МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

**ПАВЛИКОВ Сергей Владимирович**

# МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретическая механика

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Камской государственной инженерно-экономической академии

Научный консультант – доктор физико-математических наук,
профессор А.С. Андреев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор В.Г. Вильке
доктор физико-математических наук,
профессор П.С. Красильников
доктор физико-математических наук,
профессор В.С. Сергеев

Ведущая организация – Институт проблем управления

Защита диссертации состоится "___"________ 2008 года в 16 часов на заседании диссертационного совета по механике N 1 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "___"____________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент В.А. Прошкин

## Общая характеристика работы

Актуальность темы. В качестве математических моделей в механике, теории управления, физике, биологии и экономике эффективно используются функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ).

Впервые в достаточно общей форме такие уравнения были представлены и исследованы в трудах В. Вольтерра [1] [2].

Наиболее полно метод функционалов Ляпунова был разработан в трудах Н.Н. Красовского [3] [4], а затем получил развитие в работах В.Б. Колмановского, В.Р. Носова, С.Н. Шиманова, А.А. Шестакова, Дж. Хейла и других ученых.

Постановка новых задач об устойчивости и стабилизации движений и процессов (в том числе механических) с учетом запаздывания, отсутствие универсального способа построения функционалов Ляпунова, удовлетворяющих условиям тех или иных общих теорем об устойчивости приводит к необходимости изучения способов их модификации, развития и обобщения. Активные исследования в этом направлении в последнее время проводились в работах И.В. Гайшуна и Л.Б. Княжище, А.С. Андреева, Т.А. Бартона, Л. Хатвани и других ученых.

К исследованию устойчивости ФДУ сводятся задачи об устойчивости эредитарных механических систем, о стабилизации регулируемых систем, о стабилизации движений механических систем с учетом запаздывания в структуре обратной связи. Изучением этих задач, в том числе с использованием функционалов Ляпунова, занимались Н.Н. Красовский, Ю.С. Осипов, С.М. Белоцерковский, В.Б. Колмановский, И.М. Ананьевский, Дж. Хейл, В.С. Сергеев и другие ученые.

Теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы ФДУ с конечным запаздыванием, при условии существования знакоопределенного функционала со знакопостоянной производной, позволили решить ряд интересных задач об устойчивости и стабилизации движения механической

[1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. – 288 с.

[2] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1982. – 302 с.

[3] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. – 1956. – Т. 20. – № 3. – С. 315–327.

[4] Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. – 1956. – Т. 20. – № 4. – С. 513–518.

системы с конечным запаздыванием [1]. Эти результаты определили, по существу, новое направление в теории устойчивости ФДУ. Однако многие проблемы этого направления до настоящего времени оставались малоисследованными или неисследованными.

Цель работы. Разработка новых методов исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе функционалов Ляпунова применительно к решению задач об устойчивости и стабилизации движений механических систем с запаздыванием.

Научная новизна. Получены новые методы исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с конечным и бесконечным запаздыванием на основе функционалов Ляпунова со знакопостоянными производными. Разработаны новые методы решения общих и конкретных задач об устойчивости эредитарных механических систем, о стабилизации движений механических систем с запаздывающей обратной связью.

Основные положения, выносимые на защиту. Автором защищаются следующие положения:

1. Новые методы исследования устойчивости, асимптотической устойчивости по всем и части переменных для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с конечным и бесконечным запаздыванием, основанные на применении знакопостоянных и немонотонных функционалов Ляпунова.

2. Решения задач об устойчивости положения равновесия и стационарного движения эредитарной механической системы.

3. Новые методы исследования задач о стабилизации, в том числе, оптимальной и с гарантированной оценкой качества, регулируемых систем с запаздыванием.

4. Решения задач о стабилизации вращательного движения твердого тела.

5. Решение задачи о стабилизации трехосной ориентации твердого тела в инерциальной системе координат на основе управляющих

[1] Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений.– Ульяновск: Ульяновский гос. университет, 2005. – 328 с.

моментов, формируемых с обратной запаздывающей связью.

Практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы в изучении устойчивости ФДУ, для исследования устойчивости движений эредитарных механических систем, для построения структуры управления в задачах о стабилизации движений управляемых механических систем.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на: Международной конференции "Устойчивость, управление и динамика твердого тела"(Донецк, 1996 г., 2005 г.); Украинской конференции "Моделирование и исследование устойчивости систем"(Киев, 1994 г., 1996 г.); 11-й Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики (Ульяновск, 1996 г.); Региональной конференции "Фундаментальные проблемы математики и механики"(г. Ульяновск, 1996 г.); семинаре по аналитической механике и теории устойчивости в МГУ под рук. акад. РАН В.В. Румянцева, проф. А.В. Карапетяна и член-корр. РАН В.В. Белецкого (март 1997 г.); Пятой Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов"(Ульяновск, 2003 г.); International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigat"(Киев, 2003 г., 2007 г.); Шестой и Седьмой Крымской Международной Математической Школы "Метод функций Ляпунова и его приложений"(Крым, Алушта, 2002 г., 2004 г.); IX международном семинаре им. Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Москва, 2006 г.); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006 г.); Всероссийском семинаре по аналитической механике и теории устойчивости в МГУ под рук. акад. РАН В.В. Румянцева, член-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. А.В. Карапетяна (14 марта 2007 г.); Всероссийском семинаре по нелинейной динамики в ВЦ РАН (15 марта 2007 г.).

