

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Хизгияев Семен Владимирович

Фрикционные автоколебания
с двумя переключениями
двухмассового осциллятора

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и
мехатроники механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук,
профессор С.Я. Степанов

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук,
профессор А.П. Иванов.
Кандидат физико-математических наук,
А.С. Сумбатов

Ведущая организация: Институт проблем механики
Российской академии наук

Защита состоится 29 февраля 2008 года в 16 часов 30 минут на заседании специализированного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 29 января 2008 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент

В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение автоколебаний, возникающих под действием сухого трения, является актуальной задачей. Механические автоколебания играют важную роль в различных областях механики, техники, оптики, акустики, радиотехники и электроники. Примерами таких колебаний служат колебания струны скрипичных музыкальных инструментов, шум ведущего колеса локомотива на рельсах при трогании с места или тормозного башмака на колесах, скрип дверных петель и т. д. Основным режимом таких колебаний является предельный цикл типа “stick-slip” с двумя переключениями. Диссертация посвящена отысканию таких предельных циклов и исследованию характера их орбитальной устойчивости.

Цель диссертационной работы. Основной целью диссертации является поиск предельных циклов типа “stick-slip” с двумя переключениями, исследование их свойств и характера устойчивости в двухмассовом осцилляторе, состоящем из двух грузов, соединенных пружиной. Первый груз движется по неподвижной прямой и соединен пружиной с неподвижной опорой. Вторым грузом находится на горизонтальной ленте, движущейся с постоянной скоростью. Между лентой и вторым грузом действует сила сухого трения. Первый груз подвержен действию вязкого трения.

Научная новизна. Результаты разделов 1.1 – 2.2 являются вспомогательными, а результаты разделов 2.3 – 3.5 являются новыми. Они базируются на общих теоремах теории колебаний и теории устойчивости предельных циклов. Среди этих результатов наиболее существенным является аналитическое обоснование фундаментального свойства симметрии предельных циклов типа “stick-slip” в отсутствие вязкого трения. Это свойство позволило построить предельные циклы с двумя переключениями и провести исследование характера их орбитальной устойчивости.

Достоверность результатов. Результаты диссертационной работы обоснованы. Они базируются на общих теоремах теории колебаний и теории устойчивости. Все аналитические выкладки, численные расчеты и построение различных графиков, диаграмм и фазовых портретов проводились с помощью программы символьных вычислений Maple 10.

Используемые методы. В работе используются методы теории

колебаний, в том числе метод точечного отображения Пуанкаре для исследования орбитальной устойчивости предельных циклов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты дают представление о виде, свойствах предельных циклов типа “stick-slip” с двумя переключениями и характере их орбитальной устойчивости.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар отдела механики ВЦ РАН под рук. проф. С. Я. Степанова, проф. А. В. Карапетяна, 2006 г.
- IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 2006, Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г.
- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством акад. РАН В. В. Румянцева, чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, 2007 г.
- Международная конференция молодых ученых «Ломоносов-2007». МГУ им. М. В. Ломоносова, 16–21 апреля 2007 г.
- IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Иркутск, 12–16 июня 2007 г.
- Шестой международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 1–6 августа 2007 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в четырех печатных работах, одна из них опубликована в журнале, который входит в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 152 наименований. Общий объем диссертации – 111 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

На Западе механические модели, в которых возникают автоколебания под действием сухого трения, в том числе и линейный осциллятор, получили название “stick-slip” (“прилипание-скольжение”) в силу того, что предельные циклы таких систем, состоят из двух режимов: когда груз неподвижен относительно ленты, и когда груз скользит относительно ленты. Данная диссертация посвящена изучению таких предельных циклов.

Во **введении** описана постановка задачи и цель диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с исследованием фрикционных автоколебаний, в том числе работ по исследованию автоколебаний, возникающих в смычковых музыкальных инструментах, а также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер.

В *первом разделе первой главы* дана постановка задачи. Рассматривается механическая система из двух грузов с массами m_1 и m_2 . Груз m_1 соединен с неподвижной стенкой невесомой линейной пружиной с жесткостью k_1 , а груз m_2 соединен с m_1 пружиной жесткости k_2 . Груз m_2 находится на горизонтальной ленте, движущейся с постоянной скоростью $\tilde{v} \geq 0$. Смещения грузов из положения, в котором пружины недеформированы, обозначим \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 (рис. 1). Между первым грузом и опорной плоскостью действует сила вязкого линейного трения с коэффициентом c_1 , а между вторым грузом и лентой действует сила сухого трения \tilde{f} .

