МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.977

Салобутина Евгения Олеговна

СИСТЕМА ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СВЯЗАННЫХ ЕДИНОЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель –	доктор физико-математических наук, профессор М. И. Зеликин
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А. В. Арутюнов,
	кандидат физико-математических наук, доцент Ю. Л. Сачков
Ведущая организация –	Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится "9" ноября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП–2, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке механико-математического факультета МГУ (14 этаж, Главное здание).

Автореферат разослан "9" октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ
доктор физико-математическиих наук,
профессор Т. П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В теории оптимального управления колебаниями, возникающими в механических системах, объектом многочисленных исследований является модель колебаний балки Эйлера–Бернулли. Развитием системы Эйлера–Бернулли является теория балки Тимошенко, учитывающая инерцию вращения и деформацию сечения, возникающую при колебаниях. Согласно расчетной схеме балки, предложенной Тимошенко, плоские сечения, до деформации нормальные к ее оси, остаются плоскими и после изгиба, но перестают быть нормальными к ее изогнутой оси. В схеме Тимошенко положение каждого сечения деформируемой балки определяется двумя независимыми величинами: поперечным смещением и углом поворота сечения. В диссертации рассматривается модель однородной балки Тимошенко в предположении, что левый конец балки прикреплен к диску радиуса r, а движение балки управляется угловым ускорение диска.

Задача управления медленно вращающейся балкой Тимошенко изучалась в [1–4]. В работе [2] были получены условия, при которых для достаточно больших T разрешима задача перевода балки из одного положения покоя в другое с заданным углом поворота диска и за заданное время T. Описан метод построения кусочно-постоянного управления, которое решает поставленную задачу. Построено [3] управление, которое стабилизирует систему (балка + диск) в положении покоя (гасит общую энергию балки и стабилизирует диск в положении равновесия) за бесконечное время. Доказано, что существует не более чем счетная последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ сингулярных значений радиуса

[1] Gugat M. Controllability of a rotating Timoshenko beam. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2001. 6, c. 333–360.

[2] Krabs W., Sklyar G. M. On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam. Z. Anal. Anwend. 1999. 18, № 2. c. 437–448.

[3] Krabs W., Sklyar G. M. On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam. Z. Anal. Anwend. 2000. 19, № 1. c. 131–145.

[4] Krabs W., Sklyar G. M., Wozniak J. On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams. J. Anal. Appl. 2003. 22, № 1. c. 215–228.

диска, при которых балка является неуправляемой. Показано, что если значение радиуса диска не является сингулярным, то балка Тимошенко стабилизируема. В [4] получены условия точной управляемости и описаны множества достижимости.

В отличие от упомянутой серии работ в данной диссертации исследуется задача минимизации среднеквадратичного отклонения балки Тимошенко от положения равновесия. При этом построение оптимального решения в этой задаче основывается на технике режимов с учащающимися переключениями (четтеринг–режимов).

Суть четтеринг-режимов состоит в том, что управление на оптимальной траектории имеет бесконечное число неустранимых разрывов на конечном интервале времени. Одной из основных причин возникновения этого феномена является наличие у управляемой системы особого режима. Под *особым режимом* [5] понимается траектория, в точках которой условие максимума Понтрягина не определяет однозначно значение управления, то есть максимум гамильтониана достигается более чем в одной точке. В задачах, аффинных по управлению, управление может быть получено последовательным дифференцированием тождества $H_1 \equiv 0$, где H_1 – коэффициент при u в гамильтониане. При этом управление u впервые появится на четном шаге дифференцирования $2q$. Число q называется *порядком особой траектории*. В соответствии с теоремой Келли-Коппа-Мойера [6] сопряжение неособой кусочно–гладкой траектории с особой траекторией четного порядка неоптимально. Поэтому соединение особого участка оптимальной траектории возможно только с четтеринг-траекторией.

Первый пример задачи, для которой оптимальное управление имело бесконечное число переключений на конечном интервале времени был приведен А. Т. Фуллером на I конгрессе ИФАК в 1960 году [7]. С тех

[5] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.:Наука, 1973.