Личный вклад автора. Представленные на защиту результаты получены автором лично.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 26 работах.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, приложения, заключения и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Общий объем работы составляет 248 страниц, библиография содержит 168 источника.

## Содержание работы

В первой главе рассматривается задача об устойчивости по всем и части переменных нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа с конечным запаздыванием.

В первом разделе приводятся основные определения, теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных. Излагаются предположения относительно правой части уравнения, позволяющие провести исследование.

Пусть $R = ]-\infty, +\infty[$ есть действительная ось, $R^+ = [0, +\infty[$, $R^n$ есть действительное линейное пространство $n$-векторов $x$ с нормой $|x|$, $h > 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [\alpha, \beta] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, \alpha \leq s \leq \beta)$, $C_H = \left\{\varphi \in C_{[-h,0]} : \|\varphi\| < H\right\}$, для непрерывной функции $x : ]-\infty, +\infty[ \to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $x_t \in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$ для $-h \leq s \leq 0$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Пусть дано функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad f(t, 0) \equiv 0, \tag{1.1}$$

где $f : R^+ \times C_H \to R^n$ есть некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решений (1.1) от начальных данных.

Вводятся следующие предположения относительно правой части (1.1).

**Предположение 1.1**. Для каждого числа $r$, $0 < r < H$, существует монотонно неубывающая функция $\mu_r(0) = 0$, такая, что для любой непрерывной функции $u : [a, b] \to \bar{C}_r, \bar{C}_r = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \leq r\}$ при любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство:

$$|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(\tau, u(\tau))d\tau| \leq \mu_r(|t_2 - t_1|).$$

**Предположение 1.2**. Для каждого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, т. е. для любого $K \subset C_H$ имеется $m = m(K)$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi)$, $(t_1, \varphi_1)$, $(t_2, \varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства:

$$|f(t, \varphi)| \leq m, \qquad |f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon.$$

При этих предположениях семейство сдвигов $\{f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)\}$ предкомпактно в некотором метризуемом функциональном пространстве $F$ непрерывных функций $f : R^+ \times \Gamma \to R^n$ с компактно открытой топологией, где $\Gamma \subset C_H$ – есть некоторая подобласть, содержащая семейство функций $\{x_t(\alpha, \varphi), t \geq \alpha + h\}$, образуемое каждым решением (1.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_H$, таких, что $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H, t \in R^+$ [1].

Функция $f^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ называется предельной к $f$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что $\{f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ в $F$. Уравнение:

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{1.2}$$

называется предельным к (1.1). Областью определения (1.2) по построению можно принять область $R \times \Gamma$.

Далее в первом разделе приводятся теоремы о взаимосвязи решений уравнений (1.1) и (1.2), о квазиинвариантности положительного предельного множества $\Omega^+(x_t(\alpha, \varphi)) = \{\varphi^* \in C_H : \exists t_n \to +\infty, n \to \infty, x_{t_n}(\alpha, \varphi) \to \varphi^*$ при $n \to \infty\}$ решения (1.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$, ограниченного компактом $K \subset C_H$ для всех $t \geq \alpha - h$. Свойство квазиинвариантности заключается в том, что для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(x(t, \alpha, \varphi))$ существует предельное уравнение $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, такое, что для решения этого уравнения $x(t, 0, \varphi^*)$ выполняется соотношение $\{x_t(0, \varphi^*) : t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$.

Во втором разделе первой главы исследуется задача об устойчивости при существовании знакопостоянного и немонотонного функционала Ляпунова.

[1] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1998. – 34, № 4. – С. 435–440.

Для этого вводятся следующие определения.

**Определение 1.1.** Решение $x = 0$ называется точкой равномерного притяжения решений всего семейства предельных уравнений $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$ относительно множества $\Lambda \subset C_H$, если при некотором $\Delta > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого решения $x^*(t, 0, \varphi)$, $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\| < \Delta\}$ любого уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ для всех $t \geq T$ выполняется неравенство: $\|x_t^*(0, \varphi)\| < \varepsilon$.

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал, $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — некоторое решение (1.1), определенное для всех $t \geq \alpha - h$. Вдоль этого решения функционал $V$ представляет собой непрерывную функцию времени $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$. Для этой функции определяется верхняя правосторонняя производная:

$$\dot{V}(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim_{\Delta t \to 0+} \sup \frac{1}{\Delta t} \left( V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \right).$$

При $t = \alpha$, в частности, имеем значение производной $\dot{V}(\alpha, \varphi)$.

Будем применять определения определенной положительности и бесконечно малого высшего предела для функционала $V$ из [1], соответственно чему функционал $V(t, \varphi)$ должен иметь оценки $V(t, \varphi) \geq \omega(|\varphi(0)|)$ и $|V(t, \varphi)| \leq \omega(\|\varphi\|)$, где $\omega$ — функция типа Хана.

**Определение 1.2.** Для непрерывного функционала $V(t, \varphi)$ и некоторого числа $c \in R$ множество $V^{-1}(\infty, c) =$ $= \{\varphi \in C_H : \exists \varphi_n \in C_H, t_n \to +\infty : \quad \varphi_n \to \varphi, \quad V(t_n, \varphi_n) \to c\}$.