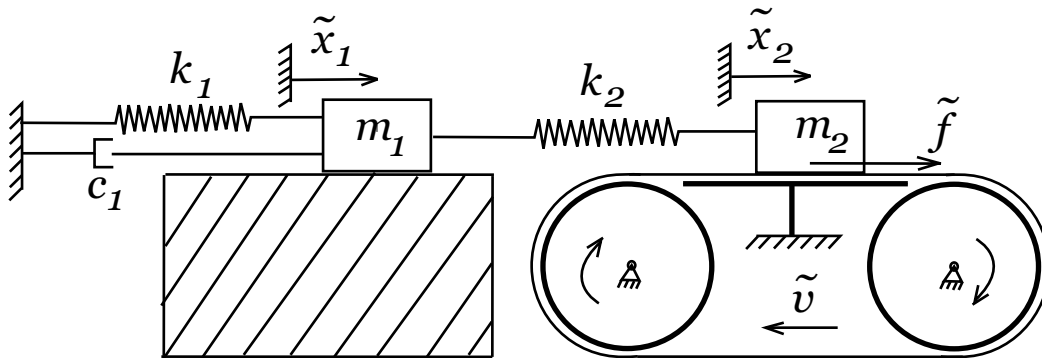


Рис. 1: Схема модели

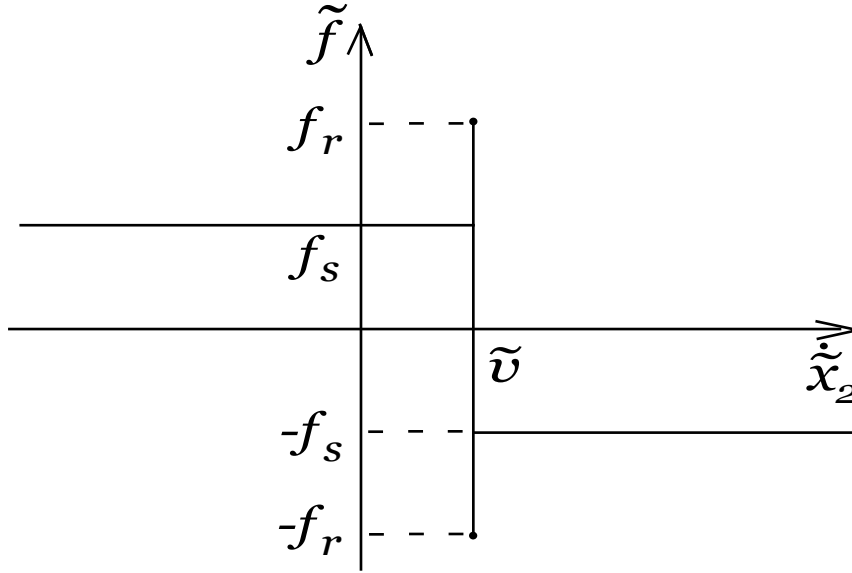


Рис. 2: Кусочно–постоянная модель сухого трения

Примем кусочно–постоянную модель сухого трения (рис. 2) между лентой и грузом m_2 в виде

$$\tilde{f} = \begin{cases} f_s & \text{при } \dot{\tilde{x}}_2 < \tilde{v} \\ f_s & \text{при } \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{v} \text{ и } f_* > f_r \\ f_* & \text{при } \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{v} \text{ и } |f_*| \leq f_r; \quad f_* = k_2(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1). \\ -f_s & \text{при } \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{v} \text{ и } f_* < -f_r \\ -f_s & \text{при } \dot{\tilde{x}}_2 > \tilde{v} \end{cases} \quad (1)$$

где f_s и f_r — величины трения скольжения и покоя, пропорциональные нормальному давлению, причем трение скольжения не больше трения покоя ($f_s \leq f_r$).

Во *втором разделе* записаны уравнения движения исследуемой системы в общей постановке в матричном виде. Система может находиться в трех различных режимах движения, каждый из которых описывается своей системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

В *третьем разделе* введены основные используемые понятия.

В *четвертом разделе* приведен краткий обзор работ, связанных с методом точечного отображения Пуанкаре, а также изложен сам метод точечного отображения в применении к исследуемой системе для изучения характера орбитальной устойчивости предельных циклов типа “stick-slip” с двумя переключениями.

