МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.55

Антонов Алексей Петрович

ГЛАДКОСТЬ СУММ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Специальность: 01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор *Дьяченко Михаил Иванович*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор *Буланов Александр Павлович,* кандидат физико-математических наук, доцент *Симонов Борис Витальевич*
Ведущая организация:	Московский Государственный Институт Электронной Техники

Защита состоится “ 9” ноября 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, сектор “А”, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “ 9” октября 2007 г.

Ученный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор Т.П.Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одним из наиболее интересных классов тригонометрических рядов являются ряды с монотонными коэффицентами. Для общих тригонометрических рядов справедлива следующая теорема, доказанная Харди и Литтльвудом.

Теорема А.

а) *Пусть функция* $f(\mathbf{x})$ *имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} a_{\mathbf{n}}(f)e^{i\mathbf{nx}}$. *Тогда если* $1 < p \le 2$ *и* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p \prod_{j=1}^{m} (|n_j|+1)^{p-2} \le c(p,\ m)||f||_p^p.$$

б) *Пусть* $2 \le p < \infty$ *и числа* $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m}$ *таковы, что*

$$J_p(a) = \left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} |a_{\mathbf{n}}|^p \prod_{j=1}^{m} (|n_j|+1)^{p-2}\right)^{1/p} < \infty,$$

тогда найдется $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$ *такая, что для любого* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$

$$a_{\mathbf{n}}(f) = a_{\mathbf{n}} \text{ и } ||f||_p \le c(p,\ m)J_p(a).$$

Для $m = 1$ доказательство этой теоремы можно найти в книге[1], а для $m > 1$ его можно получить применением индукции.

Что касается рядов с монотонными коэффициентами, то для них Харди и Литтльвуд заметили, что в одномерном случае справедлив более сильный результат, а именно :

Теорема Б. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$, *где* $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge 0$, $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для того, чтобы* $f(x) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T})$, $1 <$

[1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Изд. “Мир”. 1965. Т. 2.

$p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < \infty.$$

Для кратного случая возможны различные определения монотонности.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $a_{n_1,\ \dots,\ n_m}$ монотонна в смысле Харди, если для любых $n_1,\ \dots,\ n_m \geq 1$ верно неравенство

$$\sum_{j_1=0,\ \dots,\ j_m=0}^{1} (-1)^{|\mathbf{j}|} a_{n_1+j_1,\ \dots,\ n_m+j_m} \geq 0,$$

где $|\mathbf{j}| = j_1 + \ldots + j_m$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $a_{n_1,\ \dots,\ n_m}$ монотонно убывает (возрастает) по каждому направлению, если для любых $n_1,\ \dots,\ n_m \geq 1$ и для любых $j_1,\ \dots,\ j_m \geq 0$ верно неравенство

$$a_{n_1,\ \dots,\ n_m} \geq a_{n_1+j_1,\ \dots,\ n_m+j_m}\ (a_{n_1+j_1,\ \dots,\ n_m+j_m} \geq a_{n_1,\ \dots,\ n_m}).$$

Очевидно, что если $a_{n_1,\ \dots,\ n_m} \to 0$ при $\max(n_1,\ \dots,\ n_m) \to \infty$, то из монотонности по Харди вытекает монотонность по каждому направлению.

Ряды с коэффициентами, монотонными по Харди являются достаточно узким классом рядов. Например, сферическое ядро Дирихле не принадлежит этому классу.

Позднее, теорема A обобщалась на кратный случай в работах Морица[2] и Вуколовой, Дьяченко[3] (для коэффициентов, монотонных в смысле Харди). Дьяченко[4] (для коэффициентов, монотонных по каждому направлению) установил такой результат

[2]Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coeffitiens, Proc. Amer. Math. Sci. 1965. 109. № 2. P. 417-435.

[3]Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами, Изв. ВУЗ (серия Математика). 1994. 133. № 7. С. 20-28.

[4]Дьяченко М.И. Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p, Мат. Сборник. 1993. 184. № 3. С. 3-20.

Теорема (Дьяченко). *Пусть* $m \geq 2$, $Q(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$, *последовательность* $a_{\mathbf{n}}$ *— монотонно убывает по каждому направлению и неотрицательна. Тогда для* $\frac{2m}{m+1} < p \leq 2$

$$||Q(\mathbf{x})||_p \leq c(p,\ m) \left(\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}}^p \left(\Pi_1(\mathbf{n})\right)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Им же было установлено, что при $1 < p \leq \frac{2m}{m+1}$ результат перестает быть верным. Утверждение теоремы Дьяченко было обобщено Драгошанским[5] на анизотропный случай.

