Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический Факультет

На правах рукописи

УДК 519.212.2, 519.157

Шабанов Дмитрий Александрович

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ О РАСКРАСКАХ РАВНОМЕРНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Райгородский Андрей Михайлович

Оффициальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Блиновский Владимир Маркович,

кандидат физико-математических наук
Виленкин Павел Александрович

Ведущая организация: Институт ситемного
программирования РАН

Защита диссертации состоит 21 марта 2008 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 21 февраля 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Открытие того, что детерминированные утверждения могут быть доказаны с помощью вероятностных соображений, позволило уже в первой половине XX в. установить ряд замечательных фактов из анализа, теории чисел, комбинаторики и теории информации. Вскоре стало ясно, что метод, который сейчас называется *вероятностным*, является весьма мощным инструментом получения результатов в дискретной математике. Ранние результаты такого сорта основывались на сочетании комбинаторных соображений с элементарной вероятностной техникой, однако развитие метода в последние годы потребовало применения все более изощренных инструментов теории вероятностей. Еще одной причиной столь интенсивного развития вероятностного метода стало осознание важности роли, которую играет этот метод в теории компьютерных вычислений, являющейся источником многих задач комбинаторики. В связи с этим, интересен также алгоритмический подход к изучению вероятностного метода в комбинаторике.

Одним из главных инициаторов применения вероятностного метода в дискретной математике выступил в 50-е годы XX века П. Эрдеш, который впоследствии внес в развитие метода очень значительный вклад. Его достижения, гипотезы и проблемы в существенной степени стимулировали исследования в этой области.

Настоящая работа посвящена построению и применению вероятностных методов для изучения экстремальных характеристик, возникающих в задачах о раскрасках равномерных гиперграфов. В общем случае рассматриваемую проблему можно сформулировать так: *найти минимальное число ребер гиперграфа, принадлежащего классу n-равномерных гиперграфов, которые не допускают раскрасок определенного типа.*

Подобные задачи впервые были рассмотрены в работах П. Эрдеша. Так, в 1960-х гг. Эрдешем[1] была предложена следующая проблема: *найти величину $m(n,2)$, равную минимальному числу ребер гиперграфа, принадлежащего классу n-равномерных гиперграфов, которые не допускают правильных двухцветных раскрасок, т.е. двухцветных раскрасок множества своих вершин, делающих каждое ребро неодноцветным.* Уже сам Эрдеш использовал вероятностную технику для получения первоначальных результатов относительно поставленной задачи. Дальнейшее развитие данная проблема получила в работах таких замечательных специалистов в области вероятностной

[1] P. Erdős, *On a combinatorial problem, I*, Nordisk Mat. Tidskrift, 11(1963), 5-10.

комбинаторики, как Й. Бек[2], Дж. Спенсер[3], Дж. Радхакришанан и А. Сринивазан[4]. Ими были построены так называемые рандомизированные алгоритмы раскрасок вершин гиперграфа, с помощью которых и были получены наилучшие известные оценки величины $m(n,2)$.

Заметим, что свойство гиперграфа, которое фактически фигурирует в определении величины $m(n,2)$, можно естественно интерпретировать как далеко идущий аналог свойства двудольности обычного графа[5]. Однако, отнюдь не меньший интерес для исследования представляют многодольные графы. Соответственно, и в теории гиперграфов возникают важные обобщения задачи о величине $m(n,2)$ на случай r-цветных раскрасок.

С одной стороны, изучаются такие r-цветные раскраски множества вершин гиперграфа, при которых каждое его ребро неодноцветно. Здесь аналогом величины $m(n,2)$ служит некоторая величина $m(n,r)$. Изучению этой величины при различных соотношениях между параметрами n и r посвящены работы таких известных математиков, как Н. Алон[6] и А. Косточка[7], также использовавших сложные вероятностные методы и алгоритмы.

С другой стороны, исследуются r-цветные раскраски множества вершин гиперграфа, при которых каждое его ребро содержит вершины всех цветов. Такие раскраски называются *радужными*. Различные экстремальные свойства равномерных гиперграфов, обладающих радужными r-раскрасками, изучались П. Эрдешем, Л. Ловасом[8], А. Косточкой[9], Д. Вудоллом[10] и др.

При изучении раскрасок равномерных гиперграфов особый интерес представляют задачи с дополнительными условиями на пересечения ребер гиперграфа. Например, хорошо известна задача о величине $m^*(n,r)$[8], равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-равномерных *простых* гиперграфов (т.е. таких гиперграфов, у которых любые два ребра имеют не более одной общей вершины), не допускающих правильных r-цветных раскрасок.

Экстремальные задачи о раскрасках равномерных гиперграфов являются одними из наиболее сложных и, в то же время, одними из наиболее популярных в теории гиперграфов. Несмотря на то, что во многих из них не найдены

[2] J. Beck, *On 3-chromatic hypergraphs*, Discrete Mathematics, 24(1978), 127-137.

[3] J.H. Spencer, *Coloring n-sets red and blue*, J. Combinatorial Theory, Series A, 30(1981), 112-113.

[4] J. Radhakrishnan and A. Srinivasan, *Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring*, Random Structures and Algorithms, 16(2000), 4-32.

[5] Ф.Харари, *Теория графов*, М.: КомКнига, 2006.

