МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Муницына Мария Александровна

Двухтросовая система "гантель–груз" в центральном гравитационном поле

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научные руководители:	Доктор физико-математических наук, профессор А.В. Карапетян Кандидат физико-математических наук, доцент А.А. Буров
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук профессор И.И. Косенко Кандидат физико-математических наук, доцент А.В. Родников
Ведущая организация:	Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Защита состоится 9 ноября 2007 года в 16 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 октября 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Тросовые элементы, благодаря своей легкости, возможности относительно быстрого свертывания и развертывания и компактности хранения в свернутом состоянии, успешно используются при проектировании и создании больших орбитальных систем. Проекты по использованию тросовых систем в космосе являются актуальными в связи с современным техническим предпосылкам их практической реализации.

Цель диссертационной работы. Основной целью данной диссертационной работы является поиск и исследование свойств стационарных движений механической системы, состоящей из гантелеобразного тела с массами, сосредоточенными на его концах, и массивной точки, соединенной с этими концами нерастяжимыми невесомыми тросами.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые в точной постановке рассмотрена плоская задача о движении двухтросовой системы в центральном гравитационном поле.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы обоснованы, они базируются на общих теоремах динамики, теории устойчивости и бифуркаций.

Используемые методы. В работе используются методы Рауса, Ляпунова, Четаева из теории устойчивости и бифуркации стационарных движений. При исследовании задачи в спутниковом приближении используется метод малого параметра.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты дают представление о количестве, видах и характере устойчивости стационарных движений рассматриваемой двухтросовой системы. Эти результаты могут быть использованы для изменения или стабилизации равновесных ориентаций спутника на орбите.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством акад. РАН В. В. Румянцева, чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, 2006 г.

– Семинар отдела механики ВЦ РАН под рук. проф. С. Я. Степанова, проф. А. В. Карапетяна, 2007 г.

– Международная научная конференция по механике «Четвертые поляховские чтения», Санкт-Петербург, 7–10 февраля 2006 г.

– IX Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (им. Е. С. Пятницкого), 31 мая – 2 июня 2006 г.

– IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 2006, Нижний Новгород, 22 – 28 августа 2006 г.

– Шестой международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 1 – 7 августа 2007 г.

– Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им. М. В. Ломоносова, апрель 2007 г.

– IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Иркутск, 12-16 июня 2007 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в трех печатных работах, одна из них опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 67 наименований. Общий объем диссертации – 74 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, посвященных исследованию движений разнообразных тел и систем нескольких тел в центральном гравитационном поле, в том числе тросовых систем, а также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** дается постановка задачи. Рассматривается движение несимметричной гантели, моделируемой двумя точечными массами, соединенными невесомым нерастяжимым стержнем, и точечного груза, соединенного с концами гантели невесомым нерастяжимыми тросами известной длины. Условия нерастяжимости тросов задают две односторонние связи, наложенные на систему. Предполагается, что в течение всего времени движения все три массивные точки системы находятся в одной и той же неподвижной плоскости, содержащей притягивающий центр.

В *первом разделе* задача рассматривается в точной постановке. В качестве уравнений движения системы выбраны уравнения Лагранжа с множителями. Если в течение движения множители связи принимают неотрицательные значения, то связи, наложенные на систему, эквивалентны двусторонним. Если же некоторый из множителей связи меняет знак с плюса на минус, то соответствующая ему связь ослабевает. В этом случае до того момента, пока связь вновь не окажется напряженной, значение данного множителя считается тождественно равным нулю. Поэтому в зависимости от знаков множителей связи рассматриваются три типа движения системы:

1. свободное движение, когда оба множителя связи тождественно равны нулю, т.е. обе односторонние связи ослаблены;

2. полусвязное движение, когда один из множителей тождественно равен нулю, а другой неотрицателен, т.е. одна из односторонних связей напряжена;

3. связное движение, когда оба множителя связей неотрицательны, т.е. обе односторонние связи напряжены.

