Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.547.54/517.547.7

Ефимов Дмитрий Александрович

Структурные и линейно–метрические свойства максимальных F–алгебр голоморфных функций в полуплоскости

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Гаврилов Валериан Иванович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Суетин Павел Кондратьевич;
кандидат физико-математических наук доцент Вячеславов Николай Степанович.

Ведущая организация: Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 14 ноября 2007 года в 16.15 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85
доктор физико-математических наук
профессор Т. П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Исторически первыми из максимальных классов голоморфных функций изучались классы, определенные в круге[1]. Интерес к пространствам функций, голоморфных в областях с границей бесконечной меры, впервые возник в начале 30-ых годов прошлого века в связи с исследованиями Р.Пэли и Н.Винера свойств преобразования Фурье. В работах Э.Хилле и Я.Д.Тамаркина [2] были рассмотрены классы $H^p(D), p \geqslant 1$, таких голоморфных функций f в полуплоскости $D = \{z = x + iy \mid y > 0\}$, для которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx < +\infty, \; p \geqslant 1,$$

(аналоги пространств Харди в случае круга), а в основе изучения лежало установленное ими наблюдение о представимости функций из $H^p(D), p \geqslant 1$, абсолютно сходящимся интегралом Коши.

Немногими годами позже советский математик В.И.Крылов [3] провел системное исследование более широких, чем $H^p(D)$, классов голоморфных функций в полуплоскости (и в частности, введенного им аналога класса Неванлинны в круге). Определенная часть достигнутых в рассматриваемой области результатов, включающая полученные с применением методов функционального анализа, отражена в монографиях [4, 5].

Дальнейший интерес к данной тематике возник в самом конце

---

[1]Friedrich Riesz. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Math.Zeit.*, **18**(1923), 1/2 Heft, 87–95

[2]E.Hille, J.D.Tamarkin. *Annals of Mathematics*, (2), **34**(1933), 606–614; *Fund.Math.*, (2), **25**(1935), 329–352

[3]В.И.Крылов. О функциях, регулярных в полуплоскости.*Математический сборник*, 6 **48**, 1939, N.1, 95–137

[4]К.Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963, 312 с

[5]П.Кусис. Введение в теорию пространств H^p. М., Мир, 1984, 368 с

XX века, когда японские математики Н.Мочизуки [6] и Я.Иида [7] продолжили исследования В.И.Крылова. Однако изучавшиеся ими множества голоморфных функций, как и классы В.И.Крылова, не образуют линейных пространств, что осложняет их изучение методами функционального анализа. В это же время Л.М.Ганжула [8] (ученица В.И.Гаврилова) рассмотрела новый вид максимальных классов, а именно, пространство $M(D)$ таких голоморфных в полуплоскости D функций f, для которых справедливо отношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + Mf(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + \sup_{y>0} |f(x+iy)|)\,dx < +\infty,$$

и доказала, что класс $M(D)$ образует $F-$алгебру относительно определенной в нем естественной инвариантной метрики.

Диссертант изучает общие классы $M^q(D), q > 0$, голоморфных функций f в полуплоскости, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + \sup_{y>0} |f(x+iy)|)\,dx < +\infty,\ q > 0, \tag{1}$$

отмечая, что каждый $M^q(D), q > 0$, содержит классы Харди $H^p(D)$ для всех $0 < p \leqslant q$. Аналоги классов $M^q(D)$ в круге и шаре рассматривались в статье [9].

Параллельно в диссертации изучаются классы $N^q(D), q > 0$, всех

[6] N.Mochizuki. Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane. *Hokk.Math.J.*, **20**, 1991, 609–620

[7] Y.Iida. Nevanlinna-type spaces on the upper half plane. *Nihonkai Mathematical Journal*, **12**, No.2, 2001, 113–121

[8] Л.М.Ганжула. Об одной F-алгебре голоморфных функций в верхней полуплоскости. *Mathematica Montisnigri*, **XII**, 2000, 33–45.