[6] N. Alon, *Hypergraphs with high chromatic number*, Graphs and Combinatorics, 1(1985), 387-389.

[7] A. V. Kostochka, *Coloring uniform hypergraphs with few colors*, Random Structures and Algorithms, 44(2003), 166-177.

[8] P. Erdős and L. Lovasz, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, In *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 11(1975), North Holland, Amsterdam, 609-627.

[9] A. V. Kostochka, *On a theorem by Erdős, Rubin and Taylor*, Electronic Journal of Combinatorics, 9(2002).

[10] A. V. Kostochka and D. R. Woodall, *Density conditions for panchromatic colourings of hypergraphs*, Combinatorics, 21(2001), 515-541.

точные ответы, полученные результаты имеют множество приложений в других областях, например, в теории алгоритмов. Таким образом, вероятностные методы, разработанные в диссертации, представляют значительный интерес.

Цель работы.

Построение вероятностных алгоритмов раскрасок вершин гиперграфов для доказательства существования раскрасок определенного вида. Получение оценок минимального числа ребер гиперграфа в некоторых классах равномерных гиперграфов.

Научная новизна.

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены новые нетривиальные нижние оценки для минимального числа ребер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не допускающих двухцветных раскрасок, в которых любое ребро гиперграфа содержит не менее k вершин каждого цвета. Разработан соответствующий рандомизированный алгоритм раскраски.
2. Для характеристики из п.1 найдены нетривиальные верхние оценки.
3. Получены новые нетривиальные нижние оценки для минимального количества ребер гиперграфа в классе таких n-равномерных гиперграфов, что их ребра либо не имеют общих вершин, либо имеют не менее h общих вершин и что эти гиперграфы не допускают двухцветных раскрасок, в которых любое их ребро содержит не менее k вершин каждого цвета. Разработан соответствующий рандомизированный алгоритм раскраски.
4. Улучшены ранее известные нижние и верхние оценки минимального числа ребер гиперграфов в классе n-равномерных гиперграфов, не допускающих радужных трехцветных раскрасок. Разработан соответствующий рандомизированный алгоритм раскраски.

Методы исследования.

В работе применяются общие методы теории вероятностей, методы исследования вероятностных алгоритмов, теория систем общих представителей.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть полезными при построении рандомизированных алгоритмов в комбинаторике, при исследовании экстремальных свойств гиперграфов, при практическом поиске некоторых раскрасок у равномерных гиперграфов.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре проф. Н. Г. Мощевитина в МГУ (2003-2007 гг., неоднократно); на Ломоносовских чтениях в Московском Государственном Университете в 2004 г.; на международной конференции "Дискретный анализ и исследование операций" (г. Новосибирск, 2004 г.); на семинаре проф. С. В. Конягина в МГУ (2004 г.); на семинаре д.ф.-м.н. А. М. Зубкова в МИРАН (2005 г.); на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН А. Н. Ширяева (2006 г.); на международной конференции "Шестой Чехословацкий Симпозиум по Комбинаторике, Теории Графов, Алгоритмам и Приложениям" в Праге (Чехия, 2006 г.); на международной конференции "Горизонты Комбинаторики" в Балатональмади (Венгрия, 2006 г.); на кафедральном семинаре кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ (2006-2007 гг.); на IX международном семинаре "Дискретная математика и ее приложения", посвященном 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, 2007 г.); на международной конференции "Европейская Комбинаторика" в Севилье (Испания, 2007 г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведен в конце автореферата (см. [1]-[9]). Публикаций, сделанных в соавторстве, нет.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, шести глав и списка литературы. Общий объем диссертации - 97 страниц. Список литературы содержит 43 наименования. Нумерация теорем в автореферате совпадает с нумерцией в диссертации.

Краткое содержание диссертации.

В **первой главе** обсуждается история задач о нахождении минимального количества ребер гиперграфа в различных классах n-равномерных гиперграфов; даются необходимые определения и формулируются полученные результаты.

Определение 1. *Гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность каких-то подмножеств множества V, и эти подмножества мы называем *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n-равномерным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Первая глава состоит из шести параграфов. В *параграфе* 1.1 приводится история классической задачи о величине $m(n, r)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не допускающих правильных r-цветных раскрасок. В частности, значительное внимание уделяется величине $m_1(n) = m(n, 2)$.

Параграф 1.2 посвящен одному из основных свойств гиперграфов, рассматриваемых в диссертации, - так называемому свойству B_k, где k - натуральное число.

Определение 2. Гиперграф обладает *свойством* B_k, если существует такая двухцветная раскраска множества его вершин, в которой любое ребро гиперграфа содержит не менее k вершин каждого цвета.

Задача, которая формулируется в §1.2, состоит в отыскании величины $m_k(n)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не обладающих свойством B_k. Отметим, что в этой задаче можно считать, что k является функцией от n и $k \leq \frac{n}{2}$, в то же время при $k = 1$ мы возвращаемся к классической задаче о величине $m_1(n) = m(n, 2)$. Одним из центральных результатов диссертации является теорема 1.