На основе этих определений доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R^+$, такой, что:

$$V(t, \varphi) \geq 0, V(t, 0) \equiv 0, \dot{V}(t, \varphi) \leq 0, (t, \varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) решение $x = 0$ есть точка равномерного притяжения решений $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$ относительно множества $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty, 0)$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) устойчиво по Ляпунову. Если, дополнительно, выполняется $V(t, \varphi) \leq \omega(\|\varphi\|)$, тогда решение $x = 0$ (1.1) равномерно устойчиво.

[1] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.– М.: Наука, 1981. – 448 с.

Пусть $t_n \to +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t,c) \subset C_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V_\infty^{-1}(t,c)$, если существует последовательность $\{\varphi_n \in \Gamma, \varphi_n \to \varphi\}$, такая, что: $\lim_{n\to+\infty} V(t+t_n,\varphi_n) = c$.

Допустим, что для производной $\dot{V}$ имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, \forall (t,\varphi) \in R \times \Lambda,$$

где непрерывный функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, $K$ – компакт из $C_H$. Как и в случае $f(t,\varphi)$, при таком условии семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором функциональном пространстве непрерывных функций $F_G = \{G : R \times \Gamma \in R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Функционал $W^* \in F_G$ называется предельным к $W$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что $\{W^{(n)}(t,\varphi) = W(t_n + t,\varphi)\}$ сходится к $W^*(t,\varphi)$ в $F_G$. При этом множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, определяемое той же последовательностью $t_n \to +\infty$, определим как соответствующее $W^*$.

**Определение 1.3.** Решение $x = 0$ устойчиво относительно каждого множества $\Lambda = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\| < \delta\}$ следует $\|x_t^*(0,\varphi)\| < \varepsilon$ для каждого решения $x^*(t,0,\varphi)$ уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$ при всех $t \ge 0$.

**Определение 1.4.** Решение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым относительно каждого множества $\Lambda = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, если оно устойчиво относительно $\Lambda$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$ и существует $\triangle$, такое, что из $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\| < \triangle\}$ следует, что решение $x^*(t,0,\varphi)$ уравнения (1.2) стремится к 0 при $t \to \infty$.

На основе этих построений выводится следующий результат.

**Теорема 1.2.** Теорема 1.1 останется верна, если условие 2) в ней будет иметь вид:

2) решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно каждого множества $\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$.

Различие теорем 1.1 и 1.2 состоит, прежде всего, в определении множеств $V^{-1}(\infty,0)$ и $V^{-1}(t,0)$. По определению $V_\infty^{-1}(t,0)\subset V^{-1}(\infty,0)$. Поэтому условия теоремы 1.2 в примерах более точные, чем условия 1.1, но множество $V_\infty^{-1}(\infty,0)$ определяется легче.

Еще более удобной представляется модификация теоремы, условия которой предполагаются только относительно исходной системы (1.1). Для этого необходимо ввести следующие определения.

**Определение 1.5.** Решение $x=0$ уравнения (1.1) называется устойчивым относительно множества $\Lambda\subset C_H$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что из $\varphi\in\Lambda\bigcap\{\varphi:\|\varphi\|<\delta\}$ следует $\|x_t(0,\varphi)\|<\varepsilon$ при всех $t\geq 0$.

**Определение 1.6.** Решение $x=0$ уравнения (1.1) называется равномерно асимптотически устойчивым относительно множества $\Lambda$, если оно устойчиво относительно $\Lambda$ и существует $\triangle>0$, такое, что для каждого $\varepsilon>0$ можно указать $T=T(\varepsilon)>0$, такое, что для всех $\varphi\in\Lambda\bigcap\{\|\varphi\|<\triangle\}$ следует $\|x_t(0,\varphi)\|<\varepsilon$ при $t\geq T(\varepsilon)$.

**Теорема 1.3.** В теореме 1.1 условие 2) можно заменить на следующее: решение $x=0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\Lambda_0=V^{-1}(\infty,0)$.

Далее в разделе выводятся две теоремы, в которых более существенно используются свойства множеств $V_\infty^{-1}(t,c)$ и $\{W^*(t,\varphi)=0\}$.

Доказана теорема о равномерной асимптотической устойчивости с использованием немонотонного функционала.

**Теорема 1.4.** Предположим, что для системы (1.1) можно найти функционал $V=V(t,\varphi)$ такой, что:

1) $|V(t,\varphi)|\leq a_1(\|\varphi\|)$ для $(t,\varphi)\in R^+\times C_H$, $V(t,\varphi)\geq 0$ для каждого $t\in R^+$ и каждой функции $\varphi\in C_H$ такой, что $\|\varphi\|=|\varphi(0)|$;

2) производная функционала $V$ в силу системы (1.1) $\dot V(t,\varphi)\leq -W(t,\varphi)\leq 0$ для всех $(t,\varphi)\in R^+\times\{\varphi\in C_H:V(t,\varphi)0,\|\varphi\|=|\varphi(0)|\}$;

3) для каждой предельной пары $(f^*,W^*)$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c):c=const>0\}\bigcap\{W^*(t,\varphi)=0\}$ не содержит решений $x^*(t,\varphi)$ уравнения (1.2);

4) решение $x=0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{V_\infty^{-1}(t,c):c\leq 0\}$ равномерно по совокупности предельных уравнений

(1.2).

