Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.9

Нальский Максим Борисович

Устойчивость существования негиперболических мер для C^1-диффеоморфизмов.

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Ильяшенко,
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник М. Л. Бланк, доктор физико-математических наук, профессор В. И. Оселедец
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

Защита состоится "9" ноября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "9" октября 2007 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Лукашенко Т. П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В теории динамических систем одним из важнейших направлений является качественное исследование динамики, в том числе описание поведения близких траекторий. Начиная с 60-х годов XX века и по сегодняшний день, специалисты предпринимают попытки описания "вселенной" всех динамических систем, комбинируя различные подходы. Значительный вклад внесли С. Смейл и Д. В. Аносов, введя понятие (равномерной) гиперболичности.

Определение 1. *Диффеоморфизм f компактного риманова многообразия M называется* равномерно гиперболическим на инвариантном множестве X, *если в любой точке $x \in X$ имеет место разложение касательного пространства $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$, инвариантное относительно действия дифференциала Df, и найдутся константы $C > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено:*

$$\forall v \in E^s_x \quad \|Df^n_x(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \qquad \text{и} \qquad \forall v \in E^u_x \quad \|Df^{-n}_x(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|.$$

Смейл сформулировал гипотезу, что гиперболические системы типичны в пространстве всех динамических систем. Однако, довольно скоро Абрахам и Смейл показали [1], что равномерно гиперболические системы (диффеоморфизмы Аносова, аксиома A) не плотны в пространстве динамических систем. Стало необходимо ослабить условие на гиперболичность. Появились понятия частичной и неравномерной гиперболичности, последнее описано в широко известной теории Песина [2].

В дальнейшем, классификацией и описанием динамических систем занимались ведущие отечественные и зарубежные математики, такие, как А. А. Андронов, Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, К. Бонатти, Р. Боуэн, Я. Боки, М. Брин, М. Виана, Л. Диаз, Д. И. Долгопят, Ю. С. Ильяшенко, А. Каток, А. Н. Колмогоров, Р. Мане, В. М. Миллионщиков, Дж. Милнор, Ш. Ньюхаус, В. И. Оселедец, Д. Палис, Я. Песин, Е. Пужалс, Д. Рюэлль, Я. Г. Синай, С. Смейл, А. М. Степин, Д. Сулливан, Ф. Такенс, Э. Уилкинсон, Л. П. Шильников, М. Шуб, и многие другие.

[1] R. Abraham, S. Smale. Nongenericity of Ω-stability. *1970 Global Analysis. In:* Poc. Sympos. Pure Math., **XIV** *(1968), pp. 5–8.*

[2] Я. Б. Песин. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория. *Успехи математических наук*, **32** (1977), вып. 4 (196), стр. 55–112.

К сожалению, оказывается, что задача классификации всех возможных (или даже типичных) динамических систем в высокой размерности наталкивается на практически непреодолимые (по крайней мере, на сегодняшний день) трудности. Известны лишь (впрочем, довольно большие) некоторые области систем, поддающихся исследованию: диффеоморфизмы Морса-Смейла, упомянутые выше гиперболические и частично-гиперболические динамические системы, области применимости теории КАМ. На сегодняшний день актуальной является гипотеза Палиса [3] о типичности систем с конечным числом аттракторов.

В 70-е годы и 80-е годы интенсивно развивалась теория частично гиперболических систем, основополагающими можно считать работы М. Брина и Я. Песина [4], а также М. Хирша, Ч. Пью и М. Шуба [5].

Определение 2. *Диффеоморфизм f компактного риманова многообразия M называется* частично гиперболическим на инвариантном множестве X*, если в любой точке $x \in X$ имеет место разложение касательного пространства $T_xM = E^s_x \oplus E^c_x \oplus E^u_x$, инвариантное относительно действия дифференциала Df, и найдутся константы $C > 0$ и $0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3$, $\mu_1 < 1 < \lambda_3$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется:*

$$\forall v \in E^s_x \quad \lambda_1^n \|v\|/C \leq \|Df^n(v)\| \leq C\mu_1^n\|v\|;$$

$$\forall v \in E^c_x \quad \lambda_2^n \|v\|/C \leq \|Df^n(v)\| \leq C\mu_2^n\|v\|;$$

$$\forall v \in E^u_x \quad \lambda_3^n \|v\|/C \leq \|Df^n(v)\| \leq C\mu_3^n\|v\|.$$

Новыми (1999, 2001) на этом пути являются результаты А. Городецкого и Ю. С. Иль-

[3] J. Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the dynamics of finitude of attractors, *Géometrié complexe et systèmes dynamiques*, Orsay 1995, Astérisque **261** (2000), xiii–xiv, pp. 335–347.