Теорема 1. *Пусть задана целочисленная функция $k = k(n)$ и число $\delta \in (0, (\ln 2 + \frac{1}{2})^{-1})$. Пусть, кроме того, для числа $c > 0$ выполнено соотношение*

$$c(1-\delta)^{-1} + \frac{c^2}{2} < 1.$$

Если функция k удовлетворяет неравенству

$$k - 1 \leq \frac{\delta \ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{2 + 2\delta n^{-1} \ln n} \tag{1}$$

для всех $n \geq n_0$, то существует такое натуральное число N_0, одинаковое *для всех функций k, удовлетворяющих условию (1), что для любого $n \geq N_0$*

$$m_k(n) \geq c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-k}}{C_n^{k-1}}. \qquad (2)$$

Теорема 1 является прямым следствием теоремы 2, которая также формулируется в §1.2.

Теорема 2. *Пусть задана целочисленная функция $k = k(n)$, фунция $p = p(n)$, принимающая значения из интервала $(0,1)$, и число $\delta \in (0,1)$. Пусть для всех n, начиная с некоторого $n_1 \geq 18$, выполняются неравенства:*

$$k - 1 \leq \frac{\delta n p}{1 + 2\delta p}, \; p^2 n \leq 1. \qquad (3)$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \alpha_1(n) = \frac{(n-k+1)p}{(n-k+1)p-k+1}, \; \alpha_2 = \alpha_2(n) = \frac{n-k+1}{n-2k+3}(1+p)^{k-1},$$

$$\alpha_3 = \alpha_3(n) = (1+p)^{k-1}(1-p)^{1-k}(1+2p)^{k-1}, \; \gamma_1 = \gamma_1(n) = \max(\alpha_1\alpha_3; \alpha_2),$$

$$\beta_1 = \beta_1(n) = \frac{n-2k+1}{n-4k+3}, \; \beta_2 = \beta_2(n) = \left(1 - \frac{(k-1)^2 p}{n-3k+2}\right)^{-1},$$

$$\beta_3 = \beta_3(n) = \frac{n-k}{n-2k+1}, \; \gamma_2 = \gamma_2(n) = \beta_1\beta_2^2\beta_3\alpha_3 e^{\frac{k+p(k-1)}{1-p}}.$$

Если некоторая функция $x = x(n)$ удовлетворяет неравенству

$$xC_n^{k-1}2^{1-n}\left((1-p)^n + p(k-1)\right)\gamma_1 + x^2\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2 p(2k-1)2^{2k-2n}\gamma_2 < 1$$

для всех n, начиная с некоторого N_1, то для всех $n > \max(n_1, N_1)$ выполнено $m_k(n) > x(n)$.

В свою очередь, теорема 3 дает верхнюю оценку величины $m_k(n)$.

Теорема 3. *Пусть функция $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o(\frac{n}{\ln n})$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая функция $\psi(n)$, зависящая только от вида функции $k(n)$, стремящаяся к единице при $n \to \infty$, что*

$$m_k(n) \leq \psi(n)\frac{e\ln 2}{4}n^2\frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} C_n^i}. \qquad (4)$$

Если положить $k = 1$ в теореме 3, то оценка (4) превратится в наилучшую известную верхнюю оценку классической величины $m_1(n) = m(n,2)$, полученную Эрдешем[11] более сорока лет назад. Если же положить $k = 1$ в теореме

[11] P. Erdős, *On a combinatorial problem, II*, Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary, 15(1964), 445-447.

1, то оценка (2), по существу, совпадет с наилучшей известной нижней оценкой того же $m(n,2)$, принадлежащей Радхакришнану и Сринивазану[4]. Отметим, что область значений параметра k, в рамках которой выполнена оценка (4), шире области, в рамках которой выполнена оценка (2). Это обусловлено применением технически более сложных методов в последнем случае.

В *параграфе* 1.3 рассказывается о свойстве B_k при $k \sim \frac{n}{2}$ в терминах задачи об уклонении и приводятся наиболее известные результаты в данной задаче.

Параграф 1.4 посвящен задачам о свойстве B_k с дополнительными ограничениями на класс рассматриваемых гиперграфов.

Определение 3. Пусть h - натуральное число. Гиперграф обладает *свойством* A_h, если любые два его ребра либо имеют не менее h общих вершин, либо не имеют общих вершин совсем. Другими словами, гиперграф H обладает свойством A_h, если для любых $e, f \in E(H)$ выполнено

$$|e \cap f| \in \{0, h, h+1, \ldots, \min(|e|, |f|)\}.$$

Отметим, что свойство A_h глубоко мотивировано задачами экстремальной комбинаторики, связанными с теоремой Эрдеша - Ко - Радо[12]. Из определения 3 следует, что свойство A_1 тривиально, им обладает любой гиперграф. Считаем, стало быть, что $h > 1$. Положим

$m_{k,h}(n) = \min\{|E(H)|$: H - n-равномерный гиперграф, обладающий свойством A_h, но не обладающий свойством $B_k\}$.

Здесь h, подобно k, является, вообще говоря, функцией от n. Величина $m_{k,h}(n)$ существует не при всех соотношениях между h и k. Теорема 4 дает необходимое условие существования n-равномерных гиперграфов, обладающих свойством A_h, но не обладающих свойством B_k.

Теорема 4. *Пусть гиперграф H обладает свойством A_{2k} и каждое ребро H содержит не менее $2k$ вершин. Тогда H обладает свойством B_k.*

Из теоремы 4 следует, что при $h \geq 2k$ величина $m_{k,h}(n)$ не существует. Если же $h < 2k$, то легко показать, что

$$m_{k,h}(n) \leq C_{2n-2k+1}^{n}. \tag{5}$$

При $h < k$ оценка (5) может быть улучшена.