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Отличием этой теоремы от предыдущих состоит в том, что предполагается возможным значения функционала $V(t, \varphi) < 0$. Эффективность применения различных теорем показана в решении соответствующих математических примеров.

Доказанные теоремы представляют собой развитие и обобщение теорем Н.Н. Красовского [1], Дж. Хейла [2], Л.Б. Княжище и В.А. Щеглова [3], А.С. Андреева и Д.Х. Хусанова [4]. Оно состоит, в целом, в обосновании применимости в исследовании устойчивости ФДУ незнакоопределенных функционалов Ляпунова.

В третьем разделе излагаются результаты решения задач о частичном притяжении решений, частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа посредством функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную.

Пусть $R^m$, $R^p$ есть линейные действительные пространства $m$- и $p$-векторов с нормами $|y|, |z|$, $R^n$ есть линейное действительное пространство $n$-векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m,\ z_1, z_2, ..., z_p) = (y, z)$ с нормой $|x| = |y| + |z|, n = m + p$; $h \geq 0$ – некоторое действительное число, $C^{(n)}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup\left(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0\right)$, $\varphi = (\varphi_{(y)}, \varphi_{(z)})$.

Предполагается, что правая часть (1.1), определенная на $R^+ \times \Lambda$, $\Lambda = C_H^{(m)} \times C^{(p)}$, такова, что решения (1.1) $z$-продолжимы.

Вначале проводится построение предельных к (1.1) систем, учитывая область определения правой части (построение аналогично построению из раздела (1.1)). Показано, что при определенных условиях асимптотическая устойчивость исходного уравнения является

[1] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. – 1956. – Т. 20. – № 3. – С. 315–327.

[2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

[3] Княжище Л.Б., Щеглов В.А. О знакоопределенности функционала Ляпунова и устойчивости одного уравнения с запаздыванием. – Минск, 1994. – 32 с.

[4] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Дифференц. уравнения. – 1998. – 34, № 7. – С. 876–885.

следствием свойства равномерного притяжения предельных уравнений.

Доказаны теоремы о притяжении решений, об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения по части переменных на основе знакоопределенного по контролируемым переменным функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную.

**Теорема 1.5.** Предположим, что:

1) существует окрестность $N$ точки $x = 0$, из которой решения уравнения (1.1) ограничены по $z$;

2) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to R^+$, такой что:

$$V(t,0) \equiv 0, V(t,\varphi) \geq \omega_1(|\varphi_{(y)}(0)|), \dot{V} \leq -W(t,\varphi) \leq 0$$

для всех $t \in R^+, \varphi \in \bar{C}^{(m)}_{\delta_1} \times \bar{C}^{(p)}_{\delta_2}$;

3) для каждой предельной пары $(f^*, W^*)$ с множеством $V^{-1}_\infty(t,c)$, множество $\{V^{-1}_\infty(t,c) : c = const \geq 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$, кроме решений $x = x(t) = (y(t), z(t))$ таких, что $y = 0$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ асимптотически $y$-устойчиво.

**Теорема 1.6.** Предположим, что:

1) существует окрестность $N$ точки $x = 0$, из которой решения уравнения (1.1) равномерно ограничены по $z$;

2) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to R^+$, ограниченный и равномерно непрерывный на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset \Lambda$ есть компакт, и такой, что:

$$\omega_1(|\varphi_{(y)}(0)|) \leq V(t,\varphi) \leq \omega_2(\|\varphi\|), V(t,0) \equiv 0,$$

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, (t,\varphi) \in R^+ \times \Lambda;$$

3) каждая предельная совокупность $(f^*, V^*, W^*)$ такова, что множество $\{V^*(t,\varphi) = c > 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = f^*(t,x_t)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически $y$-устойчиво.

Условие ограниченности решений по $z$ в этих теоремах может быть заменено условием относительно функционала Ляпунова, если ввести следующее определение.

**Определение 1.7.** Пусть $V = V(t,\varphi)$ – функционал Ляпунова, $c \in R$ – некоторое число. Точка $\varphi_{(y)} = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in C^{(m)}_H$

принадлежит множеству $L_\infty(c)$, если существуют последовательности $t_k \to +\infty, \varphi^k_{(y)} \to \varphi_{(y)}, \|\varphi^k_{(z)}\| \to +\infty$, такие, что: $V(t_k, \varphi_{(y)}, \varphi_{(z)}) \to c$ при $k \to \infty$.

Соответственно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.7.** Предположим, что существует непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to R^+$, такой, что:

1) существует число $Q > 0$, такое, что для каждого числа $\delta > 0$ $\underline{\lim} V(t, \varphi_{(y)}, \varphi_{(z)}) \geq Q$ при $\varphi_{(z)} \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, \varphi_{(y)} \in \{\delta \leq \|\varphi_{(y)}\| \leq H_1 < H\}$;

2) $V(t, 0) \equiv 0$, $V(t, \varphi) \geq \omega(|\varphi_{(y)}(0)|)$, $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times \Lambda$;

3) для каждой предельной пары $(f^*, W^*)$ максимально инвариантное подмножество множества $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = const\} \bigcap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержится во множестве $\{\varphi \in C_H : \varphi_{(y)} = 0\}$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ асимптотически $y$-устойчиво.