[9] В.И.Гаврилов, А.В.Субботин. F-алгебры голоморфных функций в шаре, содержащие класс Неванлинны. *Math. Montisnigri*, **XII**, 2000, 17–31.

голоморфных в D функций f, у которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x+iy)|)\,dx < +\infty,\ q>0, \tag{2}$$

(аналоги классов И.И.Привалова для круга [10]).

В диссертации строится теория относительно этих классов, доказывается, что они обладают хорошими линейно-метрическими свойствами, описывается структура их подпространств и линейных изометрий, формулируется и доказывается целый ряд структурных свойств.

Цель работы.

Целью работы является изучение пространств $M^q(D)$ и $N^q(D), q>0$, голоморфных функций f в полуплоскости D. Перед автором стояли следующие задачи:

- исследовать граничные свойства и оценить рост функций из указанных классов;
- найти связи между ранее известными классами и вновь введенными;
- доказать линейные свойства пространств, описать их ограниченные и вполне ограниченные подмножества;
- найти общий вид линейных изометрий пространств $N^q(D)$.

Методы исследования.

Результаты диссертации получены с использованием методов теории функций комплексного переменного, математического анализа и функционального анализа.

[10]И.И.Привалов. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М.: Изд-во МГУ, 1941, 206 с.

Научная новизна.

Все основные научные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Установлены связи изучаемых классов с известными максимальными классами в полуплоскости: в частности, доказано, что $M^q(D)$ и $N^q(D)$ совпадают как множества в случае $q > 1$;

2. Исследовано граничное поведение и получены оценки роста для функций из классов $M^q(D)$ и $N^q(D), q > 0$;

3. Предложено новое факторизационное представление функций из $M^q(D), q > 1$, с помощью произведения Бляшке, построенного по нулям этих функций;

4. Доказано, что классы $M^q(D)$ и $N^q(D), q > 0$, образуют $F-$алгебры относительно естественных метрик;

5. Доказаны критерии свойств ограниченности и полной ограниченности подмножеств в пространствах $M^q(D), q > 0$;

6. Установлен общий вид линейных изометрий в $N^q(D), q > 0$.

Практическая и теоретическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории функций комплексного переменного, функционального анализа, а также, в теории аппроксимаций аналитических функций.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре кафедры математического анализа в МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством проф. В.И.Гаврилова (неоднократно, 2001–2007 гг.);

- на 24-й конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (2002 г.);

- в Саратовской зимней математической школе "Современные проблемы теории функций и их приближения" (Саратов, 2006 г.);
- на научном семинаре природно-математического факультета Университета Черногории (2006 г.);
- на конференции "Ломоносовские чтения" в МГУ (2007 г.).

Публикации.

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [1]–[4], список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 32 наименования. Общий объем работы – 69 страниц.

Содержание работы

Во **введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные задачи и результаты диссертации.

В **первой главе** приводятся определения основных пространств функций, голоморфных в полуплоскости $D = \{z = x + iy \mid y > 0\}$, рассматриваемых в диссертации, а именно:

1) пространства Харди $H^p(D)$ голоморфных функций f в полуплоскости D, для которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx < +\infty;$$

2) класс Крылова $\mathfrak{N}(D)$ голоморфных в D функций f, удовле-

творяющих условию

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |f(x+iy)|\, dx < +\infty,$$

где $\ln_+ a = \max(\ln a, 0), a > 0$ и $\ln_+ 0 = 0$;

3) классы $\mathfrak{N}^q(D), q > 0$, рассмотренные в [7] и определяемые как множества голоморфных в D функций f, для которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\ln_+ |f(x+iy)|)^q \, dx < +\infty;$$

4) классы $M^q(D), q > 0$, определяемые с помощью (1);

5) классы $N^q(D), q > 0$, определяемые с помощью (2).

В пространствах $M^q(D)$ и $N^q(D)$ рассматриваются характеристики $\|f\|_{M^q}$ и $\|f\|_{N^q}$ как α_q-ые степени левых частей в (1) и (2) с $\alpha_q = \min(1, 1/q), q > 0$.