Теорема 5. *Пусть $h < k$, тогда*

$$m_{k,h}(n) \leq m_{k-h}(n-h).$$

[12]P. Erdős, Ch. Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, J. Math. Oxford, Sec. 12(48)(1961), 313-320.

Если для $m_{k-h}(n-h)$ выполнены условия теоремы 3, то из теоремы 5 вытекает следующая оценка величины $m_{k,h}(n)$ при $h<k$:

$$m_{k,h}(n) \le c\, n^2 \frac{2^{n-h}}{C_{n-h}^{k-h-1}}.$$

Величина $m_{k,h}(n)$, очевидно, не может быть меньше, чем $m_k(n)$, при любом h. Следующая теорема дает существенно лучшую нижнюю оценку величины $m_{k,h}(n)$, нежели все известные нижние оценки $m_k(n)$.

Теорема 6. *Пусть число δ взято из интервала $(0,1)$, $c>0$ и функции $k=k(n)$, $h=h(n)$ таковы, что для всех n, начиная с некоторого n_2, выполняются неравенства*

$$c+c^2(1-\delta)^{-2}<1, \quad (5k-2)(k-1) \le \frac{\delta h \ln\left(\frac{3n}{h\ln n}2^{-\frac{h-1}{h}}\right)}{3n}(n-6k+3).$$

Тогда, если $h<2k$, то существует такое натуральное N_2, зависящее только от вида функций $k(n), h(n)$, что для всех $n \ge \max(N_2, n_2)$ выполнено неравенство

$$m_{k,h}(n) \ge c\left(\frac{3n}{2h\ln n}\right)^{\frac{h}{3}} \frac{2^{n-\frac{2}{3}}}{C_n^{k-1}}.$$

В доказательстве теоремы 6 используется следующая общая теорема о нижней оценке величины $m_{k,h}(n)$.

Теорема 7. *Пусть функция $k=k(n)$ удовлетворяет условию $k=o(n)$ при $n\to\infty$, а функция $h=h(n)$ - условию $h<2k$. Рассмотрим функции $x=x(n)$ и $p=p(n)$. Предположим, во-первых, что множество значений функции $p(n)$ принадлежит $(0,1)$ и выполнено условие $p(n)=o(1)$ при $n\to\infty$. Обозначим через A_1, A_2, A_3 и A_4 следующие выражения:*

$$A_1=(1-p)^{n-k+1}(1+p)^{k-1}\frac{(n-k+1)(1+p)}{2n-2k+2-n(1-p)},$$

$$A_2=C_{n-k+1}^{k-1}p^{n-2k+2}\,(2-p)^{2k-2}\,\frac{(n-2k+2)(2-p)}{2n-4k+4-np},$$

$$A_3=(n-k+1)(k-1)p^2(1-p)^{n-2}\left(\frac{1-p}{1-(k-1)p}\right)^2\left(1-\frac{(n-k)p^2(k-2)}{2(1-p)^2}\right)^{-1},$$

$$A_4=2^{h-1}x^2(1+p)^{n-h}p^h\left(\frac{n-h-k+1}{n-h-2k+2}C_{n-h}^{k-1}\right)^2\left(1-\frac{h(k-1)}{p(n-h-k+1)}\right)^{-2}.$$

Предположим, далее, что для некоторого числа $\delta\in(0,1)$ и для каждого n, начиная с некоторого n_3, выполняются неравенства

$$p^2(k-1)(n-k+1)(1-p)^{-1}\le\delta, \quad (5k-2)(k-1)\le\delta p(n-6k+3)$$

и
$$xC_n^{k-1}\left(A_1+A_2+A_3\right)+A_4<1.$$
Тогда существует такое натуральное число N_3, зависящее только от вида функций $k(n)$ и $p(n)$, что для каждого $n \geq \max(N_3, n_3)$ произвольный n-равномерный гиперграф $H=(V,E)$, обладающий свойством A_h и удовлетворяющий условию $|E| \leq x(n)2^{n-1}$, обладает свойством B_k, и, следовательно, $m_{k,h}(n) > x(n)2^{n-1}$.

В *параграфе* 1.5 рассматриваются задачи о радужных r-раскрасках (т.е. радужных раскрасках в r цветов). Через $p(n,r)$ обозначается минимальное число ребер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не допускающих радужных r-раскрасок. При $r=2$ величины $m(n,2)$ и $p(n,2)$ совпадают. Используя связь между радужными r-раскрасками n-равномерных гиперграфов и предписанными раскрасками полных r-дольных графов, А. Косточка[9] обосновал следующие оценки для $p(n,r)$ при $r \geq 2$ и $n \geq 2$:
$$\frac{1}{r}e^{c_1\frac{n}{r}} \leq p(n,r) \leq re^{c_2\frac{n}{r}}, \tag{6}$$
где c_1 и c_2 - некоторые абсолютные положительные константы, причем $c_1 < c_2$. Следующие две теоремы дают существенно более точную информацию о поведении величины $p(n,r)$ в случае $r=3$.