Далее выводятся теоремы об устойчивости по части переменных на основе знакопостоянного функционала Ляпунова. Для этого используются результаты из раздела 2.

Результаты третьего раздела развивают и обобщают результаты В.И. Воротникова [1], Т.А. Калистратовой [2] и других ученых в направлении широкого использования знакопостоянных функционалов.

В четвертом разделе формулируются следствия результатов второго и третьего разделов для случая автономного, периодического и почти периодического уравнений.

Во второй главе рассматривается устойчивость функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием на основе знакоопределенных и знакопостоянных функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Для уравнений с неограниченным запаздыванием значительную роль в исследовании таких уравнений играет выбор подходящего фазового пространства. В разделе 2.1 вводится определение фазового пространства на основе аксиоматического подхода, предложенного в работе Дж. Хейла и

[1] Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1991.

[2] Калистратова Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 5. – С. 32–37.

Дж. Като [1]. Этот подход позволяет провести построение предельных уравнений в форме, несколько более сложной, чем для функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием.

Пусть $B$ — есть действительное векторное пространство либо:

1) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $R^n$, и для $\varphi, \psi \in B$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо

2) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $R^n$, и для $\varphi, \psi \in B$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

Предположим, что в пространстве $B$ определена норма $\|.\|_B$, такая, что пространство $(B, \|.\|_B)$ является банаховым. В пространстве $R^n$, как и ранее, норму обозначим через $|.|$.

Для функции $x : (-\infty, A) \to R^n$, $0 < A \leq +\infty$, определим функцию $x_t : (-\infty, 0] \to R^n$ формулой $x_t(s) = x(t + s)$, $s \leq 0$, для каждого $t \in [0, A)$.

**Определение 2.1**. Пространство $B$ называется допустимым, если существуют постоянные $K > 0$, $J > 0$ и непрерывная функция $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$, такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0 \leq a < A \leq \infty$. Если $x : (-\infty, A) \to R^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$ справедливо:

B1) $x_t \in B$ и $x_t$ непрерывно по $t$ относительно $\|.\|_B$;

B2) $\|x_t\|_B \leq K \max_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t - a)\|x_a\|_B$;

B3) $|\varphi(0)| \leq J\|\varphi\|_B$ для всех $\varphi \in B$;

B4) $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Предположим, что если $\varphi$ ограничена и непрерывна на $(-\infty, 0]$, то $\varphi \in B$ и все функции $\varphi_{-t}$, $t \geq 0$, ограничены по норме пространства $B$: $\|\varphi_{-t}\|_B \leq L$, для некоторого $L > 0$ (здесь $\varphi_{-t}(s) = \varphi(-t + s)$, $s \in (-\infty, 0]$).

Пусть $B$ есть допустимое сепарабельное пространство. Для произвольного $H > 0$ определим множество $B_H = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B < H\}$, $\bar{B}_H = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B \leq H\}$.

[1] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11–41.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{2.1}$$

Здесь $f$ есть непрерывное отображение, определенное на множестве $R^+ \times B_H \to R^n$ для некоторого $0 < H \leq +\infty$, ограниченное на каждом множестве $R^+ \times \bar{B}_h$, $|f(t,\varphi)| \leq m(h)$ для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times \bar{B}_h, 0 < h < H$.

При таких условиях для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1), определенное для $[\alpha, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$.

**Определение 2.2.** Функция $f(t,\varphi)$, определенная на $R \times B$, имеет компактную оболочку, если для любого компактного множества $K' \subset R \times B$ существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \geq 0$, содержащая подпоследовательность $\{t_m\}$, такую, что последовательность $\{f(t + t_m, \varphi)\}$ равномерно сходится при $(t, \varphi) \in K'$.

Оболочкой $H^+(f)$ является множество пар $(f^*, \Omega)$, $\Omega \subset R^+ \times B_H$, таких, что существует последовательность $\{t_n\}, t_n \to +\infty, n \to \infty$, для которой $\{f(t + t_n, \varphi)\}$ сходится к $f^*(t, \varphi)$, $(t, \varphi) \in \Omega$, при этом функция $f^* : R^+ \times B_H \to R^n$ называется предельной к $f$.

**Предположение 2.1**. Для каждого компактного множества $K \subset B_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R^+ \times K$.

Показано, что при условиях, наложенных на функцию $f$, и выполнения предположения 2.1 оболочка $H^+(f)$ будет компактной.

Для каждой пары $(f^*, \Omega) \in H^+(f)$ определим предельное уравнение:

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t). \tag{2.2}$$

В разделе 2.2 на основе знакоопределенных функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной доказываются теоремы о локализации положительного предельного множества, об асимптотической устойчивости и неустойчивости.

**Теорема 2.1.** Предположим, что:

1) $V(t, \varphi) : R^+ \times B_H \to R$ есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset B_H$:

$$V(t, \varphi) \geq m(K) \quad \forall (t, \varphi) \in R^+ \times K,$$

его производная

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in R^+ \times B_H;$$

2) $x = x(t,\alpha,\varphi)$ – решение (2.1), такое, что $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq \tau < H$, для всех $t \geq \alpha$.