[4] М. И. Брин, Я. Б. Песин. Частично гиперболические динамические системы. *Известия Мат. Наук*, **8** (1974), вып. 1, стр. 177–218.

[5] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub. Invariant manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*, **Vol. 583** (1977), Springer-Verlag, Berlin-New York.

яшенко [6], [7], [8], обнаруживших ранее неизвестные свойства частично гиперболических систем, неустранимые малыми возмущениями.

При рассмотрении консервативных систем изучаются диффеоморфизмы, сохраняющие некоторую гладкую инвариантную меру (например, меру Лебега). Обозначим через $\mathrm{Diff}^1_\mu(M)$ множество диффеоморфизмов, сохраняющих меру Лебега μ на компактном многообразии M.

Одним из недавних результатов (2002) о типичности нулевых Ляпуновских показателей в этом случае является теорема Я.Боки и М.Вианы [9]: для любого компактного многообразия существует остаточное множество (пересечение счетного числа открытых всюду плотных) в $\mathrm{Diff}^1_\mu(M)$, каждое отображение из которого почти всюду по мере либо имеет нулевые показатели Ляпунова, либо обладает доминирующим разложением.

Разложение касательного пространства $T_xM = E^1_x \oplus \cdots \oplus E^k_x$ называется *доминирующим*, если найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любой пары векторов $v_i \in E^i_x$ и $v_j \in E^j_x$, $i < j$, выполняется:

$$\|Df^m(v_j)\| \cdot \|Df^m(v_i)\|^{-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Вообще, существование доминирующего разложения — очень сильное свойство, которое часто может быть исключено a priori. В этих случаях теорема Боки говорит, что типичные системы должны удовлетворять первой альтернативе. Первым примером такого рода является 2-мерный случай теоремы, частично базирующийся на подходе, предложенном Р. Мане [10]. Для C^1-диффеоморфизмов двумерных многообразий, сохраняющих площадь, Боки [11] обнаружил, что типичные отображения этого класса являются либо

[6] А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко. Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем. *Функциональный анализ и его приложения.*, **33** (1999), вып. 2, стр. 16–30.

[7] А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко. Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом. *Труды Математического Института им. Стеклова*, **231** (2000), стр. 96–118.

[8] А. Городецкий, Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения. *Известия РАН*, **70** (2006), N 6, стр. 52–78.

[9] J. Bochi, M. Viana. Uniform (projective) hyperbolicity or no hyperbolicity: a dichotomy for generic conservative maps. *Ann. Inst. H. Poincare*, **19** (2002), no. 1, pp. 113–123.

[10] R. Mané. The Lyapunov exponents of generic area preserving diffeomorphisms. *In International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*, pages 110–119. Longman, 1996.

[11] J. Bochi. Genericity of zero Lyapunov exponents. *Ergodic Theory Dynam. Systems.* **22** (2002), no. 6, pp. 1667–1696.

равномерно гиперболическими на всем многообразии (т.е. являются диффеоморфизмами Аносова), либо имеют нулевые показатели Ляпунова.

Из всех поверхностей диффеоморфизмы Аносова существуют только на торе, таким образом *у типичного C^1-гладкого сохраняющего площадь диффеоморфизма на любой поверхности, отличной от тора, все показатели Ляпунова равны нулю.*

Для неконсервативных систем аналогичные результаты отсутствуют.

Удивительное свойство сохраняющих объем диффеоморфизмов в размерности выше 2 было открыто М. Шубом и Э. Уилкинсон [12]. Они нашли открытое множество частично гиперболических отображений трехмерного тора в себя со следующим свойством. Отображения из этого множества имеют инвариантное слоение, слои которого – окружности. Эти слои непрерывно, *но не абсолютно непрерывно* зависят от начального условия. Между тем, почти все (в смысле инвариантной меры Лебега) орбиты отображения имеют ненулевые показатели Ляпунова (два положительных, один отрицательный). Парадоксальное свойство состоит в том, что множество полной меры, состоящее из этих орбит, пересекает каждый слой по множеству меры 0 на окружности. Позже Д. Рюэль и Э. Уилкинсон [13] доказали, что это пересечение состоит из конечного числа точек. В той же работе [12] сформулирован (все еще открытый) вопрос о типичности ненулевых Ляпуновских показателей для неконсервативной динамики и "хороших" мер (т.е. мер, являющихся слабыми пределами при итерациях диффеоморфизмом некоторой гладкой меры).