Вторая глава посвящена исследованию предельных циклов типа “stick-slip” с двумя переключениями в ограниченной постановке задачи с введением малого параметра ε , характеризующего малость массы второго груза по отношению к массе первого, и малость жесткости первой пружины по отношению к жесткости второй пружины.

В *первом разделе* записаны уравнения движения исследуемой системы в безразмерном виде. В нулевом приближении по малому параметру ε эти уравнения сводятся к задаче о колебании первого груза под действием сил упругости пружины и вязкого трения. В первом приближении уравнение для второго груза отделяется от уравнения для первого груза и соответствует известной задаче о колебании гармонического осциллятора на движущейся с постоянной скоростью ленте под действием сухого трения. Уравнение первого груза представляет собой уравнение вынужденных колебаний под действием колебаний второго груза

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 + \rho^2 x_1 - x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= \varepsilon f / f_s, \end{aligned} \quad (2)$$

$$c = \frac{c_1 \rho}{2\sqrt{k_1 m_1}}, \quad \mu = \frac{f_r}{f_s}, \quad \varepsilon = m_2 / m_1, \quad \rho^2 = \varepsilon k_1 / k_2,$$

$$\frac{\varepsilon f}{f_s} = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{x}_2 < v, \\ 1 & \text{при } \dot{x}_2 = v \text{ и } x_2 > \mu, \\ x_2 & \text{при } \dot{x}_2 = v \text{ и } |x_2| \leq \mu, \\ -1 & \text{при } \dot{x}_2 = v \text{ и } x_2 < -\mu, \\ -1 & \text{при } \dot{x}_2 > v. \end{cases}$$

Во *втором разделе* выписано решение уравнений для второго груза. Найден предельный цикл для этого груза, и построен его фазовый портрет. Доказано свойство симметрии предельного цикла, а также найден период его колебаний. Показано, что период прямо пропорционален разности коэффициентов трения покоя и скольжения и обратно пропорционален скорости ленты.

В *третьем разделе* исследуются вынужденные колебания первого груза, возбуждаемого действием предельного цикла для второго груза, найденного во втором разделе второй главы. Получено решение уравнения вынужденных колебаний первого груза. Найден предельный цикл с двумя переключениями с периодом, равным периоду предельного цикла второго груза, построены фазовые траектории и

формы колебаний при различных параметрах задачи. Показано, что предельный цикл существует при всех значениях параметров задачи. В отсутствие вязкого трения установлено свойство симметрии предельного цикла относительно некоторой прямой, параллельной оси скорости первого груза при отсутствии вязкого трения. Обнаружена особенность поведения вынужденного колебания первого груза: в окрестности целочисленных точек $\rho = n$, где $n \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}$ фазовая траектория и форма вынужденного колебания значительно изменяют свою форму, а в самих точках $\rho = n$ фазовый портрет состоит из $n - 1$ витков.

В *четвертом и пятом разделах* проведено аналитическое и численное исследование орбитальной устойчивости найденных предельных циклов. Разделение уравнений для первого и второго грузов в первом приближении (2) позволяет отдельно исследовать устойчивость предельного цикла второго груза, а затем аналитически исследовать характер орбитальной устойчивости вынужденных колебаний первого груза. Доказано, что предельный цикл второго груза устойчив по Ляпунову. Численно показано, что при различных значениях параметров задачи, кроме случая отсутствия вязкого трения, в котором требуется дополнительное исследование, вынужденные колебания первого груза орбитально устойчивы, причем скорость стремления соседних фазовых траекторий к предельному циклу прямо пропорциональна разности коэффициентов трения покоя и скольжения и обратно пропорциональна скорости ленты. Построена зависимость нормы матрицы последования, которая определяет скорость стремления возмущенных движений к предельному циклу, от параметров задачи.

В **третьей главе** задача об автоколебаниях типа “stick-slip” в двухмассовом осцилляторе под действием сухого трения в отсутствие вязкого трения решена в общей постановке, близкой к рассмотренной в одной из работ польского ученого Я. Аурейцевича, где исследовалась подобная модель в случае постоянства амплитуды колебаний, рационального отношения частот и кусочно-кубической модели трения. В его работе представлен приближенный метод нахождения периодических и квазипериодических решений и выведены приближенные уравнения, определяющие динамику автоколебательной системы. В данной диссертации удастся аналитически най-

ти и исследовать характер орбитальной устойчивости предельных циклов типа “stick-slip” с двумя переключениями.

