полиэдров*

$$P_\chi := \operatorname{conv}(\pi^{-1}(\chi) \cap \Omega) \subset \mathcal{X}(\mathbb{T})_\mathbb{Q},$$

где $\chi \in \Sigma$.

Если $\mathbb{X}$ является конечномерным T-модулем таким, что $k[\mathbb{X}]^T = k$, то веер H_0 совпадает с нормальным веером к структурному многограннику (the state polytope) в смысле Б. Штурмфелса (см. [Теор. 2.5, St][10]).

Пример. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{A}^n$, $\mathbb{T} = \mathbb{G}_m^n$ действует на $\mathbb{A}^n$ диагонально, $T = \mathbb{G}_m$, и пусть веса $\mathcal{X}(T)$-градуировки алгебры $k[x_1, \ldots, x_n]$ положительны.

(1) Рассмотрим случай $n = 3$. Комбинируя результаты Арнольда, Коркиной, Поста и Роелофса (см. [Ar][11] и [KPR][12]) и явное описание пределов однопараметрических подгрупп из доказательства теоремы 7, получаем, что в этом случае торическая схема Гильберта неприводима.

(2) Пусть $n = 4$, и пусть T действует на $\mathbb{A}^4$ с весами $\chi_1 = 1, \chi_2 = 3, \chi_3 = 4, \chi_4 = 7$. Тогда торическая схема Гильберта приводима. Более того, в $H_{\mathbb{A}^n,T}$ имеется бесконечно много $\mathbb{G}_m^n$-орбит [Теор. 10.4, St].

В случае, когда многообразие $\mathbb{X}$ нормально, мы приводим точное описание характеров $\chi \in \Sigma$, имеющих совпадающие веера $\mathcal{C}_\chi$. Существует лишь конечное число таких классов эквивалентности характеров, и веер $\mathcal{C}_{H_0}$ является нормальным веером к сумме Минковского полиэдров P_χ их представителей.

---

[10][St] Sturmfels B. Gröbner bases and convex polytopes. Univ. Lecture Ser. 8, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1996.

[11]Arnold V. I. A-graded algebras and continued fractions // Communications in Pure and Applied math., vol. 42, 1989, p. 993-1000.

[12]Korkina E., Post G. and Roelofs M. Classification of generalized A-graded algebras with 3 generators // Bulletin des Sciences Mathémathiques, vol. 119, 1995, 267-287.

Пример. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{A}^n$, $\mathbb{T} = \mathbb{G}_m^n$ действует на $\mathbb{A}^n$ диагонально, и пусть $T = \mathbb{G}_m$ действует на $\mathbb{A}^n$ с характерами $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ — это множество векторов с неположительными координатами, и $\Sigma \subset \mathbb{Z}$ — это полугруппа, порожденная характерами $-\chi_i$. Пусть n_+ и n_- — количества положительных и отрицательных χ_i соответственно. Пусть χ_+ (соотв. χ_-) — это наименьшее общее (положительное) кратное всех положительных (соотв. отрицательных) χ_i. Тогда P_{H_0} эквивалентен сумме Минковского полиэдров P_χ, где $-n_+\chi_+ < \chi < n_-\chi_-$.

Показательным является сравнение веера схемы Гильберта с веером обратного предела GIT-факторов $\mathbb{X}/_\chi T$ [AH][13]. Для характера $\chi \in \Sigma$ рассмотрим алгебру

$$k[\mathbb{X}]^{(\chi)} := \bigoplus_{r=0}^{\infty} k[\mathbb{X}]_{r\chi}.$$

Определение. Многообразие

$$\mathbb{X}/_\chi T := \mathrm{Proj}\ \ k[\mathbb{X}]^{(\chi)}$$

называется *GIT-фактором* отвечающим характеру $\chi \in \Sigma$.

