Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Механико–Математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.986

Кузнецова Юлия Николаевна

ВЕСОВЫЕ АЛГЕБРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор А. Я. Хелемский

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Е. М. Семенов

доктор физико-математических наук, профессор С. А. Григорян

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 21 марта 2008 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 21 февраля 2008 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Тема диссертации является вполне классической и восходит к 30-м годам прошлого века. Впервые алгебры суммируемых с весом функций и рядов рассматривались в работах А. Бёрлинга[1] и И. М. Гельфанда[2]. Основные свойства классических весовых алгебр с показателем $p = 1$ можно считать известными. Однако алгебры с показателем $p > 1$, а также на абстрактных группах изучены относительно мало, и потому тема остается актуальной и в настоящее время.

По определению весовым пространством на локально компактной группе G с показателем $p \geqslant 1$ называется пространство

$$\mathcal{L}_p^w(G) = \{f : \int_G |fw|^p < \infty\}$$

с нормой $\|f\|_{p,w} = \|fw\|_p = (\int |fw|^p)^{1/p}$. Мы всегда предполагаем, что $w > 0$.

Хорошо известны достаточные условия, при которых данное весовое пространство образует алгебру относительно свертки. При $p = 1$ это полумультипликативность[1,2]:

$$w(st) \leqslant w(s)w(t), \tag{1}$$

при $p > 1$ — следующее неравенство[3] (поточечно локально почти всюду):

$$w^{-q} * w^{-q} \leqslant w^{-q}, \tag{2}$$

где q — сопряженный показатель к p, так что $1/p + 1/q = 1$. Связь между этими условиями проясняется, если ввести семейство функций

$$\varphi_t(s) = \frac{w(t)}{w(s)w(s^{-1}t)},$$

$s, t \in G$. Тогда неравенства (1) и (2) записываются в единой форме[4]:

$$\sup_{t \in G} \|\varphi_t\|_q \leqslant 1,$$

---

[1] Beurling A. Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes. *IX Congrès Math. Scand.,* Helsinki, 1938, 345–366.

[2] Gelfand I. Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale. *Матем. сб.* **9** (51) (1941), 51–66.

[3] Wermer J. On a class of normed rings. *Ark. Mat.* **2** (1954), Hf. 6, 537–551.

[4] Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа (§ 3.2). *Труды МИАН им. Стеклова* **120** (1974).

где $q = \infty$ при $p = 1$.

Условия (1) и (2) являются необходимыми при $p = 1$, но не при $p > 1$, см. ниже изложение главы 1 диссертации.

Случай, когда группа G представляет из себя вещественную прямую, исследован достаточно полно. Для таких алгебр описаны пространства максимальных идеалов[2], условия регулярности по Шилову[5]. Показано, что в отсутствие регулярности всегда есть идеалы, не содержащиеся в ядре никакого характера[6], в случае веса $w(t) = \exp(\alpha|t|)$ описаны все такие примарные идеалы[7].

Детально исследованы также аналогичные алгебры функций на классических полугруппах: вещественной полупрямой $\mathbb{R}_+$ и на натуральных числах. Известен критерий[8] для веса алгебры $\mathcal{L}_1^w(\mathbb{R}_+)$, исследуются гомоморфизмы и дифференцирования этих алгебр[9,10]. Получены (при некоторых ограничениях на вес) критерии[11,12] того, что данный набор функций порождает все весовое пространство $\mathcal{L}_p^w(\mathbb{R}_+)$ (не обязательно замкнутое относительно свертки). Особенно интересен случай быстро убывающего веса: $w(t)^{1/t} \to 0$, $t \to \infty$, при котором алгебра $\mathcal{L}_1^w(\mathbb{R}_+)$ становится радикальной[13] (на группе этот случай невозможен), так как автоморфизмы и дифференцирования такой алгебры автоматически непрерывны[14]. Известно также[15], что любая сепарабельная коммутативная алгебра (без единицы и без делителей нуля, в предположении континуум-

[5] Коммутативная алгебра называется регулярной, если ее элементы как функции на пространстве максимальных идеалов разделяют точки и замкнутые множества. Критерий для алгебр $\mathcal{L}_1^w(\mathbb{R})$ см.: Beurling A. On the spectral synthesis of bounded functions, *Acta Math.* **81** (1949), 225–238.