В *первом разделе* исследованы три режима движения системы, каждый из которых описывается своей системой дифференциальных уравнений в матричной безразмерной форме

$$\ddot{X} + KX = F, \quad (3)$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \tilde{f}/f_s \end{Bmatrix}, \quad K = \begin{Bmatrix} 1 & -\chi \\ -\chi\eta & \chi\eta \end{Bmatrix},$$

$$\chi = \frac{k_2}{k_1 + k_2}, \quad \eta = \frac{m_1}{m_2}.$$

Найдено решение системы (3) в каждом из трех возможных режимов: $\dot{x}_2 < v$, $\dot{x}_2 > v$ и $\dot{x}_2 = v$.

Во *втором разделе* аналитически доказано фундаментальное свойство симметрии фазовых траекторий предельных циклов типа “stick-slip” с двумя переключениями:

Теорема: *Фазовая траектория предельного цикла с двумя переключениями в четырехмерном фазовом пространстве симметрична относительно плоскости, образованной прямыми $x_1 = h_1 = (1 - \chi)^{-1}$ и $x_2 = h_2 = \chi^{-1}(1 - \chi)^{-1}$, т. е. проекции фазовой траектории на плоскости (x_1, \dot{x}_1) и (x_2, \dot{x}_2) симметричны относительно прямых $x_1 = h_1$ и $x_2 = h_2$ (рис. 3).*

В *третьем разделе* найдены главные колебания системы, а затем на основании фундаментального свойства симметрии фазовых траекторий найдено два типа предельных циклов: прямой и обратный (рис. 3), рождающихся при $f_r = f_s$ из соответствующих главных колебаний. Построены фазовые траектории и формы колебаний этих циклов при различных значениях параметров задачи. Численно изучена зависимость периодов колебаний прямого и обратного циклов от параметра $\sigma = [(f_r/f_s) - 1]/\chi v$ при фиксированных параметрах χ и η .

В *четвертом и пятом разделах* проведено аналитическое исследование характера орбитальной устойчивости найденных предельных циклов. Для исследования устойчивости используется метод точечного отображения Пуанкаре, изложенный в третьем разделе первой главы. Рассматриваются только такие возмущенные движения, которые совершают за один оборот вокруг предельного цикла два