[6] Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals. Topics in Optimization (ed. Leitmann G.) N. Y., 1967. P. 63–103.

[7] Фуллер А. Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества. Труды I конгр. ИФАК (Москва, 1960). М. 1961. Т. 2. с. 584–605.

пор было найдено большое число задач, в которых также имеет место феномен Фуллера. В работе [8] И. Купка доказал, что для открытого множества гамильтоновых систем принципа максимума Понтрягина с одномерным управлением существует подмногообразие коразмерности 8, которое отвечает системам с четтеринг–режимами. Несколько позднее, в работе М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [9], коразмерность соответствующего подмногообразия была понижена до 7. В работах М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [9, 10] построена теория четтеринг-режимов и дано описание фазового портрета разрывных гамильтоновых систем в окрестности особых экстремалей второго порядка. Доказано, что асимптотика решений таких задач задается решением классической задачи Фуллера.

В заключение отметим, что теория четтеринг–режимов является одной из активно развивающихся областей оптимального управления и находит применение во многих областях современной науки: космонавтика, робототехника, математическая экономика и другие.

Цель работы. Изучить оптимальные решения конечномерных приближений задачи управления балкой Тимошенко, а именно, задачи оптимального гашения первых двух и первых n мод колебаний балки Тимошенко. Исследовать асимптотическое поведение экстремалей задачи в окрестности особых режимов, доказать существование и оптимальность четтеринг–режимов в окрестности особых траекторий второго порядка.

Методы исследования. В работе используются методы теории оптимального управления и функционального анализа, методы теории

[8] Kupka I. The ambiguity of the Fuller phenomenon. Frace Rep. Inst. Fourier, № 52. — Grenoble, 1986.

[9] Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of chattering with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. Birkhäser, Boston–Basel–Berlin, 1994.

[10] Зеликин М. И, Борисов В. Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений. Итоги науки и техники. Серия современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. **90**, Оптимальное управление 4. М.: ВИНИТИ, 2001.

дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, выпуклый анализ, линейная алгебра.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

Построен оптимальный синтез для двух гармонических осцилляторов, связанных единой управляющей функцией. Доказано, что данная задача обладает особыми траекториями второго существенного порядка, которые имеют вид спиралей и при возрастании времени асимптотически приближаются к началу координат. Доказано, что на особый режим оптимальные решения выходят с бесконечным числом переключений на конечном интервале времени.

Для задачи оптимального гашения первых n мод колебаний балки Тимошенко, то есть для задачи минимизации среднеквадратичного отклонения n связанных осцилляторов от положения равновесия доказано существование особых режимов. Доказано, что в некоторой открытой окрестности особого многообразия поведение оптимальных решений задачи такое же, как и в задаче оптимального гашения первых двух мод колебаний балки. То есть оптимальные траектории n–мерной задачи за конечное время с бесконечным числом переключений выходят на особое многообразие и остаются на нем, асимптотически приближаясь к началу координат.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть полезны при изучении задач оптимального управления, обладающих особыми режимами, задач стабилизации управляемых систем, а также при изучении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались автором на семинаре по геометрической теории оптимального управления на механико–математическом факультете МГУ (2005–2007, неоднократно), на семинаре кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ (2007), на семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации факультета физико–математических и естественных наук РУДН (2007), на конференции "Ломоносовские чтения – 2006" (Москва, 2006), на XXVIII Конференции молодых ученых механико–математического факультета МГУ (Москва, 2006).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 научные работы. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и 4 глав, разделенных на параграфы. Список литературы содержит 51 наименование. Общий объем диссертации составляет 90 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан обзор работ по теме диссертации и приведены основные результаты.

В диссертации рассматривается задача минимизации квадратичного функционала

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^n x_j^2(t)\,dt \tag{1}$$

на траекториях управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_j(t) + \lambda_j^2\, x_j(t) = C_j\, u, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где u — скалярное управление, $-1 \le u \le 1$, начальные условия

$$x_j(0) = x_j^0, \quad \dot{x}_j(0) = y_j^0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) является конечномерным приближением соответствующей задачи со счетной управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится на основе метода Фурье задача управления балкой Тимошенко [11].