[6] Domar Y. Translation invariant subspaces of weighted ℓ^p and L^p spaces. *Math. Scand.* **49** (1981), 133–144.

[7] Коренблюм Б. И. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстро растущих функций, *Труды моск. мат. общ.* **7** (1958), 121–148.

[8] Grabiner S. Weighted convolution algebras as analogues of Banach algebras of power series. *Radical Banach algebras and automatic continuity: Proc. Conf. Long Beach, 1981*, Lect. Notes Math. 975 (1983), 295–300.

[9] Ghahramani F. Homomorphisms and derivations on weighted convolution algebras, *J. London Math. Soc.* s2-21 (1980), 149–161.

[10] Ghahramani F., Grabiner S. The L^p theory of standard homomorphisms, *Pacific J. Math.* **168** №1 (1995), 49–60.

[11] Гурарий В. П., Левин Б. Я. О полноте системы сдвигов в пространстве $L(0,\infty)$ с весом, *Зап. мех.-мат. фак. и Харьков. мат. общ.* **30** (1964), 178–185.

[12] Borichev A., Hedenmalm H. Completeness of translates in weighted spaces on the half-line, *Acta Math.* **174** (1995), 1–84.

[13] Банахова алгебра A называется радикальной, если в ней нет максимальных (односторонних) модулярных идеалов.

[14] Jewell N. P., Sinclair A. M. Epimorphisms and derivations on $L^1(0,1)$ are continuous, *Bull. London Math. Soc.* **8**, 135–139 (1976).

[15] Esterle J. Homomorphismes discontinuous des algèbres de Banach commutatives separables, *Studia Math.* **66**, 119–141 (1979).

гипотезы) вкладывается как подалгебра в любую радикальную алгебру вида $\mathcal{L}_1^w(\mathbb{R}_+)$.

При этом об алгебрах на абстрактных группах известно значительно меньше. Получены необходимые условия[16] для веса алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$, описаны мультипликаторы таких алгебр[17], исследованы свойства, вытекающие из инвариантности алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$ относительно сдвигов[18]. Однако, например, необходимые условия[16] являются критерием лишь для полунепрерывного веса, что заставляет некоторых авторов[19] требовать непрерывности веса в самом определении алгебр $\mathcal{L}_1^w(G)$. В случае $p > 1$ задавался вопрос[18] даже о существовании алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$ на группах экспоненциального роста, например, на свободной группе с двумя образующими. Таким образом, представляется важным продолжить изучение весовых алгебр именно на общих локально компактных группах.

Цель работы.

Построить весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ на возможно более широком классе локально компактных групп G, улучшить известные теоремы о свойствах таких алгебр, применить полученные результаты к исследованию свойств различных алгебр с заданной линейно-топологической структурой.

Научная новизна.

Все полученные результаты являются новыми и состоят в следующем.

1. Получен критерий для веса произвольной алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$.

2. Построены весовые алгебры с показателем $p > 1$ на любой σ-компактной группе. Показано, что σ-компактность является необходимым условием существования весовых алгебр на абелевых группах.

3. Обобщены на случай $p > 1$ условия регулярности коммутативных алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$, известные ранее для случая $p = 1$. Построены регулярные весовые

[16]Edwards R. E. The stability of weighted Lebesgue spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959), 369–394.

[17]Gaudry G. I. Multipliers of weighted Lebesgue and measure spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)* **19** (1969), 327–340.