Во втором параграфе первой главы изучаются структурные свойства классов $M^q(D)$ и $N^q(D), q > 0$. Сформулируем основные из них.

Теорема (аналог теоремы Ф. и М. Риссов). *Пусть $f \in M^q(D), q > 0$. Тогда,*

1) f имеет граничные пределы $f^+(x) = \lim\limits_{y>0} f(x+iy)$ почти всюду на $\mathbb{R}$;

2) граничная функция f^+ обладает свойством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + |f^+(x)|\right) \, dx < +\infty;$$

3) для $f_h(z) = f(z+ih)$, $h > 0$, выполняется равенство

$$\lim_{h\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + M(f_h - f)(x))\, dx = 0.$$

Теорема (о связи между пространствами).

1) Для каждого $q > 1$ *множество* $M^q(D)$ *совпадает с множеством* $N^q(D)$*;*

2) $\bigcup\limits_{0<p\leqslant q} H^p(D) \subset M^q(D)$.

Отмечается также, что в отличие от классов Харди в круге, пространства $M^q(D)$ не связаны между собой никакими включениями при различных $q > 0$.

Для функций из пространств $M^q(D)$ справедливы оценки роста.

Теорема (оценка роста). *Для любой функции* $f \in M^q(D), q > 0$*, справедливо неравенство*

$$\ln(1 + |f(z)|) \leqslant \frac{E_q \|f\|_{M^q}^{\beta_q}}{y^{1/q}}, \quad z = x + iy \in D,$$

где постоянная E_q *не зависит от* f *и* $\beta_q = \max(1, 1/q)$.

Аналогичное неравенство верно и для функций из пространств $N^q(D)$.

Первая глава завершается факторизационной теоремой.

Теорема (факторизационная теорема). *Пусть* $q > 1$. *Тогда любая функция* $f \in M^q(D)$ *представляется в виде произведения двух функций:*

$$f(z) = b_f(z)F(z),$$

где b_f *– произведение Бляшке для функции* f*:*

$$b_f(z) = \prod_{(\nu)} \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu - i|}{z_\nu - i} \cdot \frac{|z_\nu + i|}{z_\nu + i},$$

по последовательности $\{z_\nu\}$ *нулей функции* f *в* D*, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{(\nu)} \frac{y_\nu}{1 + x_\nu^2 + y_\nu^2} < +\infty, \quad z_\nu = x_\nu + iy_\nu, \quad y_\nu > 0,$$

сходимости b_f, *а функция* $F \in M^q(D)$ *и* $F(z) \neq 0, z \in D$. *И обратно, если функция* f *представляется в указанном виде, то она принадлежит классу* $M^q(D)$.

Во **второй главе** диссертации исследуются линейно-метрические свойства изучаемых пространств. Утверждается, что характеристики $\|\cdot\|_{M^q}$ и $\|\cdot\|_{N^q}$ образуют квазинормы (в смысле К.Иосиды[11]) в соответствующих классах. Как и в любом квазинормированном пространстве, в $M^q(D)$ и $N^q(D)$ существуют естественные инвариантные метрики, порожденные квазинормами:

$$\rho_{M^q}(f,g) = \|f-g\|_{M^q}, \quad f,g \in M^q(D),$$
$$\rho_{N^q}(f,g) = \|f-g\|_{N^q}, \quad f,g \in N^q(D),$$

и в топологиях, определяемых этими метриками, классы представляют собой линейно-топологические пространства.

Оказывается, что пространства обладают дополнительными структурами:

Теорема. *Каждое* $M^q(D), q > 0$, *образует* $F-$*алгебру, т.е. такое* $F-$*пространство, в котором введена алгебраическая операция умножения, превращающая* $M^q(D)$ *в алгебру, и эта операция умножения непрерывна в метрике* ρ_{M^q}.

Теорема. *Каждое* $N^q(D), q > 0$, *образует* $F-$*алгебру.*

Во втором параграфе второй главы описываются ограниченные и вполне ограниченные подмножества классов $M^q(D), q > 0$. Доказаны следующие критерии.