В диссертации задача (1)–(3) исследуется в следующей последовательности:

Задача I: *Задача управления гармоническим осциллятором с квадратичным критерием качества:* минимизировать функционал (1) на траекториях управляемой системы (2), (3) при $n = 1$.

Задача II: *Задача минимизации среднеквадратичного отклонения двух связанных осцилляторов от положения равновесия:* минимизировать функционал

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + C^2 y_1^2(t))\, dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\mu^2 y_1 + u,$$

$$x_1(0) = \hat{x}_1^0, \quad x_2(0) = \hat{x}_2^0, \quad y_1(0) = \hat{y}_1^0, \quad y_2(0) = \hat{y}_2^0, \quad |u| \leq 1.$$

Задача III: *Задача минимизации среднеквадратичного отклонения связанных осцилляторов от положения равновесия:* минимизировать функционал (1) на траекториях управляемой системы (2), (3).

Такая последовательность оправдана и с физической точки зрения. При большинстве начальных состояний, связанных с естественными внешними воздействиями на балку, основная часть энергии колебаний приходится на главную моду. Поэтому в качестве первого приближения к построению оптимального решения в задаче управления балкой Тимошенко естественно рассмотреть задачу оптимального гашения первой моды колебаний — она соответствует Задаче I. Задачи II и III связаны с задачами оптимального гашения первых двух и первых n мод колебаний балки соответственно.

[11] Зеликин М. И., Манита Л. А. Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления балкой Тимошенко. Прикл. мат. мех. 2006. 70, № 2. с. 295–304.

Основное содержание главы 1 составляет постановка задачи оптимального управления балкой Тимошенко и сведение ее на основе метода Фурье к изучению оптимальных решений для счетной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Глава 1 носит обзорный характер. В § 1.3 рассматривается Задача I. Для нее начало координат $x \equiv 0$ есть особый режим второго порядка, а оптимальные траектории с четтерингом достигают начала координат за конечное время.

В главе 2 собраны необходимые утверждения о сопряжении особого и неособого участков оптимальной траектории, относящиеся к случаю кусочно–непрерывного управления.

В главе 3 строится оптимальный синтез в задаче минимизации среднеквадратичного отклонения двух связанных осцилляторов от положения равновесия. Основной результат этой главы формулируется в виде следующих утверждений (Теорема 3.1).

Теорема 3.1. *Для Задачи II справедливы следующие утверждения.*

1) *В задаче существуют особые траектории порядка 2 (intrinsic order).*

2) *Особые траектории удовлетворяют необходимому условию оптимальности Келли в строгой форме.*

3) *Существует открытая окрестность U_ε многообразия особых экстремалей, такая, что*

   a) *для всех начальных условий $(x_1^0,\, x_2^0,\, y_1^0,\, y_2^0) \in U_\varepsilon$ оптимальные траектории задачи достигают особого многообразия за конечное время с бесконечным числом переключений управления;*

   b) *оставаясь на особом многообразии, оптимальные траектории с управлением $u = u_{oc}$ достигают начала координат за бесконечное время.*

Доказательство утверждений 1), 2), 3b) содержится в § 3.2. В этом параграфе исследуется поведение экстремалей на особом многообразии.

Для этого рассматривается система уравнений принципа максимума Понтрягина на особом многообразии:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\ & \frac{(C^2\,\omega^2 + \mu^2)\,x_1 + C^2\,(\omega^2 - \mu^2)\,y_1}{1 + C^2}\,, \\ \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \ & \frac{(\omega^2 - \mu^2)\,x_1 - (C^2\,\omega^2 + \mu^2)\,y_1}{1 + C^2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказывается, что для системы (4) начало координат является особой точкой типа фокус. Найдены значения собственных чисел матрицы A этой системы, они симметричны относительно осей координат. Пусть $\lambda_-^i,\ \lambda_+^i,\ (i = 1, 2)$ — собственные числа матрицы A с отрицательными и положительными вещественными частями соответственно, а $v_-^i\ (v_+^i)$ — собственный вектор системы, отвечающий собственному значению $\lambda_-^i\ (\lambda_+^i)$. По результатам § 3.2 сформулировано следующее предложение.