[18]Feichtinger H. G. Gewichtsfunktionen auf lokalkompakten Gruppen, *Sitzber. Österr. Akad. Wiss. Abt. II,* **188**, № 8–10 (1979), 451–471.

[19]Dales H. G., Lau A. T.-M. The second duals of Beurling algebras, *Memoirs of the AMS* **177**, №. 836 (2005).

алгебры на любой σ-компактной абелевой группе.

4. Рассматривается класс $M(X)$ всех спектров коммутативных полупростых банаховых алгебр с единицей, изоморфных данному банахову пространству X. Доказано, что

   1) для пространства X со счетным безусловным базисом класс $M(X)$ содержит все счетные бесконечные компакты;

   2) класс $M(\ell_2)$ является максимально возможным для сепарабельных банаховых пространств и совпадает с классом всех бесконечных метризуемых компактов.

Методы исследования.

В диссертации используются различные методы функционального и абстрактного гармонического анализа, общей топологии. В доказательстве критерия для веса используется теория дифференцирования на абстрактных пространствах с мерой. Критерий регулярности опирается на теоремы Пэли и Винера об аналитических функциях.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Её методы и результаты могут найти применение в дальнейшем исследовании групповых алгебр.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре «Алгебры анализа» (неоднократно в 2004–2007 г., руководитель семинара — д.ф.-м.н., профессор А. Я. Хелемский), на международных конференциях «Банаховы алгебры–2005» (г. Бордо, 3–13 июля 2005) и «Банаховы алгебры–2007» (г. Квебек, 3–14 июля 2007), на XXX Дальневосточной математической школе-семинаре (г. Хабаровск, 23–27 августа 2005 г.), а также на семинаре М. Фрагулопулу Афинского университета (15 мая 2007).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приведён в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав (разбитых на разделы) и списка литературы, насчитывающего 64 наименований. Общий объём диссертации — 102 страницы.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приведён краткий исторический обзор по тематике работы, изложены цели и методы исследования, а также структура диссертации.

В **первой главе** рассматриваются общие (некоммутативные) весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$. В §**1.1**, **1.2** приводятся определения и доказываются различные вспомогательные утверждения. В §**1.3** рассматриваются условия (1), (2), при которых пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ (при $p = 1$ и $p > 1$ соответственно) является алгеброй относительно свертки. Достаточность этих условий очевидна, но довольно сложен обратный вопрос: следует ли справедливость этих неравенств из того факта, что пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй?

Введем одно определение. Веса w_1, w_2 называются *подобными*, если с некоторыми константами C_1, C_2 локально почти всюду выполняется неравенство

$$C_1 \leqslant \frac{w_1}{w_2} \leqslant C_2. \tag{3}$$

Подобные веса задают одно и то же весовое пространство и эквивалентные нормы на нем.

Для случая $p = 1$ первый результат в направлении необходимости условия (1) был получен Р. Эдвардсом, который доказал[16], что если полунепрерывная сверху функция w на локально компактной группе G задает сверточную алгебру $\mathcal{L}_1^w(G)$, то неравенство (1) выполняется для подобного w веса. Позднее Грабинер[20] доказал тот же, по существу, факт для вещественной прямой и лю-

[20] Grabiner S. Weighted shifts and Banach algebras of power series *Amer. J. Math.* **97**, № 1 (1975), 16–42.

бой измеримой функции w. В диссертации доказан критерий в наиболее общем виде:

Теорема 1 (1.3.1) *Пусть $w > 0$ — измеримая функция на локально компактной группе G. Следующие условия равносильны:*

(i) вес w подобен непрерывной полумультипликативной функции;

(ii) $\mathcal{L}_1^w(G)$ — алгебра;

(iii) при некотором p, $1 \leqslant p < \infty$, справедливо включение $\mathcal{L}_1^w(G) * \mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_p^w(G)$.