Также верны обратные теоремы. Например

Теорема (Дьяченко[6]). *Пусть* $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ *— её ряд Фурье, и коэффициенты монотонно убывают по каждому направлению. Тогда*

$$\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}}^p \Pi^{p-2}(n) \leq c(p,\ m) ||f||_p^p.$$

Позднее Нурсултанов[7] обобщил этот результат на более широкий класс рядов.

В связи с этим представляет интерес задача описания классов Липшица в метрике L_p и более общая задача описания классов $\mathrm{H}_p^{\omega_1 \ldots \omega_m}$ и H_p^{ω} в терминах коэффициентов их тригонометрических рядов Фурье.

В одномерном случае для монотонных коэффициентов Фурье известны теоремы Лоренца[8] и Конюшкова[9].

[5] Драгошанский О.С. Анизотропные нормы ядер Дирихле и некоторые другие нормы тригонометрических полиномов, Мат. Заметки. 2000. 67. № 5. С. 686-701.

[6] D'jachenko M.I. Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients, Anal Math. 1990. 16. № 3. P. 173-190.

[7] Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств, Изв. РАН Матем. 2000. 64. № 1. С. 95-122.

[8] Lorentz G.G. Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen, Math. Z. 1948. 51. № 2. P. 135-149.

[9] Конюшков А.А. О классах Липшица, Изв. Ак. Наук СССР. 1957. № 21. С. 423-448.

Теорема В (Лоренц). *Пусть* $0 < \alpha < 1$, *функция* $f(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *— её ряд Фурье, причем* $a_n \downarrow 0$. *Тогда для того, чтобы* $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$$

при $n \to \infty$.

То же утверждение справедливо для ряда из синусов.

Теорема Г (Конюшков). *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, *функция* $f(x) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T})$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *— её ряд Фурье, причем* $a_n \downarrow 0$. *Тогда для того, чтобы функция* $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha-1/p}}\right)$$

при $n \to \infty$.

То же утверждение справедливо для ряда из синусов.

Для двойных тригонометрических рядов с коэффициентами, монотонными в смысле Харди аналоги теорем Лоренца и Конюшкова были получены Т. Ш. Тевзадзе.

Мы обобщим эти результаты на случай произвольной конечной размерности и коэффициентов, монотонных по каждому направлению.

Цель работы

Целью работы является изучение взаимосвязи поведения коэффициентов тригонометрических рядов многих переменных и гладкости сумм этих рядов в пространствах $\mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$ и $\mathrm{C}(\mathbb{T}^m)$.

Методы исследования

В диссертации используется аппарат теории кратных тригонометрических рядов, метрической теории функций и действительного анализа.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Получены следующие основные результаты:

1. Получены оценки норм некоторых тригонометрических полиномов в пространствах $L_p(\mathbb{T}^m)$, при p больших $\frac{2m}{m+1}$, где m — размерность пространства.

2. Получены аналоги теорем Лоренца и Конюшкова в пространствах $C(\mathbb{T}^m)$ и $L_p(\mathbb{T}^m)$, при p больших $\frac{2m}{m+1}$, где m — размерность пространства.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории кратных тригонометрических рядов, метрической теории функций и действительном анализе.

Апробация работы

Результаты автора докладывались на научно – исследовательском семинаре "Тригонометрические ортогональные ряды" под руководством акад. РАН П.Л. Ульянова, проф. М.К. Потапова и проф. М.И. Дьяченко в МГУ с 2004 по 2007 год (неоднократно), а также на международной конференции "Алгебра и Анализ" в Казани в 2004 году, 13 – ой Саратовской зимней школе в 2006 году, Воронежской зимней школе в 2007 году, международной конференции "Теория функций и вычислительные методы" в Астане в 2007 году.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем текста — 62 страниц. Список литературы содержит 21 наименование.

Поддержка

Исследования по теме диссертации частично были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00268) и Программой поддержки ведущих научных школ (проект НШ 4681.2006.1).

Содержание работы

Во введении излагается краткая история вопроса, обосновывается актуальность темы настоящего исследования, проведен обзор работ, близких к теме диссертации, введены основные понятия, в том числе различные определения монотонности для кратного случая, а также полного и спешанного модулей непрерывности, и кратко изложены основные результаты диссертации.

Во второй главе доказываются вспомогательные результаты представляющие определенный самостоятельный интерес.

В третьей главе рассматриваются результаты о взаимосвязи скорости убывания коэффициентов Фурье функции и ее гладкости в пространствах $\mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$, где $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$.

Сначала введем некоторые определения.

Пусть Γ_m — множество всех m – мерных векторов из 0 и 1. Если $\gamma \in \Gamma_m,\ \gamma = (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_m)$, то положим $|\gamma| = \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$. Обозначим

$$\Delta_1(f,\ \mathbf{x},\ \mathbf{h}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_m} (-1)^{|\gamma|} f(\mathbf{x} + \gamma \mathbf{h}),$$

где $\gamma \mathbf{h} = (\gamma_1 h_1,\ \ldots,\ \gamma_m h_m)$.