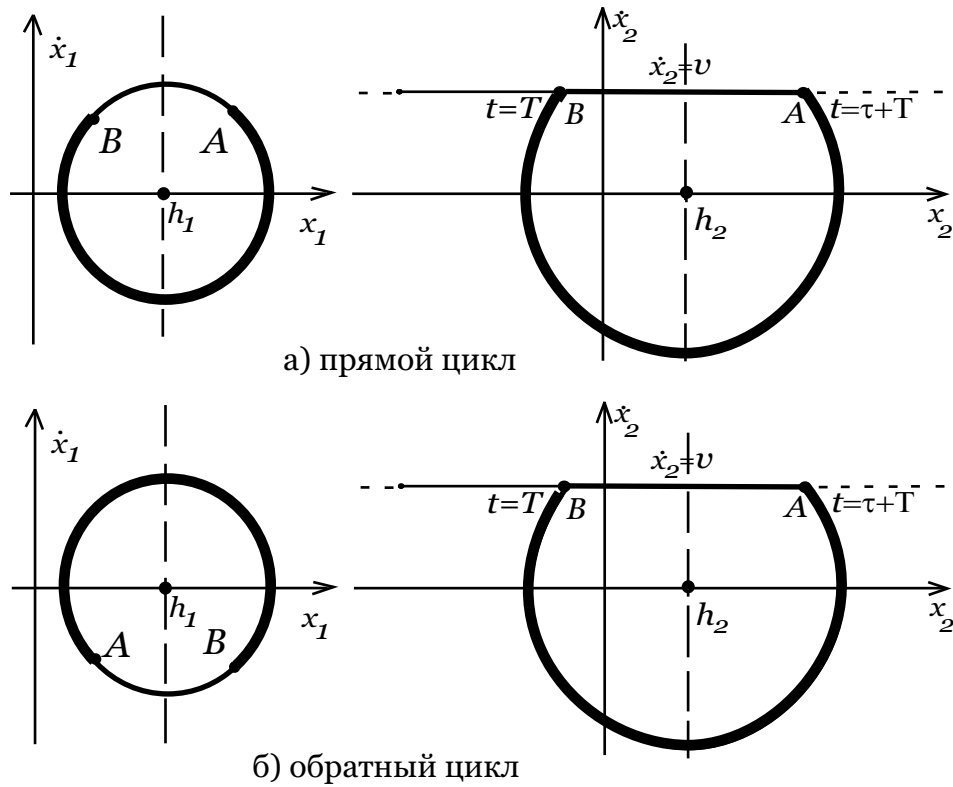


Рис. 3: Схематичный вид фазовых портретов предельных циклов

переключения и которые состоят из режимов $\dot{x}_2 < v$ и $\dot{x}_2 = v$. Для них доказано, что их возмущения по обеим координатам выравниваются за один оборот вокруг предельного цикла, т. е. если (y, z) – начальные возмущения по обеим координатам, а (\bar{y}, \bar{z}) – конечные возмущения, то $\bar{y} = \bar{z}$. Это утверждение позволяет значительно упростить численное исследование устойчивости предельных циклов. Построена зависимость нормы матрицы последования, которая определяет скорость стремления возмущенных движений к предельному циклу, от параметра σ для прямого и обратного циклов при различных фиксированных значениях параметров χ и η .

В **заключении** приведены основные результаты и выводы:

- Рассмотрена задача о существовании и устойчивости предельных циклов типа “stick-slip” для двойного осциллятора, состоящего из двух масс: первая масса соединена пружиной с неподвижной опорой, вторая соединена пружиной с первой и находится на движущейся с постоянной скоростью ленте с сухим трением. Первая масса подвержена действию вязкого тре-

ния.

- В ограниченной постановке задачи, в предположении, что масса второго груза много меньше массы первого груза, а жесткость пружины, соединяющей грузы, много меньше жесткости первой пружины, аналитически определены предельные циклы типа “stick-slip” с двумя переключениями и их периоды. Показано, что период прямо пропорционален разности коэффициентов трения покоя и скольжения и обратно пропорционален скорости ленты. Построены фазовые траектории и формы колебаний при различных значениях параметров задачи.
- Численно изучен характер орбитальной устойчивости предельных циклов типа “stick-slip”. Показано, что при различных значениях параметров, кроме случаев отсутствия вязкого трения, предельные циклы орбитально устойчивы, причем скорость стремления фазовых траекторий к предельным циклам прямо пропорциональна разности величины трения покоя и скольжения и обратно пропорциональна скорости ленты.
- В отсутствие вязкого трения в общей постановке задачи без ограничений на величины масс грузов и жесткостей пружин аналитически доказано фундаментальное свойство симметрии фазовых траекторий предельных циклов типа “stick-slip”. На основании этого свойства определены два типа предельных циклов с двумя переключениями – прямой цикл и обратный цикл, рождающиеся из главных колебаний при равных величинах трения покоя и скольжения. Определены периоды предельных циклов, построены фазовые траектории и формы колебаний при различных параметрах задачи. Показано, что периоды прямого и обратного циклов прямо пропорциональны разности коэффициентов трения покоя и скольжения и обратно пропорциональны скорости ленты, при этом период прямого цикла также обратно пропорционален отношению масс первого и второго грузов. Обратный цикл существенно не меняет формы и существует при различных параметрах задачи. Прямой цикл существенно меняет форму при изменении параметров задачи и существует в ограниченной области параметров.

- Численно изучен характер орбитальной устойчивости прямого и обратного циклов. Устойчивость обратного цикла наблюдается до некоторого критического значения отношения разности величин трения покоя и скольжения к скорости ленты, после которого цикл теряет устойчивость. Устойчивость прямого цикла наблюдается не только при малых значениях этого отношения, но и для некоторых параметров задачи, либо во всей области существования, либо в некоторой ее части.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Хизгияев С.В. Аналитическое исследование автоколебательной механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. — М.: ВЦ РАН. 2006. с. 84–92.
2. Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. — М.: ВЦ РАН. 2007. с. 106–125.
3. Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассового осциллятора с сухим трением // ПММ. Т. 71. Вып. 6. 2007. с. 1004–1013.
4. Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения// Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященной 105-летию Н. Г. Четаева. Иркутск: ИДСТУ. 2007. Т. 5. с. 247–260.