Теорема 8. *Существует такая функция $\psi(n)$, стремящаяся к единице при $n \to \infty$, что выполнено неравенство*
$$p(n,3) \leq \frac{n^2 e \ln 3}{12}\left(\frac{3}{2}\right)^n \psi(n).$$

Теорема 9. *Существует такая константа $c>0$, что для любого n имеет место неравенство*
$$p(n,3) > c\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Из теорем 8 и 9 следует, что $p(n,3)=e^{(3\ln\frac{3}{2}+o(1))\frac{n}{3}}$. Таким образом, зазор между c_1 и c_2 в (6) устранен. Теорема 9 следует из теоремы 10 о нижней оценке величины $p(n,3)$.

Теорема 10. *Пусть для некоторой функции $x=x(n)$, для функции $p=p(n)$ со множеством значений из полуинтервала $[0,\frac{1}{3})$ и для любого n выполняется неравенство*
$$x(1-p)^n+2^{1-n}x(1+p)^n+x^2\frac{81}{32}p(1+p)^{n-1}<1.$$

Тогда для всех n справедлива оценка $p(n,3) > x(n)\frac{3^{n-1}}{2^n}$.

В последнем параграфе первой главы (*параграф* 1.6) рассматриваются задачи о подгиперграфах.

Определение 4. Гиперграф $H_1 = (V_1, E_1)$ называется *подгиперграфом* гиперграфа $H = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V$, а $E_1 \subseteq E$. Подгиперграф H_1 называется *остовным*, если $V_1 = V$.

Предположим, что гиперграф не обладает свойством B_k, но, удалив из него небольшое количество ребер, можно получить новый гиперграф (остовный подгиперграф), уже обладающий свойством B_k. Возникает вопрос: каково минимальное число ребер в гиперграфах, в которых подобную операцию провести невозможно? Здесь есть несколько подходов.

Первый подход заключается в том, что удалять можно не более, чем ε-долю от общего числа ребер. Получаем определение свойства $B_{k,\varepsilon}$.

Определение 5. Гиперграф $H = (V, E)$ обладает *свойством* $B_{k,\varepsilon}$, если существует (остовный) подгиперграф $H' = (V, E')$, обладающий свойством B_k, с условием $|E'| \geq (1-\varepsilon)|E|$. Положим

$m_{k,\varepsilon}(n) = \min\{|E(H)|\colon H$ - n-равномерный гиперграф, не обладающий свойством $B_{k,\varepsilon}\}$.

Из определения видно, что параметр ε лежит в пределах от 0 до 1. При $\varepsilon = 0$ свойство $B_{k,\varepsilon}$ эквивалентно свойству B_k. В то же время при больших ε свойство $B_{k,\varepsilon}$ становится тривиальным.

Теорема 11. *Пусть*

$$\varepsilon \geq \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j\right) 2^{1-n},$$

тогда произвольный n-равномерный гиперграф обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$.

Очевидно, что при любых значениях ε и k выполняется неравенство $m_{k,\varepsilon} \geq m_k(n)$. Следующая теорема дает лучшую нижнюю оценку $m_{k,\varepsilon}$, чем все известные нижние оценки величины $m_k(n)$.

Теорема 12. *Обозначим через $\lambda = \lambda(n)$ следующее выражение:*

$$\lambda = \varepsilon \frac{2^{n-1}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Пусть дано число $\delta \in (0,1)$ и число $c \in \left(0, \frac{1}{2}(1-\delta)\right)$. Пусть также для всех $n \geq n_4$ выполняются неравенства

$$k - 1 \leq -\frac{\delta \ln(c\lambda)}{1 - 2\delta^{\frac{\ln c\lambda}{n}}},$$

$$|\ln(c\lambda)| \leq \ln n - 3\ln\ln n = \varphi(n) = \varphi.$$

Тогда существует такое натуральное число N_4, что для всех $n \geq N_4$ выполняется неравенство

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geq \left(1 - 2c(1-\delta)^{-1}\right) \frac{\lambda n}{-\ln(c\lambda)} \frac{e^{-k}2^{2-2k}}{2k-1} \frac{2^{n-1}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Теорема 12 является прямым следствием теоремы 13, которая также формулируется в §1.6.

Теорема 13. *Пусть задана целочисленная функция $k = k(n)$, фунция $p = p(n)$, принимающая значения из интервала $(0,1)$, и число $\delta \in (0,1)$. Пусть для всех n, начиная с некоторого $n_5 \geq 18$, выполняются неравенства (3) из условия теоремы 2. Далее, пусть величины $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ и $\gamma_2 = \gamma_2(n)$ те же, что и в условии теоремы 2. Если некоторая функция $x = x(n)$ удовлетворяет неравенству*

$$C_n^{k-1} 2^{1-n} \left((1-p)^n + p(k-1)\right) \gamma_1 + x \left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2 p(2k-1) 2^{2k-2n} \gamma_2 \leq \varepsilon$$

для всех n, начиная с некоторого N_5, то для любого $n > \max(n_5, N_5)$ выполнено $m_{k,\varepsilon}(n) > x(n)$.

Второй подход к задаче о подгиперграфах заключается в том, что количество ребер, которые разрешается удалять, предполагается меньшим фиксированного числа l. Получаем двупараметрическое свойство $F_{k,l}$ гиперграфов.