При $p > 1$ условие (2) является необходимым в некоторых естественных частных случаях[21,22], но, вообще говоря, это не критерий. Фрике[23] построил пример семейства алгебр $\ell_p^w(\mathbb{N})$ на полугруппе натуральных чисел, вес которых не удовлетворяет условию (2). Первые контрпримеры на группах (единичной окружности и вещественной прямой) построены автором (примеры 1.3.4, 1.3.5).

Интересен также вопрос, можно ли вес произвольной весовой алгебры выбрать непрерывным, не изменив саму алгебру. Фейхтингер[18] ответил на этот вопрос положительно в случае $p = 1$ при дополнительном требовании инвариантности алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$ относительно сдвигов. При $p > 1$ верно аналогичное утверждение (следствие 1.2.3). Кроме того, в теореме 1.3.1 показано, что при $p = 1$ инвариантность появляется автоматически, т.е. результат верен для любой алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$. Простые примеры (1.3.6) показывают, что при $p > 1$ вес нельзя, вообще говоря, выбрать непрерывным.

В §**1.4** рассматривается вопрос о существовании весовых алгебр при $p > 1$ в зависимости от группы G. При $p = 1$ весовые алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$ можно построить на любой локально компактной группе, в частности, при $w \equiv 1$ мы получаем обычную алгебру $\mathcal{L}_1(G)$. Если же $p > 1$, то группа не может быть произвольной. Здесь можно напомнить доказательство известной $\mathcal{L}_p$–гипотезы: пространство $\mathcal{L}_p(G)$ на локально компактной группе G при $p > 1$ замкнуто относительно

[21] Kerlin E., Lambert A. Strictly cyclic shifts on l_p. *Acta Sci. Math.* (Szeged) **35** (1973), 87–94.

[22] Эль-Фалла О., Никольский Н. К., Зарраби М. Оценки резольвент в алгебрах Бёрлинга—Соболева. *Алгебра и анализ* **10**, № 6 (1998), 1–92.

[23] Fricke, G. A note on strictly cyclic shifts on l_p. *Int. J. Math. Math. Sci.* **1**, № 2 (1978), 203–208.

свертки тогда и только тогда, когда группа G компактна (доказательство в общем случае и историю вопроса см. в статье Саеки[24]). Добавление веса расширяет класс допустимых групп: в диссертации доказано, что на любой σ-компактной (т.е. представимой в виде счетного объединения компактов) группе при любом $p > 1$ существует вес w, при котором пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй. Точнее, верна

Теорема 2 (1.4.1) *Для локально компактной группы G следующие условия эквивалентны:*

(i) группа G σ-компактна;

(ii) для некоторого $p > 1$ существует вес w, удовлетворяющий условию (2) (при этом пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй);

(iii) при любом $p > 1$ существует вес w, удовлетворяющий условию (2).

Для абелевой группы G эти условия равносильны также следующим:

(iv) для некоторого $p > 1$ существует вес w, с которым пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй;

(v) при любом $p > 1$ существует вес w, с которым пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй.

В §**1.5** для любого $p > 1$ приводится явная конструкция веса, задающего алгебру $\mathcal{L}_p^w(F_\infty)$ на свободной группе F_∞ со счетным числом образующих. Это позволяет построить (способом, отличным от приведенного в §**1.4**) весовые алгебры на любой счетной дискретной группе.

Единицы в алгебрах $\mathcal{L}_p^w(G)$ есть только в том случае, если группа G дискретна. В §**1.6** рассматриваются аппроксимативные единицы в весовых алгебрах. При $p = 1$, как легко проверить, в алгебрах $\mathcal{L}_1^w(G)$ имеются ограниченные аппроксимативные единицы. В диссертации доказывается, что при $p > 1$ в инвариантных относительно сдвигов алгебрах $\mathcal{L}_p^w(G)$ есть аппроксимативные единицы стандартного вида, которые не могут быть ограничены, если группа не дискретна. Есть ли алгебры, вообще не имеющие аппроксимативных единиц,

[24]Saeki S. The L^p-conjecture and Young's inequality. *Illinois J. Math.* **34**, № 3 (1990), 614–627.