Показывается, что уравнения движения допускают циклический интеграл, и рассматриваемая система может совершать стационарные движения, при которых центр масс всей системы равномерно движется по круговой кеплеровой орбите вокруг притягивающего центра, а система сохраняет свою ориентацию относительно последнего.

Во *втором разделе* задача рассматривается в спутниковом приближении. Предполагается, что линейные параметры системы малы по сравнению с радиусом орбиты ее центра масс, гравитационный потенциал рассматривается с точностью до членов второго порядка малости. В такой постановке задачи движение системы относительно своего центра масс отделяется от его движения по круговой орбите вокруг притягивающего центра. Выводятся уравнения движения системы относительно центра масс.

Во **второй главе** рассматриваются свободные движения системы. В этом случае рассматриваемая система представляет из себя свободную гантель и груз в центральном гравитационном поле, не стесненные никакими связями. Если в процессе движения расстояние от какого либо конца гантели до груза становится равным длине соответствующего троса, то происходит выход на связь, и система переходит в состояние полусвязного (связного) движения.

В *первом разделе* показывается, что в случае свободного движения система может совершать стационарные движения, при которых все три массивные точки системы располагаются на одной и той же орбите относительно притягивающего центра. Такие стационарные движения названы "касательными".

Показывается, что степень неустойчивости найденных стационарных движений равна двум в том смысле, что матрица второй вариации приведенного потенциала имеет два отрицательных собственных значения, один положительный, и один – равный нулю. Строится бифуркационная диаграмма.

Во *втором разделе* показывается, что в случае свободного движения возможны стационарные движения, при которых гантель расположена вдоль радиус–вектора своего центра масс. Такие стационарные движения названы "треугольными". В зависимости от параметров системы находится соответствующее значение радиуса орбиты груза.

В *третьем разделе* рассматривается спутниковое приближение задачи о свободном движении. В рамках этого приближения доказывается, что кроме относительных равновесий, соответствующих касательным и треугольным стационарными движениям, других относительных равновесий в случае свободного движения не существует.

Доказывается, что треугольные относительные равновесия устойчивы в линейном приближении по всем обобщенным скоростям и по углам отклонения гантели и вектора, соединяющего центр масс гантели с грузом, от радиус–вектора центра масс всей системы, но неустойчивы по расстоянию от центра масс гантели до груза.

В **третьей главе** рассматриваются полусвязные движения системы. В этом случае рассматриваемая система представляет из себя двузвенник в центральном гравитационном поле. Если в процессе движения множитель связи, соответствующий натянутому тросу, принимает отрицательные значения, то система переходит в состояние свободного движения. Если же в процессе движения расстояние между концами двузвенника становится равным длине ослабленного троса, то система переходит в состояние связного движения.

На рассматриваемых движениях приведенная система имеет три степени свободы. Ее положение описывается следующими обобщенными координатами: радиусом орбиты центра масс всей системы R и углами отклонения вектора, соединяющего груз с центром масс гантели, и самой гантели от радиус–вектора центра масс всей системы α и θ соответственно.

В случае полусвязного движения возможны стационарные движения, при при которых все три массивные точки системы расположены вдоль радиус–вектора центра масс всей системы. Такие стационарные движения названы “радиальными”. Кроме того, при полусвязном движении допускаются касательные и треугольные стационарные движения, причем множитель связи, соответствующий натянутому тросу, на этих решениях равен нулю.

Первый раздел посвящен исследованию радиальных стационарных движений. В этом разделе предполагается, что все точки системы располагаются по одну сторону от притягивающего центра. Доказывается, что в этом случае множитель связи, соответствующий натянутому тросу, на радиальных движениях принимает строго положительные значения, и, следовательно, при изучении устойчивости рассматриваемых движений можно ограничиться возмущениями, не приводящими к сходу системы со связи.

Доказывается, что те радиальные стационарные движения, на которых натянутый трос и гантель дополняют друг друга до развернутого угла, устойчивы при больших значениях радиуса орбиты центра масс всей системы и имеют степень неустойчивости, равную единице, в том случае, когда система располагается вблизи притягивающего центра. Строится бифуркационная диаграмма.