Обобщая примеры из последних 2 работ, можно получить следующий результат [14]: в пространстве частично гиперболических диффеоморфизмов с одномерным центральным направлением и сохраняющих фиксированную гладкую форму объема существует открытое и плотное подмножество отображений, для каждого из которых эта форма объема эргодична.

Для частично гиперболических отображений, сохраняющих гладкую меру, А. Бара-

[12] M. Shub, A. Wilkinson. Pathological foliations and removable zero exponents. *Inventiones Math.* **139** (2000), pp. 495–508.

[13] D. Ruele, A. Wilkinson. Absolutely singular dynamical foliations. *Comm. Math. Phys.*, **219** (2001), no. 3, pp. 481–487.

[14] C. Bonatti, C. Matheus, M. Viana, A. Wilkinson. Abundance of stable ergodicity. *Comment. Math. Helv.*, **79** (2004), no. 9, pp. 753–757.

виера и К. Бонатти доказали [15], что равенство нулю центрального показателя Ляпунова (или суммы центральных показателей) разрушается сколь угодно малым C^1-шевелением.

Неравномерно гиперболические отображения были введены Я. Б. Песиным [2].

Определение 3. *Диффеоморфизм f компактного риманова многообразия M, сохраняющий меру ν называется неравномерно гиперболическим, если множество точек, в которых все показатели Ляпунова отличны от нуля, имеет полную меру.*

В той же работе [2] изучены свойства таких отображений, в частности доказано, что если диффеоморфизм f – C^2-гладкий и неравномерно гиперболический, то M можно разложить в дизъюнктное объединение счетного числа инвариантных множеств положительной меры, на которых f эргодичен. Автор сформулировал гипотезу о типичности неравномерно гиперболических отображений в пространстве $\mathrm{Diff}^r_\nu(M)$ диффеоморфизмов, сохраняющих меру ν.

Для больших r в работах К. Ченга и И. Суна [16], М. Эрмана [17], З. Ша [18] и Ж. К. Йокkоза [19] ответ на поставленный вопрос – отрицателен. В частности показано, что для достаточно больших r существует открытое множество в $\mathrm{Diff}^r_\nu(M)$, каждое отображение из которого обладает множествами положительной меры из инвариантных торов коразмерности 1; на каждом торе все Ляпуновские показатели — нулевые.

При достаточно высокой гладкости отображений КАМ-теория гарантирует существование орбит с нулевыми Ляпуновскими показателями для многих (открытое множество) отображений.

В отсутствие же "интегрального инварианта" (сохранения объема) нулевые Ляпуновские показатели встречаются гораздо реже.

Многие результаты относятся к коциклам, а не к диффеоморфизмам (диффеоморфизм можно рассматривать как коцикл, действующий на касательном расслоении). Фю-

[15] A. Baraviera, C. Bonatti. Removing zero Lyapunov exponents. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **23** (2003), pp. 1655–1670.

[16] Cheng, C.-Q., Y.-S. Sun Existence of invariant tori in three dimensional measure-preserving mappings. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **47** (1989/90), no. 3, 275–292.

[17] M. Herman Stabilité Topologique des systèmes dynamiques conservatifs. (1990) preprint.

[18] Z. Xia Existence of invariant tori in volume-preserving diffeomorphisms. *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **12** (1992), no. 3, 621–631.

[19] J.-C. Yoccoz. Travaux de Herman sur les tores invariants. *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1991/92. Astérisque No. 206 (1992), Exp. No. 754, 4, 311–344.

рстенберг показал [20], что для случайного произведения матриц в типичном случае старший Ляпуновский показатель положителен. Далее это утверждение было обобщено на коциклы с гиперболической динамикой в базе [21].

В работе Боки, Файада и Пужалса [22] изучается типичность в множестве устойчиво-эргодических диффеоморфизмов и обнаруживается открытое и плотное подмножество отображений, которые неравномерно гиперболичны и допускают доминирующее разложение. Следует отметить, что согласно А. Ташиби [23], не всякий устойчиво эргодический диффеоморфизм приближается частично гиперболическими.