неизвестно, но приведен пример (1.6.3) неинвариантной алгебры, в которой нет аппроксимативных единиц, состоящих из неотрицательных функций.

В §**1.7** рассматривается инволюция на весовых алгебрах. Хорошо известно, что алгебра $\mathcal{L}_1(G)$ на локально компактной группе G полупроста, т.е. не содержит элементов f с быстро убывающими степенями: $\|f^n\|^{1/n} \to 0$, $n \to \infty$. Это доказывается обычно с использованием инволюции $f^*(t) = \bar{f}(t^{-1})\Delta(t^{-1})$, где Δ — модулярная функция группы, задающая переход от левой меры Хаара к правой. Для весовых алгебр эта идея не всегда применима, поскольку не при всяком весе на алгебре $\mathcal{L}_p^w(G)$ (и даже при $p = 1$) можно определить естественную инволюцию. Полупростота алгебр $\mathcal{L}_1^w(G)$ доказана в настоящее время для симметричных весов ($w(t) = w(t^{-1})$), для аменабельных групп и в некоторых других случаях[19]. В диссертации доказана полупростота алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$ при $p > 1$ для симметричных весов (следствие 1.7.7) и для абелевых групп (теорема 2.1.4).

Вторая глава посвящена коммутативным весовым алгебрам. Первым типичным вопросом при изучении коммутативной банаховой алгебры A является описание ее пространства максимальных идеалов $\Sigma(A)$, которое мы будем называть также спектром алгебры A. Как известно, спектр алгебры $\mathcal{L}_1(G)$ на коммутативной группе G можно отождествить с двойственной к G группой $\hat{G}$. В §**2.1** доказывается, что для весовых алгебр по-прежнему справедливо вложение $\hat{G} \subset \Sigma(\mathcal{L}_p^w(G))$, но спектр уже не обязательно сводится к характерам группы (т.е. к точкам двойственной группы $\hat{G}$):

Теорема 3 (2.1.1) *Спектр алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$, $p \geqslant 1$, можно отождествить с множеством непрерывных гомоморфизмов $\chi\colon G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, принадлежащих пространству $\mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G)$. Характер X этой алгебры выражается через функцию χ формулой*

$$X(f) = \int_G f(t)\,\chi(t)dt.$$

Равенство $\hat{G} = \Sigma(\mathcal{L}_p^w(G))$ верно, например, для класса регулярных алгебр, который обсуждается ниже.

Коммутативная банахова алгебра $\mathfrak{U}$ называется регулярной, если она разделяет точки и замкнутые множества в своем спектре, т.е. если для любого замкнутого множества F и точки $x \notin F$ найдется функция $f \in \mathfrak{U}$, равная нулю на F и отличная от нуля в точке x. Регулярные полупростые коммутативные алгебры были впервые рассмотрены Шиловым[25]. В такой алгебре $\mathfrak{U}$ возможен спектральный анализ: если мы рассмотрим идеал $I(F)$ всех функций из $\mathfrak{U}$, равных нулю на замкнутом множестве $F \subset \hat{G}$, то множество общих нулей функций из $I(F)$ снова равняется F.

Регулярность алгебры при дополнительных условиях (см., напр., у Люмиса[26]) влечет за собой абстрактную тауберову теорему: всякий собственный замкнутый идеал $J \subset \mathfrak{U}$ содержится в регулярном максимальном идеале, т.е. в ядре некоторого характера алгебры $\mathfrak{U}$.