Определение 6. Гиперграф $H = (V, E)$ обладает *свойством* $F_{k,l}$, если существует подгиперграф $H' = (V, E')$, обладающий свойством B_k, с условием $|E'| > |E| - l$. Определим величину $f_{k,l}(n)$, как минимальное число ребер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не обладающих свойством $F_{k,l}$.

Легко доказать следующие соотношения между $m_k(n)$ и $f_{k,l}(n)$:

$$m_k(n) + l - 1 \leq f_{k,l}(n) \leq l m_k(n).$$

В отличие от предыдущих случаев, вопрос о минимальном числе вершин гиперграфа в данном классе гиперграфов имеет нетривиальный ответ. Обозначим через $f^*_{k,l}(n)$ минимальное число вершин гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не обладающих свойством $F_{k,l}$. Точное значение величины $f^*_{k,l}(n)$ найдено в теореме 14.

Теорема 14.

$$f^*_{k,l}(n) = \min\left\{ v : \min_{a,b:\, a+b=v} \left(\sum_{j=\max(0,n-a)}^{\min(k-1,b)} C_a^{n-j} C_b^j + \sum_{j=\max(0,n-b)}^{\min(k-1,a)} C_b^{n-j} C_a^j \right) \geq l \right\}.$$

Во **второй** главе доказываются теоремы 1 и 2 о нижней оценке величины $m_k(n)$. В доказательстве теоремы 2, которое излагается в *параграфе* 2.1, используется вероятностный метод, связанный с применением нового алгоритма случайной раскраски вершин гиперграфа, построение которого основано на нетривиальном развитии идей из работы Радхакришнана - Сринивазана[4]. Данный алгоритм допускает следующую вероятностную интерпретацию, которая также приводится в §2.1 (пункт 2.1.2).

Пусть $H = (V, E)$ - произвольный n-равномерный гиперграф. Тогда без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, \ldots, w\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, причем $w \leq mn$. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ заданы бернуллиевские случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_w$, $\eta_1, \ldots, \eta_w$ и случайный вектор $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_w)$, принимающий значения в группе S_w перестановок множества V. Здесь $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = 0) = \frac{1}{2}$, $P(\eta_i = 1) = p$, $P(\eta_i = 0) = 1 - p$ (см. теорему 2) для любого $i = 1, \ldots, w$. Далее, $P(\sigma = (i_1, \ldots, i_w)) = \frac{1}{w!}$ для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_w) \in S_w$. При этом случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_w$, $\eta_1, \ldots, \eta_w$ независимы в совокупности, и, более того, для любого подмножества $B \subset \{0, 1\}^{2w}$ и любой перестановки $(i_1, \ldots, i_w) \in S_w$ выполнено

$$P\left((\xi_1, \ldots, \xi_w, \eta_1, \ldots, \eta_w) \in B,\ \sigma = (i_1, \ldots, i_w)\right) =$$

$$= P\left((\xi_1, \ldots, \xi_w, \eta_1, \ldots, \eta_w) \in B\right) \frac{1}{w!},$$

т.е. вектор σ “не зависит” от совокупности $\{\xi_1, \ldots, \xi_w, \eta_1, \ldots, \eta_w\}$. Существование такого вероятностного пространства очевидно.

Для каждого $i \in V$ положим

$$D_i = \bigcup_{j\,:\,i \in e_j} \left\{ I\{\xi_i = 1\} \left(\sum_{s \in e_j} I\{\sigma_s \geq \sigma_i\}\xi_s + \sum_{s \in e_j} I\{\sigma_s < \sigma_i\}\xi_s(1 - \eta_s) \right) > \right.$$

$$\left. > n - k \right\} \cup \left\{ I\{\xi_i = 0\} \left(\sum_{s \in e_j} I\{\sigma_s \geq \sigma_i\}(1 - \xi_s) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{s \in e_j} I\{\sigma_s < \sigma_i\}(1 - \xi_s)(1 - \eta_s) \right) > n - k \right\} \in \mathcal{A}$$

и

$$f_i = \xi_i + \eta_i I\{D_i\} \mod 2,$$

где I - индикатор события.

Вектор $f = (f_1, \ldots, f_w)$ можно итерпретировать как случайную двухцветную раскраску множества V (например, полагая $f_i = 1$ тогда и только тогда, когда вершина i покрашена в красный цвет). Если удастся показать, что

$$P\left(\forall j = 1, \ldots, m \;:\; k \le \sum_{s \in e_j} f_s \le n - k\right) > 0,$$

то это будет означать, что гиперграф H обладает свойством B_k. В пункте 2.1.2 §2.1 формулируется следующая теорема об оценке вероятности противоположного события, из которой легко получить теорему 2.

Теорема 2*. *Пусть заданы целые числа* n, $k \le \frac{n}{2}$, *числа* p, δ *из интервала* $(0, 1)$. *Пусть величины* α_1, α_2, α_3, γ_1, β_1, β_2, β_3, γ_2 *те же, что и в условии теоремы 2. Пусть выполняются неравенства*

$$k - 1 \le \frac{\delta n p}{1 + 2\delta p}, \;\; p^2 n \le 1.$$

Тогда для любой системы n*-элементных подножеств* $e_1, \ldots, e_m$ *множества* $V = \{1, 2, \ldots, mn\}$ *имеет место оценка*

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{\left\{k \le \sum_{s \in e_j} f_s \le n - k\right\}}\right) \le m C_n^{k-1} 2^{1-n} \left((1-p)^n + p(k-1)\right)\gamma_1 +$$

$$+ m^2 \left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2 p(2k-1) 2^{2k-2n} \gamma_2. \qquad (7)$$

Большая часть §2.1 посвящена доказательству неравенства (7). В доказательстве применяются различные соображения комбинаторного характера, а также оценки вероятностей больших уклонений.