Предложение 3.1. *Пусть N^* – двумерное инвариантное подпространство, соответствующее собственным векторам v_-^1 и v_-^2. Тогда N^* заполнено траекториями системы* (4), *которые имеют вид спиралей и при возрастании времени асимптотически приближаются к началу координат. Двумерное инвариантное подпространство, соответствующее векторам v_+^1 и v_+^2, заполнено траекториями системы* (4), *которые при возрастании времени удаляются от начала координат.*

В §§ 3.3, 3.4 содержится доказательство утверждения 3а) Теоремы 3.1.

В § 3.3 доказывается, что в каждую точку особого многообразия Задачи II за конечное время приходит неособая экстремаль с бесконечным числом переключений. Идея доказательства заключается в следующем. С помощью невырожденной замены переменных система уравнений принципа максимума Понтрягина в окрестности особой траектории приводится к полуканоническому виду

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = z_3, \quad \dot z_3 = z_4,$$

$$\dot z_4 = -\omega^2\mu^2 z_1 - 2\mu^2 z_3 + (\omega^2-\mu^2)\, w_1 + 2(\omega^2-\mu^2)\, w_3 - (1+C^2)\, u,$$

$$\dot w_1 = w_2, \quad \dot w_2 = \omega^2\mu^2 z_1 + \mu^2 z_3 + \omega^2 w_1 + (\omega^2+\mu^2)\, w_3, \tag{5}$$

$$\dot w_3 = w_4, \quad \dot w_4 = -\omega^2 w_3 + u,$$

$$u = \operatorname{sgn} z_1.$$

Доказывается, что система (5) удовлетворяет всем требованиям теоремы о расслоении (Зеликин, Борисов, [12]). Таким образом, в пространстве $(z_1,\, z_2\, z_3,\, z_4,\, w_1,\, w_2,\, w_3,\, w_4)$ существует расслоение с базой $S_0 = \{(z,\, w) \,|\, z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0\}$ с двумерными кусочно–гладкими слоями, заполненными траекториями с учащающимися переключениями, т.е. в некоторой окрестности особого многобразия решения гамильтоновой системы за конечное время с бесконечным числом переключений управления достигают особого многообразия.

В § 3.4 доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. *Экстремали с накоплением переключений и особые экстремали Задачи II локально оптимальны.*

Пусть $\pi : \Sigma^{\pm} \to \mathcal{O}$ обозначает проекцию расслоения на базу, сопоставляющую всем точкам двумерного слоя точку $(0, w)$, а N^* — двумерное подмногобразие поверхности $z = 0$, заполненное особыми решениями, которые приходят в начало координат в прямом времени.

Доказательство Теоремы 3.3 состоит из доказательства следующих утверждений:

1) N^* является лагранжевым многообразием.

2) Многообразие $\pi^{-1}(N^*)$ регулярно проектируется на фазовое пространство.

[12] Зеликин М. И, Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики. Совр. мат. прилож. 2003. 11. с. 3–161.

При доказательстве первого утверждения используются два обстоятельства: во–первых, согласно теореме об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана $\oint_{\gamma} \psi\, dx = \oint_{\gamma_T} \psi\, dx$ для произвольного кусочно–гладкого замкнутого контура $\gamma \subset N^*$ и его образа γ_T, полученного после переноса γ по траекториям гамильтоновой системы (4) на некоторое время T; во – вторых, $\sum_{i=1}^{4} \psi_i \dot{x}_i \to 0$ при $T \to \infty$.

Второе утверждение основано на следствии из теоремы о регулярной проекции [12] и непосредственных вычислениях.

В главе 4 рассматривается задача минимизации среднеквадратичного отклонения n связанных осцилляторов от положения равновесия. Доказывается существование многообразия, состоящего из особых экстремалей. Доказывается, что оптимальные траектории задачи за конечное время с бесконечным числом переключений выходят на особое многообразие и остаются на нем, асимптотически приближаясь к началу координат.