Весовые алгебры не всегда регулярны. Это связано с тем, что при быстро растущем весе w преобразования Фурье функций из $\mathcal{L}_p^w(\mathbb{R})$ образуют квазианалитический класс, и для них справедлива теорема единственности. Этот результат выводится из теоремы Пэли и Винера[27] и является основным инструментом в изучении преобразований Фурье весовых пространств. Точное условие на рост веса таково: вес w на вещественной прямой называется неквазианалитическим, если сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ w(t)}{1+t^2} dt < \infty, \tag{4}$$

и квазианалитическим, если этот интеграл расходится (здесь $\ln^+ t = \max(0, \ln t)$).

Как критерий регулярности банаховых алгебр условие (4) встречается впервые у Шилова[25] для некоторых весовых алгебр степенных рядов. Бёрлинг[5] получил этот критерий для весовых алгебр на прямой. Далее результат Бёрлинга был распространен Домаром[28] на случай произвольной абелевой локально компактной группы, причем определение квазианалитичности пришлось немного изменить. Согласно Домару, вес w на группе G называется неквазианалитическим, если для любого $x \in G$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^+ w(nx)}{n^2} < \infty; \tag{5}$$

при этом условие (5) является критерием регулярности алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$.

[25] Шилов Г. Е. О регулярных нормированных кольцах. *Труды Матем. ин-та им. Стеклова* **21** (1947), 1–118.
[26] Люмис Л. *Введение в абстрактный гармонический анализ* (§25D). М.: Изд. Ин. лит-ры, 1956.
[27] Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области,* М.: Наука, 1964.
[28] Domar Y. Harmonic analysis based on certain commutative algebras, *Acta Math.* **96**, № 2 (1956), 1–66.

Доказательство Домара практически без изменений переносится на случай инвариантных алгебр с показателем $p > 1$, это сделано в §**2.2** диссертации. Пример 2.2.3 показывает, что в отсутствие инвариантности условие (5) может нарушаться.

В §**2.3** строятся регулярные алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ при всех $p > 1$ на любой σ-компактной абелевой группе G. Таким образом, если на группе существуют какие-нибудь весовые алгебры, то среди них есть и регулярные. Спектр регулярных алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$ равняется двойственной группе $\hat{G}$[28].

В **главе 3** рассмотрен другой вопрос, тесно связанный с теорией весовых алгебр. Напомним, что на данной группе G при фиксированном p все алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ изоморфны между собой как банаховы пространства и различаются только алгебраической структурой. В связи с этим возникает вопрос: какими свойствами могут обладать различные алгебры, изоморфные данному банахову пространству? Пример результата такого рода — теорема о том, что бесконечномерная аменабельная банахова алгебра не может быть изоморфна гильбертову пространству[29].

В главе 3 рассматривается простейшая из задач подобного вида: описать класс $\mathcal{M}(X)$ пространств максимальных идеалов всевозможных полупростых коммутативных банаховых алгебр с единицей, изоморфных данному банахову пространству X. При решении этой задачи используются, в частности, результаты главы 2.

Из общей теории банаховых алгебр следует, что все пространства $M \in \mathcal{M}(X)$ должны быть хаусдорфовы и компактны. Несложно показать также, что вес (наименьшая мощность базы топологии) пространства M не превосходит плотности (наименьшей мощности всюду плотного множества) $\mathfrak{d}(X)$ пространства X. Эти условия описывают максимально возможный класс $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$ для пространства данной плотности $\mathfrak{m}$. В частности, для сепарабельного пространства (счетной плотности) класс $\mathcal{M}(\aleph_0)$ состоит из всех бесконечных метризуемых компактов. Из теоремы Милютина[30] следует, что $C[0,1]$ является примером простран-

[29] Ghahramani F., Loy R. J., Willis G. A. Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 1489–1497.

[30] Милютин А. А. Изоморфизм двух пространств непрерывных функций на компактных множествах мощности континуум. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения.* **2**. Харьков, 1966.

ства, имеющего максимальный класс $\mathcal{M}(C[0,1]) = \mathcal{M}(\aleph_0)$.