В частности, $\mathbb{X}/_0 T = \mathbb{X}/\!/T = \mathrm{Spec}\,(k[\mathbb{X}]^T)$. Также отметим, что $\mathbb{X}/_\chi T = \mathbb{X}_\chi^{ss}/\!/T$, где $\mathbb{X}_\chi^{ss}$ — это множество точек $x \in X$, для которых существует $n \in \mathbb{N}$ и $f \in k[\mathbb{X}]_{r\chi}$ такая, что $f(x) \neq 0$. Хорошо известно, что существует лишь конечное число характеров $\chi \in \Sigma$, для которых множества $\mathbb{X}_\chi^{ss}$ попарно различны. Таким образом морфизмы факторизации $q_\chi : \mathbb{X}_\chi^{ss} \to \mathbb{X}/_\chi T$ образуют конечную обратную систему с конечным элементом $q_0 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/\!/T$ (морфизмы между $\mathbb{X}_\chi^{ss}$ задаются включениями внутри $\mathbb{X}$). Мы имеем морфизм обратных пределов:

$$q : \mathbb{X}^{ss} := \bigcap_{\chi \in \Sigma} \mathbb{X}_\chi^{ss} \to \varprojlim \mathbb{X}/_\chi T =: \mathbb{X}/_C T.$$

Главной компонентой $(\mathbb{X}/_C T)_0$ обратного предела $\mathbb{X}/_C T$ называется замыкание образа $q(\mathbb{X}^{ss})$. В случае, когда $\mathbb{X}$ является торическим многообразием для большего тора $\mathbb{T}$, главная компонента $(\mathbb{X}/_C T)_0$ является торическим многообразием для фактортора с веером $\mathcal{C}_\mathbb{Q} \subset \Lambda(\mathbb{T})_\mathbb{Q}$ совпадающим с пересечением (для $\chi \in \Sigma$) нормальных вееров $\mathcal{C}_\chi^\mathbb{Q}$ полиэдров

$$P_\chi^\mathbb{Q} := \pi_\mathbb{Q}^{-1}(\chi) \cap \mathrm{cone}(\Omega)$$

[13][AH] Altman K. and Hausen J. Polyhedral divisors and algebraic torus actions // Mathematische Annalen, vol. 334, 2006, p. 557-607.

(см. [CM]), где $\pi_{\mathbb{Q}}$ — линейное отображение векторных пространств, индуцированное π :

$$\pi_{\mathbb{Q}} : \mathcal{X}(\mathbb{T})_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}.$$

В частности, веер $\mathcal{C}_{H_0}$ главной компоненты схемы Гильберта является разбиением веера $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$.

Пример. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{A}^3$, $\mathbb{T} = \mathbb{G}_m^3$ действует диагонально, и пусть $T = \mathbb{G}_m$ действует со следующими весами: $t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, t^2x_3)$.

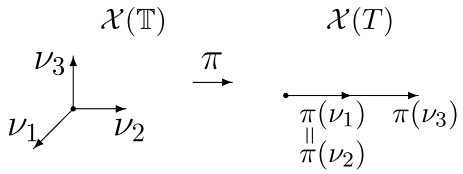
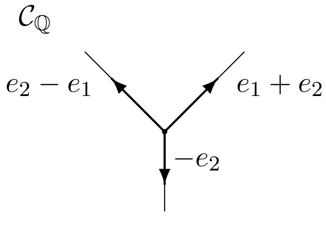


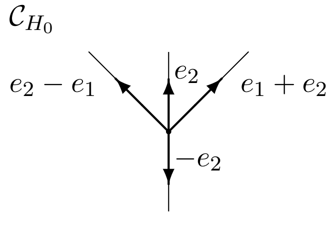
Схема Гильберта $H_{\mathbb{A}^3,T}$ — это замкнутая подсхема в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$, заданная уравнениями $z_1w_3 - z_2w_1 = 0$ и $z_1w_2 - z_2w_3 = 0$ (где z_1, z_2 и w_1, w_2, w_3, w_4 — однородные координаты в $\mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^3$ соответственно). Веер $\mathcal{C}_{H_0}$ состоит из следующих конусов:

$$\mathbb{Q}_+(e_1 + e_2) + \mathbb{Q}_+e_2,$$
$$\mathbb{Q}_+(e_1 + e_2) + \mathbb{Q}_+(-e_2),$$
$$\mathbb{Q}_+(e_2 - e_1) + \mathbb{Q}_+e_2,$$
$$\mathbb{Q}_+(e_2 - e_1) + \mathbb{Q}_+(-e_2),$$