Определение 3. Пусть функция $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m),\ 1 < p \leq \infty$, где $\mathrm{L}_\infty \equiv \mathrm{C}$. Смешанным модулем непрерывности функции назовем

$$\omega_p(f,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) = \sup_{|h_1| \leq \delta_1,\ \ldots,\ |h_m| \leq \delta_m} ||\Delta_1(f,\ \mathbf{x},\ \mathbf{h})||_p.$$

Кроме того, можно ввести понятие полного модуля непрерывности.

Определение 4. Пусть $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m),\ 1 < p \leq \infty,\ \delta \in [0,\ 1)$. Тогда положим

$$\omega_p(f,\ \delta) = \sup_{|\mathbf{h}| \leq \delta} ||f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})||_p.$$

Определение 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\omega(\delta)$ — одномерный модуль непрерывности. Через H_p^ω обозначим множество всех функций $f(\mathbf{t})$, таких что

1) $f(\mathbf{t}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$,

2) $\omega_p(f,\ \delta) = O\left(\omega(\delta)\right),\ \delta \to 0+$.

Определение 6. Пусть $1 \leq p \leq \infty,\ \delta = (\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m)$ и задан смешанный модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Через $\mathrm{H}_p^{\overline{\omega}}$ обозначим множество всех функций $f(\mathbf{t})$, таких что

1) $f(\mathbf{t}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$,

2) $\omega_p(f,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) = O\left(\omega(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m)\right),\ \delta_j \to 0+$.

Если $\omega_1(\delta_1),\ \ldots,\ \omega_m(\delta_m)$ — модули непрерывности и $\omega(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) = \prod\limits_{j=1}^{m} \omega_j(\delta_j)$, то положим $\mathrm{H}_p^{\omega_1\ldots\omega_m} = \mathrm{H}_p^{\overline{\omega}}$.

Одномерные классы H_p^{ω} рассматривались П. Л. Ульяновым[10].

В тех случаях, когда смешанный модуль непрерывности не допускает представления $\omega(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) = \prod\limits_{j=1}^{m} \omega_j(\delta_j)$, будем называть его смешанным модулем непрерывности общего вида.

Основными результатами являются нижеследующие.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $m \geq 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, $\omega_i(\delta)$ *— модули непрерывности, для которых выполнены условия Бари – Стечкина* (подобные условия подробно рассматривались в работе П. Л. Ульянова[11]) *:*

1) $\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega_i(t)}{t} dt = O(\omega_i(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega_i(t)}{t^2} dt = O(\omega_i(\delta))$,

при $\delta \to 0+$, $i = 1,\ \ldots,\ m$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$ *— её ряд Фурье, коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Тогда для того, чтобы* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}_p^{\omega_1\ldots\omega_m}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{\mathbf{n}} = a_{n_1,\ \ldots,\ n_m} = O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n_1}\right)}{n_1^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\omega_m\left(\frac{1}{n_m}\right)}{n_m^{1-\frac{1}{p}}} \right)$$

при $n_1,\ \ldots,\ n_m \to \infty$.

Теорема 3.1.1 допускает обобщение и на случай смешанного модуля непрерывности общего вида.

[10] Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^{ω}, Изв. Ак. Наук СССР. 1968. № 32. С. 649-686.

[11] Ульянов П.Л. О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, Успехи матем. наук. 1953. 6. № 8. С. 133-141.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $m \geq 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, $\omega(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) \in BS(m)$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{T}^m)$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ *— её ряд Фурье, коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Тогда для того, чтобы* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}_p^{\overline{\omega}}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{\mathbf{n}} = a_{n_1,\ \ldots,\ n_m} = O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n_1},\ \ldots,\ \frac{1}{n_m}\right)}{(n_1 \cdot \ldots \cdot n_m)^{1-\frac{1}{p}}}\right)$$

при $n_1,\ \ldots,\ n_m \to \infty$.