В диссертации описываются классы $\mathcal{M}(X)$ для некоторых пространств X. В §**3.2** показано, что пространство ℓ_2 является, наряду с $C[0,1]$, примером пространства с максимально возможным классом $\mathcal{M}(\ell_2) = \mathcal{M}(\aleph_0)$. В §**3.1** доказано, что для некоторого класса пространств, включающего пространства со счетным безусловным базисом, $\mathcal{M}(X)$ содержит все счетные бесконечные компакты.

В п. 3.2.2 получен следующий результат о несепарабельных пространствах. Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное множество. Если пространство $\ell_p(\mathfrak{m})$, $p > 1$, наделено какой-нибудь структурой коммутативной банаховой алгебры с единицей, то характеры образуют замкнутое подмножество в единичном шаре $B(\mathfrak{m})$ сопряженного пространства $\ell_q(\mathfrak{m})$ со слабой топологией. Иначе можно сказать, что любое пространство $M \in \mathcal{M}(\ell_p(\mathfrak{m}))$ гомеоморфно вкладывается в шар $B(\mathfrak{m})$. В теореме 3.2.3 доказано, что, с другой стороны, верно включение $B(\mathfrak{m}) \in \mathcal{M}(\ell_p(\mathfrak{m}))$.

Можно определить также минимально возможный класс $\mathcal{N}(\mathfrak{m})$ пространств $\mathcal{M}(X)$ при данной плотности $\mathfrak{d}(X) = \mathfrak{m}$. Обозначим символом Ω сходящуюся последовательность $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ в обычной топологии. Пличко[31] доказал, что $\Omega \in \mathcal{M}(X)$ для любого сепарабельного банахова пространства X. С другой стороны, Шкариным[32] приведен пример сепарабельного банахова пространства, для которого другие компакты невозможны, т.е. $\mathcal{M}(X) = \{\Omega\}$. Таким образом, $\{\Omega\} = \mathcal{N}(\aleph_0)$ является наименьшим возможным классом $\mathcal{M}(X)$ для сепарабельного пространства X.

В §**3.3** получено обобщение результата Пличко[31] на случай сепарабельного пространства Фреше X, т.е. возможность задать на пространстве X такую структуру коммутативной алгебры Аренса—Майкла с единицей, что ее пространство максимальных идеалов будет гомеоморфно Ω.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Я. Хелемскому за постоянное внимание к работе.

[31] Плічко А. М. Автоматична неперервність, базиси і радикали в метризовних алгебрах *Укр. мат. журн.* **44**, № 8 (1992), 1129–1132.

[32] Shkarin S. A., Kuznetsova Yu. N. Multiplicative spectra of Banach spaces. *J. Math. Sci. NY* **131**, № 6 (2005), 6112–6119.

Работы автора по теме диссертации

1. Кузнецова Ю. Н. Весовые L_p-алгебры на группах. *Функц. анализ и его прил.*, **40**, № 3 (2006), 82-85.

2. Кузнецова Ю. Н. Об умножении в пространствах Фреше. *Вестник МГУ, сер. 1, матем., мех.*, **56** (2001), 58–61.

3. Shkarin S. A., Kuznetsova Yu. N. Multiplicative spectra of Banach spaces. *J. Math. Sci. NY* **131**, № 6 (2005), 6112–6119.

   С. А. Шкарину принадлежит постановка задачи, предложения 1-5, утверждения (1) и (2) теоремы 1 и теоремы 2, 3. Ю. Н. Кузнецовой принадлежит утверждение (3) теоремы 1 и предложение 6.

4. Кузнецова Ю. Н. Сверточные L_p-алгебры с весами на группах. *XXX Дальневост. матем. школа-семинар им. акад. Е.В. Золотова: тез. докл.* Хабаровск: изд-во ДВГУПС, 2005.

5. Кузнецова Ю. Н. Конструкции регулярных алгебр $\mathcal{L}_p^w(G)$. *Деп. в ВИНИТИ* 27.09.2007, № 911–В2007, 16 с.