Тогда имеется $c = c_0 \geq m$, при котором для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ существуют предельная совокупность $(f^*, W^*, \Omega) \in H^+(f, W)$ с $V_\infty^{-1}(t,c)$ и решение $x^*(t,0,\varphi^*)$ уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$ такие, что множество $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ и $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in R^+\} \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = const\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$.

**Теорема 2.2.** Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times B_H \to R^+$, такой, что:

$$\omega_1(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi), V(t,0) \equiv 0,$$

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, (t,\varphi) \in R^+ \times B_H;$$

2) для каждой предельной совокупности $(f^*, W^*)$ и каждого $c_0 \geq 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений предельного уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, кроме нулевого $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.

**Теорема 2.3.** Предположим, что:

1) существует ограниченный снизу непрерывный функционал $V : R^+ \times B_H \to [-m, +\infty)$, такой, что:

$$V(t,0) \equiv 0, \dot{V} \leq -W(t,\varphi) \leq 0$$

для всех $t \in R^+, \varphi \in B_H$, и принимающий в любой малой окрестности $x = 0$ отрицательные значения;

2) для каждого значения $c_0 < 0$ существуют предельная пара $(f^*, W^*)$ с множеством $V_\infty^{-1}(t,c)$, такие, что множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$.

Тогда решение (2.1) $x = 0$ неустойчиво.

В разделе 2.3 эти результаты развиваются для получения достаточных условий со знакопостоянными функционалами Ляпунова.

В разделе 2.4 излагаются результаты по решению задачи об устойчивости по части переменных. Значимость различных теорем поясняется на примерах.

Результаты второй главы представляют собой развитие и обобщение известных теорем Hale J.K., Kato J. [1] [2].

В третьей главе излагаются результаты применения теорем из глав 1 и 2 в решении задачи о стабилизации регулируемых систем с запаздыванием.

Постановка новых задач о стабилизации движений механических систем, отсутствие универсального способа построения функционалов Ляпунова приводит к необходимости модификации и обобщения известных ранее теорем о стабилизации, в частности в направлении модификации и обобщения теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости путем ослабления знакоопределенности функционала Ляпунова и его производной. В этой главе диссертации предлагаются такие модификации и обобщения.

В первом разделе третьей главы рассматривается задача о стабилизации систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями. Получены теоремы о стабилизации, в том числе частичной, с использованием функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Задача решается для уравнений запаздывающего типа с конечным и бесконечным запаздыванием. В этом разделе рассматривается также стабилизация систем, моделируемых функционально-дифференциальным уравнением второго порядка. Управление строится только на основе информации, полученной в предыдущие моменты времени, и зависит от координаты и скорости, измеренных в предыдущие моменты. Получены результаты для автономного случая, а также для случая переменного запаздывания и зависимости от времени коэффициентов в управлении. Рассмотрим управляемую механическую систему с одной степенью свободы, описываемую уравнением второго порядка:

$$\ddot{q}(t) = u,$$

где управление $u$ определяется равенством:

$$u = -b(t)q(t - r(t)) - a(t)\dot{q}(t - r(t)).$$

[1] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11–41.

[2] Kato J. Stability problem in functional differential equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 63–80.

Находятся условия на функции $a(t)$, $b(t)$ и $r(t)$ при которых положение равновесия такой системы равномерно асимптотически устойчиво.

Во втором разделе третьей главы рассматривается задача об оптимальной стабилизации. Предложено решать задачу об оптимальной стабилизации на основе знакоопределенных и знакопостоянных функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Получены теоремы об оптимальной стабилизации, в том числе частичной, с использованием функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Предложено решение задачи об оптимальной стабилизации систем со стационарными связями.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u). \tag{3.1}$$

Здесь $x_t \in C_H, x(t) \in R^n, u = u(t, x_t) \in U \subset R^m, u(t, 0) \equiv 0$, где $u$ есть управляющее воздействие, $U$ – некоторый класс допустимых управлений; $f(t, x_t, u) : R^+ \times C_H \times R^m \to R^n, f(t, 0, 0) \equiv 0$ есть непрерывное отображение, удовлетворяющее в $R^+ \times C_H \times R^m$ условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решений (3.1) от начальных данных.

Пусть $u = u^0(t, x_t) \in U$ есть некоторое выбранное управляющее воздействие, под действием которого уравнения управляемого движения (3.1) принимают вид:

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x_t), \quad f_0(t, x_t) = f(t, x_t, u^0(t, x_t)). \tag{3.2}$$

Предполагаем, что правая часть системы (3.2) удовлетворяет предположениям 1.1 и 1.2 главы 1. Тогда можно построить семейство предельных уравнений к (3.2):

$$\dot{x}(t) = f_0^*(t, x_t), \tag{3.3}$$

где $f_0^*(t, x_t) = \lim_{t_n \to +\infty} f_0[t_n + t, x_t]$.

**Определение 3.1.** Задача оптимальной стабилизации заключается в нахождении управляющего воздействия $u = u^0(t, x_t) \in U$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ уравнения (3.1) и такого, что по сравнению с любыми другими управляющими воздействиями $u = u(t, x_t) \in U$, решающими задачу о стабилизации движения $x = 0$ уравнения (3.1), для всех $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_{H_0}, 0 < H_0 < H$ выполняется неравенство:

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty} W(t, x_t^0, u^0(t, x_t^0))dt \leq \int\limits_{\alpha}^{+\infty} W(t, x_t, u(t, x_t))dt$$

при условиях $x_\alpha^0 = \varphi$.