К. Бонатти и М. Виана построили [24] пример C^1-устойчивого, сохраняющего объем неравномерно гиперболического диффеоморфизма, не имеющего инвариантных гиперболических подпространств.

Цель работы.

Целью настоящей работы является исследование типичности возникновения нулевых показателей Ляпунова в косых произведениях и гладких динамических системах.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Исследованы ступенчатые косые произведения над сдвигом Бернулли со слоем окружность. Доказано, что в пространстве таких отображений существует открытая область такая, что каждое отображение из этой области имеет инвариантную меру с нулевым показателем Ляпунова.

[20] H. Furstenberg, H. Kesten. Products of random matrices. *The Annals of Mathematical Statistics*, **31** (1960), pp. 457–469.

[21] C. Bonatti, X. Gomez-Mont, M. Viana. Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices. *Annales Inst. Henri Poincare*, **20** (2003), pp. 579–624.

[22] J. Bochi, B. R. Fayad, E. Pujals. A remark on conservative diffeomorphisms. *C*omptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. I 342 (2006), pp. 763 – 766.

[23] A. Tazhibi. Stably ergodic diffeomorphisms that are not partially hyperbolic. *Israel Journal of Mathematics*, **24** (2004), pp. 315–344.

[24] C. Bonatti, M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel Journal of Mathematics*, **115** (2000), pp. 157–193.

- Обнаружена открытая область в пространстве диффеоморфизмов трехмерных многообразий, каждое отображение из которой обладает неатомарной эргодической инвариантной мерой с нулевым Ляпуновским показателем.

- На четырехмерном компактном гладком многообразии построен пример динамической системы, обладающей частично гиперболическим локально максимальным аттрактором и неатомарной эргодической инвариантной мерой с носителем, совпадающим со всем аттрактором, и с нулевым показателем Ляпунова. Доказано, что все C^1-близкие отображения обладают тем же свойством.

Таким образом, впервые открыт и обоснован эффект устойчивости нулевых показателей Ляпунова для гладких диффеоморфизмов в условиях отсутствия фиксированной инвариантной меры.

Методы иссследования

В работе используются методы эргодической теории, теории динамических систем (в том числе, существенную роль играет теория частично гиперболических отображений), методы символической динамики.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны в теории динамических систем с дискретным и непрерывным временем.

Апробация работы.

Основные результаты настоящей диссертации докладывались:

- на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 2004–2006гг.),

- на семинаре Математического Института им В. А. Стеклова под руководством акад. Д. В. Аносова (2005 г.),

- на международной конференции “Hilbert 16th and related problems in dynamics” (Москва, декабрь 2003г.),

- на международной конференции “Lyapunov exponents and related topics in dynamics and geometry” (Москва, январь 2005г.),
- на международной конференции “Laminations and group actions in dynamics” (Москва, февраль 2007 г.),
- на семинаре Института проблем передачи информации (Москва, июль 2007 г.).

Публикации

Основное содержание работы опубликовано; список из трёх работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, в совокупности включающих в себя 18 параграфов, и списка литературы, включающего 41 наименование. Полный объём диссертации 80 страниц.

Основное содержание диссертации

Главной целью диссертации является исследование типичности нулевых показателей Ляпунова в разных динамических системах.

Во **введении (глава 1)** формулируется основной результат работы:

Теорема A. *Для замкнутого многообразия M, $\dim M \geq 4$, найдется такая открытая область $U \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, что любой диффеоморфизм $f \in U$ имеет локально максимальный частично гиперболический аттрактор $\Lambda \subset M$ и неатомарную эргодическую инвариантную меру μ с $\mathrm{supp}\,\mu = \Lambda$, один из показателей Ляпунова относительно которой равен нулю.*

В **главе 2** исследуются ступенчатые косые произведения над сдвигом Бернулли со слоем окружность вида:

$$G : \Sigma^2 \times S^1 \to \Sigma^2 \times S^1, \quad (\omega, x) \to (\sigma\omega, g_{\omega_0}(x)),$$

где Σ^2 – пространство двухсторонних последовательностей из символов нулей и единиц, а через σ обозначен сдвиг Бернулли. Такое отображение полностью определяется двумя диффеоморфизмами окружности g_0 и g_1.