Теорема 4.1. *Для Задачи III справедливы следующие утверждения.*

1) *В задаче существуют особые траектории порядка 2 (intrinsic order).*

2) *Особые траектории глобально оптимальны.*

3) *Существует открытая окрестность U_ε многообразия особых экстремалей, такая, что*

   a) *для всех начальных условий $(x_1^0, y_1^0, \ldots, x_n^0, y_n^0) \in U_\varepsilon$ оптимальные траектории задачи достигают особого многообразия за конечное время с бесконечным числом переключений управления;*

   b) *оставаясь на особом многообразии, оптимальные траектории с управлением $u = u_{oc}$ достигают начала координат за бесконечное время.*

В § 4.2 доказываются утверждения 1), 3b) Теоремы 4.1. В этом параграфе изучается поведение особых экстремалей задачи.

Для Задачи III система уравнений принципа максимума на особом многообразии имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_j = y_j,\\ \dot{y}_j = -\lambda_j^2\, x_j + \frac{C_j}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^2}\,\sum_{k=1}^{n-1} 2C_k\,(\lambda_k^2-\lambda_n^2)\,x_k + C_k\,(\lambda_k^2-\lambda_n^2)^2\,\varphi_k,\\ \dot{\psi}_j = \lambda_j^2\,\varphi_j + x_j,\\ \dot{\varphi}_j = -\psi_j, \quad j=1,\dots,n-1.\end{gathered} \tag{6}$$

Теорема 4.3. *Собственные значения матрицы линейной системы* (6) *комплексные, с вещественной частью, отличной от нуля и образуют множество, симметричное относительно осей координат.*

Доказательство Теоремы 4.3 следует из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Характеристический многочлен матрицы линейной системы* (6) *приводится к виду*

$$\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j^2}\,\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left(\lambda^2+\lambda_j^2\right)^2. \tag{7}$$

По результатам § 4.2 сформулировано следующее предложение.

Предложение 4.2. *Пусть* $\alpha_{\pm}^1, \dots, \alpha_{\pm}^{4n-4}$ *корни многочлена* (7), *причем* $\alpha_-^i\,(i=1,\dots,2n-2)$ *– собственное значение с отрицательной вещественной частью. Обозначим через* N^* *инвариантное подпространство, соответствующее собственым значениям* $\alpha_-^1, \dots, \alpha_-^{2n-2}$. N^* *заполнено траекториями системы* (4), *которые имеют вид спиралей и при возрастании времени асимптотически приближаются к началу координат. Аналогично, инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям* $\alpha_-^1, \dots, \alpha_-^{2n-2}$, *заполнено траекториями системы* (4), *которые при возрастании времени удаляются от начала координат.*

В § 4.3 содержится доказательство существования в Задаче III четтеринг–траекторий и конечности времени их прихода на особое многообразие. Доказательство этого утверждения, также как и аналогичного утверждения для Задачи II, основывается на проверке выполнения условий теоремы о расслоении (Зеликин, Борисов, [12]), однако осложняется приведением $(4n-4)$ – мерной системы уравнений принципа максимума к полуканонической форме.

В §4.4 доказывается теорема о локальной оптимальности особых экстремалей и экстремалей с накоплением переключений (Теорема 4.5). Структура доказательства Теоремы 4.5 напоминает этапы доказательства аналогичного утверждения для Задачи II.

В §4.5 доказывается глобальная оптимальность построенного в Задаче III семейства траекторий (Теорема 4.6).

Автор благодарит профессора М. И. Зеликина за предложенную тему и постоянное внимание к работе, В. Ф. Борисова за многочисленные обсуждения, Л. А. Маниту за обсуждение и ценные замечания.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Салобутина Е. О. Режимы накопления переключений в задаче одновременного управления колебаниями двух осцилляторов. Вестник Московского Университета. Сер.1, математика, механика. 2006. № 3. С. 25-32.

2. Салобутина Е. О. Режимы учащающихся переключений в задаче оптимального управления колебаниями n осцилляторов. Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико–математического факультета МГУ. 2006. Т2. С. 195-198.

3. Салобутина Е. О. Режимы учащающихся переключений в задаче оптимального управления колебаниями n осцилляторов. Современная математика. Фундаментальные направления. Оптимальное управление. 2006. Т.19. С. 171-178.