В *параграфе* 2.2 осуществляется вывод теоремы 1 из теоремы 2.

В **третьей** главе доказывается теорема 3 о верхней оценке величины $m_k(n)$. Доказательство теоремы основано на методах теории *систем общих представителей*[13].

В **четвертой** главе доказываются теоремы 4 - 7 о различных оценках величины $m_{k,h}(n)$. Наиболее сложным является доказательство теоремы 7, которое приводится в *параграфе* 4.1. Оно основано на применении вероятностного метода, связанного с построением нового алгоритма случайной раскраски вершин гиперграфа. Похожий алгоритм строился во второй главе при доказательстве теоремы 2. Тем не менее, здесь имеются некоторые отличия.

[13] А. М. Райгородский, *Системы общих представителей*, Фундам. и прикл. мат., Т.5, Вып. 3(1999), 851-860.

Н. Н. Кузюрин, *Асимптотическое исследование задачи о покрытии*, Проблемы кибернетики, Вып. 37(1980), 19-56.

Пусть, без ограничения общности, гиперграф $H = (V, E)$, обладающий свойством A_h, таков, что $V = \{1, \ldots, w\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, причем $w \leq mn$. Далее, пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ заданы независимые в совокупности бернуллиевские случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_w$, $\eta_1, \ldots, \eta_w$. Здесь $P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$, $P(\eta_i = 1) = p$.

Для каждого $i \in V$ положим

$$\tilde{D}_i = \bigcup_{j\,:\,i \in e_j} \overline{\left\{ k \leq \sum_{s \in e_j} \xi_s \leq n - k \right\}} \in \mathcal{A}$$

и

$$f_i = \xi_i + \eta_i I\{\tilde{D}_i\} \mod 2.$$

Вектор $f = (f_1, \ldots, f_w)$ можно интерпретировать как случайную раскраску множества V. Если удастся показать, что

$$P\left(\forall j = 1, \ldots, m \,:\, k \leq \sum_{s \in e_j} f_s \leq n - k \right) > 0,$$

то это будет означать, что гиперграф H обладает свойством B_k. В пункте 4.1.2 формулируется теорема об оценке вероятности противоположного события, из которой легко получить теорему 7.

Теорема 7*. *Пусть функция $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o(n)$ при $n \to \infty$, а функция $h = h(n)$ - условию $h < 2k$. Пусть также задана функция $p = p(n)$, число δ из интервала $(0, 1)$ и натуральное число x. Предположим, что множество значений функции $p(n)$ принадлежит $(0, 1)$ и выполнено условие $p(n) = o(1)$ при $n \to \infty$. Пусть величины A_1, A_3, A_3, A_4 те же, что и в условии теоремы 7. Если для всех n, начиная с некоторого n_3, выполняются неравенства*

$$(5k - 2)(k - 1) \leq \delta p(n - 6k + 3), \;\; p^2(k - 1)(n - k + 1)(1 - p)^{-1} \leq \delta,$$

тогда существует такое натуральное число N_3, что для любого $n \geq N_3$ и для любой системы n-элементных подножеств $e_1, \ldots, e_x$ множества $V = \{1, 2, \ldots, xn\}$, обладающей свойством A_h, имеет место оценка

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{x} \overline{\left\{ k \leq \sum_{s \in e_j} f_s \leq n - k \right\}} \right) \leq x C_n^{k-1} \left(A_1 + A_2 + A_3 \right) + A_4. \tag{8}$$

Большая часть §4.1 посвящена доказательству неравенства (8). Как и в случае неравенства (7), здесь используются комбинаторные соображения и оценки вероятностей больших уклонений.

В *параграфе* 4.2 теорема 6 выводится из теоремы 7. В *параграфе* 4.3 строится несложный алгоритм для доказательства теоремы 4. Наконец, *параграф* 4.4 посвящен доказательству теоремы 5.

В **пятой** главе доказываются теоремы 8-10 об оценках величины $p(n,3)$. Теорема 8, подобно теореме 3 о верхней оценке величины $m_k(n)$, доказывается в *параграфе* 5.1 с помощью теории систем общих представителей.

Нижняя оценка величины $p(n,3)$, анонсированная в теоремах 9 и 10, получается применением вероятностного метода, основанного на использовании нового рандомизированного алгоритма раскраски вершин гиперграфа (см. *параграфы* 5.2 и 5.3).