Основной результат для ступенчатых косых произведений получен в виде следующей теоремы:

Теорема 1 (в диссертации Теорема 9). *В пространстве* $(\mathrm{Diff}^1(S^1))^2$ *пар диффеоморфизмов окружности с* C^1*-топологией существует открытое подмножество* U*, для каждой пары из которого соответствующее ступенчатое косое произведение имеет инвариантную неатомарную эргодическую меру, для которой показатель Ляпунова вдоль слоя равен нулю.*

Под показателем Ляпунова вдоль слоя для отображения G понимается усредненный логарифм производной вдоль слоя, а под неатомарностью меры – бесконечность ее носителя.

Для доказательства теоремы 1 определяются три необходимых свойства полугруппы отображений окружности, соответствующей косому произведению – плотность каждой орбиты, наличие растяжения вдоль слоя в каждой точке, и наличие хотя бы одной притягивающей периодической орбиты. В разделах 1.1–1.5 доказывается, что для косого произведения, обладающего этими свойствами заключение теоремы 1 выполнено.

А именно, в разделе 1.1 описывается конструкция, позволяющая по одной периодической орбите построить другую, с бóльшим периодом, меньшим (по модулю) показателем Ляпунова и достаточно метрически близкую к исходной. В разделе 1.2 по индукции строится последовательность периодических орбит и для нее обосновывается выполнение достаточных условий эргодичности. В разделе 1.3 даются достаточные условия эргодичности предельной меры. Эргодичность есть следствие теоремы Биркгофа-Хинчина, обосновывается через совпадение временных и пространственных средних. После этого, в разделе 1.4 показывается, что для рассматриваемых отображений можно утверждать, что если предел эргодических мер эргодичен, то показатель Ляпунова вдоль слоя для предельной меры есть предел показателей Ляпунова. Кроме того, в разделе 1.5 обосновывается неатомарность (бесконечность носителя) найденной эргодической меры.

И наконец, в разделе 1.6 показывается, что для пары подходящим образом выбранных порождающих отображений – гиперболическое отображение Морса-Смейла с 1 аттрактором и 1 репеллером и поворот окружности на малый угол – все три свойства выполнены, равно как и для всех C^1-близких пар.

Глава 3 посвящена исследованию общего случая косых произведений вида

$$F : M \to M, \quad (\omega, x) \to (\sigma\omega, f_\omega(x))$$

где $f_\omega : S^1 \to S^1, \omega \in \Sigma^N$, – семейство диффеоморфизмов окружности, зависящих, вообще говоря, от полного слова в базе.

Косые произведения интересны, так как они естественным образом возникают как ограничения частично гиперболических гладких динамических систем на их инвариантные множества. Основные результаты главы сформулированы в следующей теореме:

Теорема 2 (в диссертации Теорема 13). *Существуют диффеоморфизмы* $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 : S^1 \to S^1$, *все* g_i *могут быть взяты произвольно близкими к* $id \in \mathrm{Diff}^1(S^1)$, *такие, что для любых* $C > 1, \alpha > 0$, *где:*

$$L = \max_i \max_{x \in S^1}(\|Dg_i(x)\|, \|Dg_i^{-1}(x)\|), \qquad \alpha > \log_2 L,$$

и достаточно малых окрестностей $U_i(g_i)$ *в* $\mathrm{Diff}^2(S^1)$ *выполнено следующее.*

Предположим, что отображение F *удовлетворяет условиям:*

$$f_\omega \in U_{w_0} \text{ для любого } \omega \in \Sigma^5;$$

$$d_{C^1}(f_\omega, f_{\omega'}) \leq C(d_{\Sigma^5}(\omega, \omega'))^\alpha \text{ для любых } \omega, \omega' \in \Sigma^5.$$

Тогда на $\Sigma^5 \times S^1$ *существует неатомарная инвариантная эргодическая мера с показателем Ляпунова вдоль слоя, равным нулю.*

Доказательство повторяет схему доказательства теоремы 1. Для обоснования основной леммы (об индуктивном построении следующей периодической орбиты по предыдущей) автором, следуя А. Городецкому и Ю. С. Ильяшенко [7], разработана техника контроля погрешности вдоль слоя.

Глава 4 посвящена изучению гладких динамических систем и переносе интересующих свойств мягких косых произведений на случай гладких диффеоморфизмов.