Что же касается случая, когда гладкость функции определяется с помощью полного модуля непрерывности, то здесь получены такие утверждения.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $m \geq 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, $\omega(\delta)$ *— модуль непрерывности, для которого выполнены условия Бари – Стечкина :*

1) $\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O(\omega(\delta))$,

при $\delta \to 0+$, *последовательность* $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$ *монотонно убывает по каждому направлению и существует такая постоянная* c, *что для любого* $i = 1,\ \ldots,\ m$ *выполняются условия : для любого* n_i *:*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{\infty} \sum_{k_{i+1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a^p_{k_1,\ \ldots,\ k_{i-1},\ n_i,\ k_{i+1},\ \ldots,\ k_m} \times$$

$$\times \prod_{j=1,\ j\neq i}^{m} k_j^{p-2} \leq \frac{c\omega^p\left(\frac{1}{n_i}\right)}{n_i^{p-1}}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ является рядом Фурье функции $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}_p^{\omega}$.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $m \geq 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}_p^{\omega}$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ *— её ряд Фурье,* $\omega(\delta)$ *— модуль непрерывности, для которого выполнены условия Бари – Стечкина :*

1) $\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O(\omega(\delta))$,

при $\delta \to 0+$, *коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Тогда найдется такая постоянная* c, *что для любого* $i = 1, \ldots, m$ *будут выполняться условия : для любого* n_i *:*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{\infty} \sum_{k_{i+1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a^p_{k_1,\, \ldots,\, k_{i-1},\, n_i,\, k_{i+1},\, \ldots,\, k_m} \times$$

$$\times \prod_{j=1,\; j\neq i}^{m} k_j^{p-2} \leq \frac{c\omega^p\left(\frac{1}{n_i}\right)}{n_i^{p-1}}.$$

В четвертой главе решается аналогичная задача в пространстве $\mathrm{C}(\mathbb{T}^m)$. Здесь получены такие утверждения.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $m \geq 2$, $\omega_i(\delta)$ *— модули непрерывности, для которых выполнены условия Бари – Стечкина :*

1) $\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega_i(t)}{t} dt = O(\omega_i(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega_i(t)}{t^2} dt = O(\omega_i(\delta))$,

при $\delta \to 0+$, $i = 1, \ldots, m$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^m)$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$ *— её ряд Фурье, коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Тогда для того, чтобы* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}^{\omega_1 \ldots \omega_m}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{\mathbf{n}} = a_{n_1,\, \ldots,\, n_m} = O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n_1}\right)}{n_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\omega_m\left(\frac{1}{n_m}\right)}{n_m}\right)$$

при $n_1, \ldots, n_m \to \infty$.

Для полного модуля непрерывности установлены такие результаты.

Теорема 4.2.1. *Пусть* $m \geq 2$, $\omega(\delta)$ *— модуль непрерывности, для которого выполнены условия Бари – Стечкина :*

1) $\int\limits_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O(\omega(\delta))$,

при $\delta \to 0+$, *последовательность* $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$ *монотонно убывает по каждому направлению и существует такая постоянная* c, *что для любого* $i = 1, \ \ldots, \ m$ *выполняются условия : для любого* n_i :

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{\infty} \sum_{k_{i+1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a_{k_1, \ \ldots, \ k_{i-1}, \ n_i, \ k_{i+1}, \ \ldots, \ k_m} \leq$$

$$\leq \frac{c\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)}{n_i}.$$

Тогда $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ *является рядом Фурье функции* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}^\omega$.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $m \geq 2$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{H}^\omega$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ *— её ряд Фурье,* $\omega(\delta)$ *— модуль непрерывности, для которого выполнены условия Бари – Стечкина :*

1) $\int\limits_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O(\omega(\delta))$,

при $\delta \to 0+$, *коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Тогда найдется такая постоянная* c, *что для любого* $i = 1, \ \ldots, \ m$ *будут выполняться условия : для любого* n_i :

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{\infty} \sum_{k_{i+1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a_{k_1, \ \ldots, \ k_{i-1}, \ n_i, \ k_{i+1}, \ \ldots, \ k_m} \leq$$

$$\leq \frac{c\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)}{n_i}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю М.И.Дьяченко за постановку задач, ценные указания и постоянное внимание к данной работе.

Список работ автора по теме диссертации

1. А. П. Антонов Гладкость сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, Изв. вуз. Матем. 2007. №4. стр. 21 – 29.

2. А. П. Антонов Гладкость сумм двойных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, Вестн. Моск. ун – та. Матем. Механ. 2004. №5. стр. 26 – 33.

3. А. П. Антонов О классах $\mathbf{H}^{\omega}$ И $\mathbf{H}^{\omega_1,\ \dots,\ \omega_m}$ для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, Материалы международной конференции “Теория функций и вычислительные методы”, Астана, 2007. стр. 35 – 37.

4. А. П. Антонов О классах $\mathrm{Lip}(\alpha,\ p)$ для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, Материалы Воронежской зимней школы, Воронеж, 2007. стр. 12 – 13.

5. А. П. Антонов Гладкость сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, Тезисы докладов 13 – й Саратовской зимней школы, Саратов, 2006. стр. 15 – 16.

6. А. П. Антонов Гладкость сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, Том 23, Казань, 2004. стр. 79 – 80.