где $e_1 = \nu_1^* + \nu_3^*, e_2 = -\nu_3^*$ — базис в $\Lambda(\mathbb{T}/T)$. Обратный предел GIT-факторов — это $\mathbb{A}^3/\!\!/_C T = \mathrm{Proj}\ k[x_1, x_2, x_3]$ (где $k[x_1, x_2, x_3]$ градуирована весами T), и его веер $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ состоит из следующих конусов:

$$\mathbb{Q}_+(e_1 + e_2) + \mathbb{Q}_+(-e_2),$$
$$\mathbb{Q}_+(e_2 - e_1) + \mathbb{Q}_+(-e_2),$$
$$\mathbb{Q}_+(e_1 + e_2) + \mathbb{Q}_+(e_2 - e_1).$$





В третьем разделе описывается канонический морфизм $\Psi_{\mathbb{X},T} : H_{\mathbb{X},T} \to \mathbb{X}/_C T$. Этот морфизм был построен в [HS] для случая, когда $\mathbb{X}$ является T-модулем. Пользуясь результатами [BH][14], мы обобщаем эту конструкцию на случай произвольного аффинного T-многообразия $\mathbb{X}$. Мы определяем аналог универсального семейства $W_{\mathbb{X},T}$ над главной компонентой $(\mathbb{X}/_C T)_0$ схемы $\mathbb{X}/_C T$ и показываем, что ограничение морфизма $\Psi_{\mathbb{X},T}$ на главную компоненту H_0 (это бирациональный проективный морфизм $H_0 \to (\mathbb{X}/_C T)_0$) поднимается до бирационального проективного морфизма универсальных семейств.

В четвертом разделе доказывается, что семейство над нормализацией главной компоненты $(\mathbb{X}/_C T)_0$, построенное в работе К. Альтмана и Ю. Хаусена [AH], является нормализацией семейства $W_{\mathbb{X},T}$ над $(\mathbb{X}/_C T)_0$.

Третья глава

В третьей главе мы рассматриваем инвариантные схемы Гильберта, это обобщение понятия мультиградуированной схемы Гильберта на случай действий редуктивных групп. Пусть G — связная редуктивная группа, и $\mathbb{X}$ — аффинная G-схема. Обозначим $\mathcal{X}^+$ полугруппу доминантных весов G.

Определение. [AB] Пусть дана аффинная G-схема $\mathbb{X}$ и функция $h : \mathcal{X}^+ \to \mathbb{Z}^+$. Тогда *функтором Гильберта* $\underline{H^h_{\mathbb{X},G}}$ называется контравариантный функтор из категории схем в категорию множеств, который каждой схеме S сопоставляет множество замкнутых G-инвариантных подсхем $X \subseteq S \times \mathbb{X}$ таких, что проекция $p : X \to S$ является (плоским) семейством с функцией Гильберта h.

Существование инвариантной схемы Гильберта доказано В. Алексеевым и М. Брионом [AB].

Теорема 8. *Для любой аффинной G-схемы $\mathbb{X}$ и функции $h : \mathcal{X}^+ \to \mathbb{Z}^+$ функтор $\underline{H^h_{\mathbb{X},G}}$ представим квазипроективной схемой $H^h_{\mathbb{X},G}$.*

Мы рассматриваем инвариантные схемы Гильберта в контексте предмета классической теории инвариантов, а именно, для диагонального действия (связной редуктивной) линейной группы $G \subset GL(V)$ на прямой сумме m копий пространства V. Хорошо известно, что задача нахождения инвариантов для такого действия сводится к задаче нахождения инвариантов системы из n векторов, где $n = \dim V$ (редукция первой основной

[14][BH] Berchtold F. and Hausen J. GIT-equivalence beyond the ample cone // Michigan Math. J., vol. 54, 2006, p. 483-515.