**Теорема 3.1.** Предположим, что в некоторой окрестности $x = 0$ для системы (3.1) можно найти непрерывный функционал $V_0(t, \varphi)$ и управляющее воздействие $u^0(t, \varphi) \in U$, удовлетворяющие условиям:

1) $\omega_1(|\varphi(0)|) \leq V_0(t, \varphi) \leq \omega_2(|\varphi|), \forall (t, \varphi) \in R^+ \times C_H$;

2) имеет место тождество:

$$B[V_0, t, x_t, u^0(t, x_t)] = \dot{V}_0 + W(t, x_t, u^0) \equiv 0;$$

3) для каждой предельной совокупности $(f_0^*, W_0^*)$ и каждого $c_0 > 0$ множество $\{V_{0\infty}^{-1}(t, c) : c = c_0\} \bigcap \{W_0^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений предельного уравнения $\dot{x} = f_0^*(t, x_t)$, кроме нулевого $x = 0$;

4) для всех $(t, \varphi, u) \in R^+ \times C_H \times U$ справедливо неравенство:

$$B[V_0, t, x_t, u(t, x_t)] \geq 0.$$

Тогда управляющее воздействие $u^0(t, \varphi)$ решает задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения (3.1), при этом

$$V_0(\alpha, \varphi) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} W(t, x_t^0, u^0(t, x_t^0))dt = \min_{u \in U} \int\limits_{\alpha}^{+\infty} W(t, x_t, u(t, x_t))dt.$$

В третьем разделе получены теоремы о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления согласно следующему определению.

Пусть $W(t, x_t, u(t, x_t))$ есть некоторый непрерывный неотрицательный функционал переменных $(t, x_t, u) \in R^+ \times C_H \times R^m$, характеризующий качество переходного процесса.

**Определение 3.2.** Управляющее воздействие $u = u^0(t, x_t)$ называется стабилизирующим с гарантированной оценкой качества управления $P(t, x_t)$, если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ уравнения (3.1), и при этом на каждом управляемом движении $x^0(t), x^0_\alpha = \varphi$, справедливо неравенство:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} W(t, x^0_t(\alpha, \varphi), u^0(t, x^0_t(\alpha, \varphi)))dt \leq P(\alpha, \varphi). \tag{3.4}$$

Приведенная выше постановка задачи позволяет существенно расширить класс решаемых задач по сравнению с задачей об оптимальной стабилизации.

**Теорема 3.2.** Предположим, что для системы (3.1) с оценкой качества управления (3.4) можно найти непрерывный функционал $V_0(t, \varphi)$ и управляющее воздействие $u^0(t, \varphi) \in U$, удовлетворяющие условиям 1), 3) теоремы 3.1, а также:

2) имеет место неравенство:

$$B[V_0, t, x_t, u^0(t, x_t)] \leq 0.$$

Тогда управляющее воздействие $u^0(t, \varphi)$ решает задачу о стабилизации невозмущенного движения (3.1) с гарантированной оценкой качества управления $P(\alpha, \varphi) = V_0(\alpha, \varphi)$. При этом решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво с некоторой областью притяжения $C_{H_0}$.

На основе полученных результатов предложено решение задачи о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления систем со стационарными связями.

В четвертой главе на основе предыдущих результатов исследуются задачи об устойчивости и стабилизации движений управляемых механических систем с запаздыванием: стабилизация положения равновесия управляемых механических систем со стационарными, голономными идеальными связями; рассматриваются регуляторы с неограниченным запаздыванием; решается задача об устойчивости положения равновесия и стационарного движения эредитарной механической системы; решается задача о стабилизации неустойчивого положения относительного равновесия механической системы с голономными нестационарными связями; предложено решение задачи о стабилизации программного движения голономной механической системы; решаются задачи о стабилизации маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия, о стабилизации вращательного движения твердого тела, о стабилизации голономной системы по части переменных при ограниченности и неограниченности неконтролируемых координат, о стабилизации одноосной ориентации твердого тела, о стабилизации трехосной ориентации твердого тела в инерциальной системе координат.

В первом разделе исследуется стабилизация положения равновесия управляемых механических систем со стационарными, голономными идеальными связями, описываемых следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(t, q_t, \dot{q}_t), \tag{4.1}$$

где $Q(t, q_t, \dot{q}_t)$ – матрица-столбец размерности $n \times 1$ обобщенных сил, действующих на систему.