Рассматриваются системы, параметры которых удовлетворяют условию $\nu < a/r$, где ν — масса груза, отнесенная к массе всей системы, a — расстояние от центра масс гантели до ее свободного конца, а r — расстояние от центра масс гантели до груза. Доказывается, что в этом случае те радиальные стационарные движения, при которых угол между натянутым тросом и гантелью равен нулю, устойчивы при больших значениях радиуса орбиты центра масс всей системы. Эти же движения имеют степень неустойчивости, равную двум, если система располагается вблизи притягивающего центра, и кроме того существуют такие значения радиуса орбиты цента масс всей системы, при которых их степень неустойчивости равна единице. Показано, что в сечении пространства R, α, θ, c^2, где c — константа циклического интеграла, соответствующими гиперплоскостями существует нечетное число, т.е. хотя бы одна, точек смены устойчивости по ориентации, от которых ответвляются стационарные движения, отличные от радиальных.

В том случае, если параметры системы удовлетворяют соотношению $\nu > a/r$, радиальные стационарные движения, для которых угол между натянутым тросом и гантелью равен нулю, неустойчивы (имеют степень неустойчивости, равную единице) при больших значениях радиуса орбиты центра масс всей системы, и их степень неустойчивости равна двум, если система располагается вблизи притягивающего центра. Показано, что в сечении пространства R, α, θ, c^2 соответствующими гиперплоскостями число точек смены устойчивости по ориентации, от которых ответвляются стационарные движения, отличные от радиальных, равно нулю или четно.

Во *втором разделе* рассматриваются касательные стационарные движения в случае полусвязного движения. Доказывается, что рассматриваемые стационарные движения неустойчивы в вековом смысле по отношению к возмущениям, не приводящим к сходу системы со связи. Степень неустойчивости при этом равняется двум.

В *третьем разделе* рассматривается спутниковое приближение задачи о полусвязном движении. Доказывается, что кроме относительных равновесий, соответствующих касательным, треугольным и радиальным стационарными движениям, других относительных равновесий в случае полусвязного движения не существует.

Доказывается, что треугольные относительные равновесия неустойчивы в линейном приближении.

В **четвертой главе** рассматриваются связные движения системы. В этом случае рассматриваемая система представляет из себя жесткий треугольник в центральном гравитационном поле. Если в процессе движения один или оба множителя связи принимают отрицательные значения, то система переходит в состояние полусвязного (связного) движения.

На рассматриваемых движениях приведенная система имеет две степени свободы. Ее положение определяется радиусом орбиты центра масс всей системы R и углом α между радиус–вектором центра масс всей системы и вектором, соединяющим груз с центром масс гантели.

В точной постановке задачи в конфигурационном пространстве приведенной системы численно строятся кривые стационарных движений. Пределы этих движений при больших радиусах орбиты центра масс всей системы находятся из спутникового приближения задачи.

В *первом разделе* рассматриваются связные движения систем, образованных симметричной гантелью и тросами равной длины. Такие системы названы “симметричными”.

Доказывается, что решения $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ соответствуют стационарным движениям симметричных систем при любом значении радиуса орбиты центра масс всей системы.

Предполагается, что притягивающий центр расположен вне треугольника, образованного тремя массивными точками системы. В этом случае множители связей принимают строго положительные значения.

Плоскость параметров симметричных систем разбивается на четыре области:

1. $a^2/r^2 < \nu < 1, \quad 2\nu > 1 - a^2/r^2$;
2. $a^2/r^2 < \nu < 1, \quad 2\nu < 1 - a^2/r^2$;
3. $\nu < a^2/r^2, \quad 2\nu < 1 - a^2/r^2$;
4. $\nu < a^2/r^2, \quad 2\nu > 1 - a^2/r^2$.

В первой и второй областях решение $\alpha = 0$ устойчиво при больших значениях R, и неустойчиво со степенью неустойчивости, равной единице, если система находится вблизи притягивающего центра. В сечении пространства $R,\ \alpha,\ c^2$ плоскостью $\alpha = 0$ число точек смены устойчивости по ориентации либо равно нулю, либо четно.