теоремы классической теории инвариантов). Пусть группа G полупроста и неприводима. Тогда для действия G на m копиях пространства V типичная орбита замкнута и изоморфна G при $m \geqslant n$. Мы показываем, что в случае, когда G является одной из классических простых групп (то есть $SL(V), SO(V), Sp(V)$), задача построения инвариантной схемы Гильберта, параметризующей типичные орбиты, также сводится к задаче нахождения инвариантной схемы Гильберта в случае n векторов.

Теорема 9. *Пусть $G \subset GL(V)$ — связная классическая линейная группа (то есть $G = SL(V), SO(V)$ или $Sp(V)$). Рассматривается представление*

$$G : mV = W \otimes V,$$

где G действует на W тривиально. Пусть $m = \dim W > n$. Фиксируем подпространство $L \subset W$ размерности n. Тогда имеем

$$H_{W\otimes V,G} = GL(W) \times^{P_L} H_{L\otimes V,G},$$

где $P_L \subset GL(W)$ — это параболическая подгруппа, стабилизирующая L:

$$P_L := \{g \in GL(W) \ : \ gL = L\}.$$

Также приводятся примеры явной геометрической реализации инвариантных схем Гильберта.

Пример. Пусть $G = SL(V) : W \otimes V$. Рассмотрим морфизм факторизации

$$\pi : W \otimes V \to (W \otimes V)//SL(V).$$

Заметим, что $(W \otimes V)//SL(V)$ изоморфен аффинному конусу над грассманианом $\mathrm{Aff}(\mathrm{Gr_n(W)})$.

Рассмотрим случай $m = n$; тогда $\mathrm{Aff}(\mathrm{Gr_n(W)}) = \Lambda^{\mathrm{n}}\mathrm{W} \simeq \mathbb{A}^1$. Заметим, что размерность любого слоя морфизма π равна $n^2 - 1$. Следовательно, морфизм π плоский. В этом случае $H_{W\otimes V,SL(V)} = \Lambda^n W$.

При $m > n$ схема Гильберта $H_{W\otimes V,SL(V)}$ — это раздутие в нуле $\mathrm{Bl}_0(\mathrm{Aff}(\mathrm{Gr_n(W)}))$ аффинного конуса над грассманианом. Действительно, имеется естественный $GL(W)$-эквивариантный морфизм ϕ : $\mathrm{Bl}_0(\mathrm{Aff}(\mathrm{Gr_n(W)})) \to \mathrm{Gr_n(W)} = \mathrm{GL(W)/P_L}$, причем $\phi^{-1}(L) = \Lambda^n L = H_{L\otimes V,SL(V)}$. Следовательно,

$$\mathrm{Bl}_0(\mathrm{Aff}(\mathrm{Gr_n(W)})) = \mathrm{GL(W)} \times^{\mathrm{P_L}} \Lambda^{\mathrm{n}}\mathrm{L} = \mathrm{H_{W\otimes V,SL(V)}}.$$

Благодарности

Автор благодарна своему научному руководителю кандидату физ.-мат. наук доценту И. В. Аржанцеву за постановку задачи первой главы и внимательное руководство в процессе написания диссертации, профессору М. Бриону за постановку задач второй и третьей глав, ряд ценных идей и полезные обсуждения, а также доктору физ.-мат. наук профессору Э. Б. Винбергу за внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Чувашова О. В. Свойства отделимости для замыканий торических орбит // Мат. Сборник, том 197, №3, 2006, стр. 117-134.

[2] Чувашова О. В. Инвариантные схемы Гильберта и диагональные действия редуктивных групп // депонировано в ВИНИТИ РАН, №895 - В2007 от 25.09.07, 24 стр.

[3] Чувашова О. В. Веер главной компоненты торической схемы Гильберта // Успехи Мат. Наук, 2007. том 62 , вып. 5, стр. 167-168.