Пусть, без ограничения общности, гиперграф $H=(V,E)$ таков, что $V = \{1,\dots,w\}$, $E=\{e_1,\dots,e_m\}$, причем $w \le mn$. Пусть, как и в аналогичных случаях раньше, на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$ заданы независимые в совокупности случайные величины $\xi_1,\dots,\xi_w,\eta_1,\dots,\eta_w$. Здесь

$$P(\xi_i=1)=P(\xi_i=2)=P(\xi_i=3)=\frac{1}{3},$$

$$P(\eta_i=1)=P(\eta_i=2)=P(\eta_i=3)=p,\ P(\eta_i=0)=1-3p,$$

где p - некоторое число из интервала $(0,\frac{1}{3})$. Для каждого $i\in V$ положим

$$\hat{D}_i = \bigcup_{j\,:\,i\in e_j}\bigcup_{k=1}^{3}\bigcap_{s\in e_j}\{\xi_s \ne k\}\in\mathcal{A}$$

и

$$f_i=\xi_i\left(1-I\{\hat{D}_i\}I\{\eta_i\ne 0\}\right)+\eta_i I\{\hat{D}_i\}.$$

Легко видеть, что случайная величина f_i принимает только значения 1, 2 или 3. Поэтому вектор $f=(f_1,\dots,f_w)$ можно итерпретировать как случайную трехцветную раскраску множества V (например, полагая $f_i=1$ тогда и только тогда, когда вершина i покрашена в красный цвет). Если удастся показать, что выполнено неравенство

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{3}\bigcap_{s\in e_j}\{f_s\ne k\}\right)<1,$$

то это будет означать, что гиперграф H допускает радужную трехцветную раскраску. В *параграфе* 5.2 формулируется и доказывается следующая теорема об оценке вероятности упомянутого события, из которой легко получить теорему 10.

Теорема 10*. *Пусть дано число p из полуинтервала $[0,\frac{1}{3})$. Тогда для любой системы n-элементных подножеств $e_1,\dots,e_m$ множества $V=$*

$= \{1, 2, \ldots, mn\}$ *имеет место оценка*

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{3}\bigcap_{s\in e_j}\{f_s \neq k\}\right) \leq m(1-p)^n + 2^{1-n}m(1+p)^n + m^2\frac{81}{32}p(1+p)^{n-1}.$$

В *параграфе* 5.3 теорема 9 выводится из теоремы 10.

Шестая глава посвящена доказательствам результатов в задачах о подгиперграфах.

Теорема 11 доказывается в *параграфе* 6.1 несложным вероятностным методом. Доказательства теорем 12,13 об оценках величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ изложены в *параграфах* 6.2, 6.3 и основаны на оценке математического ожидания случайной величины $X(f)$, равной количеству ребер, содержащих необходимое число вершин каждого цвета в случайной раскраске f вершин гиперграфа, построенной в рамках рандомизированного алгоритма, приведенного в доказательстве теоремы 2 (вторая глава). В *параграфе* 6.4 доказана теорема 14.

Наконец, в *параграфах* 6.5 и 6.6 формулируется и доказывается следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть фиксированы натуральные числа l, n, k, v и число $\beta \geq 1$. Введем обозначения:*

$$f(v) = \min_{a:\, 1\leq a\leq v}\left(\sum_{j=\max(0,n-a)}^{\min(k-1,v-a)} C_a^{n-j}C_{v-a}^{j} + \sum_{j=\max(0,n-v+a)}^{\min(k-1,a)} C_{v-a}^{n-j}C_a^{j}\right),$$

$$\mu_0 = \frac{C_v^n}{f(v)}\left(\ln\frac{2^v f(v)}{C_v^n} + 1\right).$$

Если выполняются неравенства $k \leq \frac{n}{2}$ и

$$l - 1 \leq \frac{(\beta-1)f(v)}{\beta(\beta\mu_0+1)},$$

тогда существует n-равномерный гиперграф H, не обладающий свойством $F_{k,l}$, с условиями $|V(H)| = v$, $|E(H)| \leq l(\beta\mu_0+1)$.

В доказательстве теоремы 15, приведенном в §6.6, используются методы теории систем общих представителей.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю А. М. Райгородскому за постановку задач, постоянное внимание и интерес к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Д. А. Шабанов, *Об одной комбинаторной задаче Эрдеша*, Доклады Академии Наук, 396 N2(2004), 166-169.

[2] Д. А. Шабанов, *О раскрасках гиперграфов*, Доклады Академии Наук, 402 N5(2005), 605-608.

[3] Д. А. Шабанов, *О числе вершин в гиперграфах близких к двудольным*, Доклады Академии Наук, 412 N1(2007), 31-34.

[4] Д. А. Шабанов, *Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов*, Известия РАН Серия математическая, 71 N6(2007), 183-222.

[5] D. A. Shabanov, *On some extremal properties of hypergraphs colorings*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 29(2007), 97-100.

[6] Д. А. Шабанов, *Об одной комбинаторной задаче Эрдеша*, Материалы международной конференции "Дискретный анализ и исследование операций", Новосибирск: изд-во института математики (2004), стр. 91.

[7] D. A. Shabanov, *On B Property of Hypergraphs*, Abstracts of the talks at "Sixth Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications", ITI Series, Prague (2006), p. 114.

[8] D. A. Shabanov, *On Some Properties of Hypergraphs*, Abstracts of the talks at "EMS Conference on Horizon of Combinatorics", изд-во Alfred Renyi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, Budapest (2006), p. 59.

[9] Д. А. Шабанов, *Об экстремальных характеристиках равномерных гиперграфов*, Материалы IX Международной семинара "Дискретная математика и ее приложения", посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова, Москва: изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007, стр. 256-258.