В третьей и четвертой областях степень неустойчивости решения $\alpha = 0$ равна единице как при больших R, так и в случае, если система расположена вблизи притягивающего центра. В сечении пространства $R,\ \alpha,\ c^2$ плоскостью $\alpha = 0$ существует нечетное число, т.е. хотя бы одна, точек смены устойчивости по ориентации.

В первой и второй областях решение $\alpha = \pi$ устойчиво при больших значениях R, в третьей и четвертой областях степень его неустойчивости равна единице. Если система расположена вблизи притягивающего центра, то во второй и третьей областях степень неустойчивости решения $\alpha = \pi$ равна единице, а в первой и четвертой степень неустойчивости этого решения равна двум. В сечении пространства $R,\ \alpha,\ c^2$ плоскостью $\alpha = \pi$ существует нечетное число точек смены устойчивости по ориентации в первой и третьей областях, и не существует, или существует четное число, во второй и четвертой областях.

Численно строятся проекции кривых стационарных движений в пространстве $R,\ \alpha,\ c^2$ на плоскость (R, α) для симметричных систем из всех четырех областей.

Во *втором разделе* рассматривается спутниковое приближение задачи о связном движении рассматриваемой системы. Выписывается уравнение движения системы относительно своего центра масс, строится его фазовый портрет.

Находятся относительные равновесия системы. Те из них, которые соответствуют таким положениям системы, при которых главная центральная ось инерции треугольника с наибольшем радиусом инерции направлена перпендикулярно радиусу орбиты центра масс всей системы устойчивы, а те, при которых эта ось направлена вдоль радиус–вектора центра масс всей системы — неустойчивы.

На фазовой плоскости системы строятся также области, внутри которых множители связи принимают отрицательные значения, т.е. связное движение не возможно.

Отдельно рассматриваются симметричные системы. Положениям относительного равновесия симметричных систем в случае связного движения отвечают значения $a = \pi n/2$, где $n \in Z$. Области невозможности связного движения симметричных систем симметричны относительно начала координат.

Если параметры системы удовлетворяют соотношениям $\nu > a^2/r^2$, то устойчивыми положениями относительного равновесия являются значения $a = 2\pi n,\ n \in Z$, а неустойчивыми — $\alpha = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$. Неустойчивые положения равновесия находятся на границах областей невозможности связного движения.

Если же выполнено неравенство $\nu < a^2/r^2$, то устойчивые положения относительного равновесия — $\alpha = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$, а неустойчивые — $a = 2\pi n,\ n \in Z$. На границах областей невозможности связного движения находятся устойчивые положения равновесия.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы:

- Определены три типа движений системы:
  - свободное движение, при котором оба троса ослаблены;
  - полусвязное движение, при котором один трос ослаблен, а другой натянут;
  - связное движение, при котором оба троса натянуты.
- Применена редукция по Раусу и найдены стационарные движения приведенной системы для всех типов движения.
- Для всех найденных движений полусвязного или связного типа проверено условие натянутости связи (связей).
- В зависимости от параметров системы изучена устойчивость и ветвление найденных решений при всевозможных значениях радиуса орбиты центра масс всей системы. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм.

- Отдельно рассмотрены системы, образованные симметричной гантелью и тросами равной длины. Пространство параметров таких систем разбито на области, различающиеся типом бифуркационных диаграмм. Для каждой области построены типичные диаграммы.

- В случае связного движения системы дана геометрическая интерпретация движения. Построен фазовый портрет системы, найдены области схода со связи.

- Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для изменения или стабилизации равновесных ориентаций спутника на орбите.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. *Муницына М.А.* Относительные равновесия системы "гантель–груз" с односторонними связями на круговой кеплеровой орбите // Автоматика и Телемеханика. 2007. №8. С. 9 – 15.

2. *Муницына М.А.* Движение системы с односторонними связями в центральном гравитационном поле // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2006 С. 75 – 84.

3. *Муницына М.А.* Стационарные движения системы с односторонними связями в центральном гравитационном поле // Труды IX Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" посвященной 105–летию Н.Г. Четаева. Иркутск. 2007. Т. 5. С. 47 – 56.