Теорема 3 (в диссертации Теорема 14). *Для компактного риманова многообразия* M, $\dim M \geq 3$, *найдется такая открытая область* $U \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, *что любой диффеоморфизм* $f \in U$ *имеет локально максимальное инвариантное частично гиперболическое множество* $\Lambda \subset M$ *и неатомарную эргодическую инвариантную меру* μ, $\mathrm{supp}\,\mu \subset \Lambda$, *один из показателей Ляпунова относительно которой равен нулю.*

Теорема 3 доказывается по следующему плану. Каждая ступенчатая система G из теоремы 1 допускает “гладкую реализацию” в смысле [7]. А именно, существует гладкое отображение $\mathcal{G}$ трехмерного тора в себя с инвариантным частично гиперболическим множеством Λ, расслоенным на окружности, обладающее следующим свойством. Ограничение $\mathcal{G}$ на Λ топологически сопряжено G, причем ограничение сопрягающего гомеоморфизма на любой центральный слой является гладким отображением.

Из теории частично гиперболических отображений известно, что малое C^1-возмущение $\mathcal{B}$ отображения $\mathcal{G}$ имеет инвариантное множество, гомеоморфное Λ. Ограничение $\mathcal{B}$ на инвариантное множество сопряжено мягкому косому произведению F, для которого выполнены условия теоремы 2. Применение теоремы дает эргодическую меру с нулевым показателем Ляпунова вдоль слоя, которая сопрягающим гомеоморфизмом переносится на трехмерный тор. Показатель Ляпунова вдоль слоя становится центральным показателем Ляпунова гладкого частично гиперболического отображения $\mathcal{B}$.

В **главе 5** доказан эффект устойчивости нулевых Ляпуновских показателей относительно эргодической инвариантной меры, сосредоточенной на частично гиперболическом аттракторе (теорема А).

Для получения меры на аттракторе, база в конструкции мягких косых произведений — подкова Смейла, закодированная символами 0 и 1 — заменяется на соленоид Смейла-Вильямса. Доказывается, что несмотря на связность соленоида (а значит, отсутствие над ним ступенчатых систем, обладающих гладкой реализацией), можно провести построение мягкого косого произведения с нужными свойствами и перенести их на гладкое компактное многообразие размерности 4 или выше.

В разделе 4.1 приводится общая схема доказательства теоремы 4. В разделе 4.2 даются необходимые определения и формулируется результат для мягких косых произведений над соленоидом. В разделе 4.3 определяются свойства, позволяющие контролировать динамику для мягких систем и обосновывается их устойчивость при C^1-возмущениях. В разделе 4.4 для таких систем строится последовательность периодических орбит со стремящимися к нулю показателями Ляпунова. В разделе 4.5 обосновывается эргодичность и равенство нулю показателя Ляпунова для предельной меры (эта часть доказательства остается без изменений). И, наконец, в разделе 4.6 определяется гладкая реализация для почти ступенчатых отображений соленоида, что вместе с рассуждениями главы 4 завершает доказательство теоремы А.

Автор выражает глубокую и искреннюю признательность своему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. С. Ильяшенко за постановку задач, постоянное внимание к работе, ценные советы и содержательные обсуждения.

Список работ автора по теме диссертации

[1] А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко, В. А. Клепцын, М. Б. Нальский, Неустранимость нулевых показателей Ляпунова, *Функциональный анализ и его приложения*, **39** (2005), вып. 1, с. 27–38.

В работе [1] А. С. Городецкому и Ю. С. Ильяшенко принадлежат постановка задачи и идея её решения, М. Б. Нальскому доказательства лемм 1, 3 и 4, а В. А. Клепцыну доказательство леммы 2 и теоремы 3. Теорема 2 выводится из лемм 1, 2 и 3, а теорема 1 из теорем 2 и 3.

[2] М. Б. Нальский, Негиперболичность инвариантных мер на максимальном аттракторе. Депонировано в ВИНИТИ РАН, N 918-B2007.

[3] В. А. Клепцын, М. Б. Нальский, Сближение орбит в случайных динамических системах на окружности. *Функциональный анализ и его приложения*, **38** (2004), вып. 4, с. 36–54.

В работе [3] М. Б. Нальскому принадлежат результаты численного моделирования, а В. А. Клепцыну теоретическое обоснование.