Теорема (критерий ограниченности). *Множество* $L \subseteq M^q(D), q > 0$, *ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

[11]К.Иосида. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.

(а) существует такое число $K > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx < K$$

для любой $f \in L$, то есть множество L ограничено по метрике ρ_q;

(б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\int\limits_{E} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx < \varepsilon$$

для любой $f \in L$ и любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ с лебеговой мерой $\mu E < \delta$, то есть первообразные семейства функций $\ln^q(1 + Mf(x))$ равностепенно абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$.

Теорема (критерий полной ограниченности). *Множество L вполне ограничено в пространстве $M^q(D), q > 1$, тогда и только тогда, когда*

(а) L ограничено в $M^q(D)$;

(б) множество функций $\{f^+\}, f \in L$, относительно компактно в топологии сходимости по лебеговой мере μ на прямой;

(в) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx + \int\limits_{A}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx < \varepsilon$$

для всех $f \in L$.

Третья глава диссертации посвящена изучению линейных изометрий классов $N^q(D), q > 0$. Конус в линейном пространстве определяется как множество, замкнутое относительно умножения на положительные числа. Ключевым утверждением в описании общего вида линейных изометрий этих пространств является следующая

Лемма. *Пусть $q > 0$ и положительно–однородное отображение I конуса $C \subseteq \ln L^q(\mathbb{R})$, где $\ln L^q(\mathbb{R})$ – класс функций f, для которых выполняется неравенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x)|)\,dx < +\infty$, является $\ln L^q(\mathbb{R})$–изометричным, то есть*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x)|)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|If(x)|)\,dx, \quad f \in C.$$

Тогда отображение I будет также и $L^p(D)$–изометричным, то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |If(x)|^p\,dx, \quad f \in C,$$

для всех p вида $q + l$, где $l \in \mathbb{Z}_+$ и $l \leqslant q + 1$.

Основным результатом третьей главы является

Теорема. *Пусть $q > 0$ и I – произвольная линейная изометрия пространства $N^q(D)$. Тогда I имеет вид*

$$(If)(z) = c(\varphi'(z))^{1/p} f(\varphi(z)), z \in D, f \in N^q(D),$$

где $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, $\varphi = \Psi^{-1} \circ \psi \circ \Psi$, $\Psi(z) = (z - i)(z + i)^{-1}$, ψ – конформное отображение открытого единичного круга на себя, и φ' – производная φ.

Обратно, если I имеет вышеуказанный вид для некоторого отображения $\varphi = \Psi^{-1} \circ \psi \circ \Psi$, то I — линейная изометрия пространства $N^q(D)$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю В.И.Гаврилову за постоянное внимание, искреннюю заинтересованность, постановку интересной задачи, многочисленные обсуждения и ценные советы, а также всестороннюю поддержку в течение всего диссертационного исследования.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Ефимов Д.А.* Об $F-$алгебрах голоморфных функций в полуплоскости, определяемых посредством максимальной функции. // Доклады РАН, том 416, №6, 2007, с.732–734.

[2] *Ефимов Д.А., Субботин А.В.* Некоторые F-алгебры голоморфных функций в полуплоскости. // Mathematica Montisnigri, Vol XVI, 2003, с.69–81.
(Субботину А.В. принадлежит постановка задачи в данной тематике, Ефимову Д.А. принадлежат доказательства).

[3] *Ефимов Д.А., Субботин А.В.* Некоторые F-пространства голоморфных функций в полуплоскости. // Труды 24 конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 8-13 апреля 2002(вып. 1), изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002, с.71–73 (РЖМат 04.03-13Б.168).
(Субботину А.В. принадлежит постановка задачи в данной тематике, Ефимову Д.А. принадлежат доказательства).

[4] *Ефимов Д.А.* Пространства $M^q, q > 0$, в полуплоскости. // Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". Саратов, изд."Научная книга", 2006, с.67–68.