Показывается, что можно стабилизировать систему до равномерной асимптотической устойчивости на основе управлений, которые зависят только от координат системы:

$$Q_y(t, q_t) = -C(t)q(t) + \int\limits_{-h}^{0} F(t,s)q(t+s)ds, \tag{4.2}$$

$$Q_y(t, q_t) = -F_0(t)q(t) + C_0(t)q(t-h).$$

Рассматриваются также следующие управления:

$$Q_y(t, q_t, \dot{q}_t) = -C(t)q(t-h) - F(t)\dot{q}(t),$$

$$Q_y(t, q_t, \dot{q}) = -F(t)\dot{q}(t) - C(t)\int\limits_{-h}^{0} q(t+s)ds,$$

$$Q_y(t, \dot{q}_t, q) = -F(t)q(t) - \int\limits_{-h}^{0} C(t)\dot{q}(t+s)ds,$$

$$Q_y(t, q_t, \dot{q}_t) = -Cq(t-h) - D\dot{q}(t-h).$$

Найдены условия, при которых указанные управления стабилизируют систему до равномерной асимптотической устойчивости. Например, получена следующая теорема.

**Теорема 4.1**. Пусть:

1) матрицы $C(t)$ и $F(t,s)$ являются ограниченными симметричными матрицами размерностей $n \times n$ при $t \in R^+$, $s \in [-h, 0]$;

2) матрица $M(t) = C(t) - \int_{-h}^{0} F(t,s)ds$ является положительно определенной матрицей, ограниченной и равномерно непрерывной при $t \in R^+$;

3) матрица $F(t,s)$ непрерывно дифференцируема по $t$ и $s$, равномерно непрерывная при $t \in R^+$,

$$F(t,s) \geq 0, \frac{\partial F(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial F(t,s)}{\partial t} \geq a_0 E, a_0 = const > 0,$$

$$\dot{M}(t) \leq 0, \quad t \in R^+, \quad s \in [-h, 0].$$

Тогда управление вида (4.2) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (4.1).

Во втором разделе рассматриваются регуляторы с неограниченным запаздыванием, когда управление имеет вид:

$$Q_y(t, q_t) = -C(t)q(t) + \int_{0}^{t} F(t-s)q(s)ds. \tag{4.3}$$

Предполагая, что интеграл $\int_{0}^{+\infty} F(s)ds$ сходится и полагая:

$$M(t) = C(t) - \int_{0}^{t} F(s)ds,$$

имеем следующий результат.

**Теорема 4.2**. Пусть:

1) матрицы $C$ и $F$ являются симметричными размерностей $n \times n$;

2) матрица $M$ является положительно определенной матрицей и равномерно непрерывной при $t \in R^+$;

3) матрица $F(s)$ непрерывно дифференцируема, $F(s) \geq 0$, $\dot{F}(s) \leq 0$;

4) $\dot{C}(t) \leq F(t)$;

Тогда управление вида (4.3) есть стабилизирующее управление, при этом положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (4.1) асимптотически устойчиво.

В первом и во втором разделах выводятся также условия, при которых регуляторами обеспечивается асимптотическая устойчивость по части переменных.

В третьем разделе исследуется устойчивость движений эредитарных механических систем. Рассматривается механическая система с голономными стационарными связями, определяемая обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем первые $m$ координат системы, $(q_1, \ldots, q_m)^T = q^1$ $(m < n)$ позиционные, остальные $(n-m)$ координат $(q_{m+1}, \ldots, q_n)^T = q^2$ — циклические, и описываемая уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \int\limits_0^t \Phi(t-s) q(s) ds + Q, \tag{4.4}$$

где $T$ — кинетическая энергия, $\Pi = \Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, $\partial T/\partial q^2 = \partial \Pi/\partial q^2 = 0$, при этом $\Phi \in R^{m\times m}$ — симметричная матрица, $m < n$, $\Phi' = \Phi \geq 0$ ($\int_0^\infty \Phi(s)ds$ сходится), выражающая свойство эредитарности или влияния предыстории системы (например, ее вязкоупругие свойства), $Q = Q(q, \dot{q})$ — обобщенные гироскопические и диссипативные силы. Система будет иметь циклические интегралы $\partial T/\partial \dot{q}^2 = c$, и для нее можно определить приведенную потенциальную энергию системы.

Пусть $\partial W/\partial q^1 = 0$ при $q^1 = 0$ и $c = c_0$, так, что система (4.4) имеет стационарное движение:

$$\dot{q}^1 = 0, \quad q^1 = 0, \quad \dot{q}^2 = \dot{q}^2_0 = const, \quad q^2(t) = q^2_0 + \dot{q}^2_0(t - t_0), \tag{4.5}$$

отвечающее значению $c = c_0$ циклических постоянных.

**Теорема 4.3.** Предположим, что:

1) измененная с учетом свойства эредитарности приведенная потенциальная энергия системы:

$$S(q^1, c) = W(q^1, c) - \frac{1}{2}(q^1)^T \left(\int\limits_0^\infty \Phi(s) ds\right) q^1$$

имеет изолированный минимум в точке $q^1 = 0$ при $c = c_0$ и $S(q^1, c) \geq \omega(|q^1|)$;

2) матричная функция $\Phi$, такова, что $\dot{\Phi}(s) \leq 0$.

Тогда стационарное движение (4.5) устойчиво по $(\dot{q}^1, q^1, \dot{q}^2)$ и является притягивающим для возмущенных движений с циклическими постоянными $c = c_0$, а также каждое возмущенное движение из области устойчивости (4.5) неограниченно приближается при $t_n \to +\infty$ к одному из предельных стационарных движений, отвечающему значению $c = c_1 = c_0 + \delta_c$.

В качестве примера исследуется устойчивость стационарных движений физического маятника.

В четвертом разделе решается задача о стабилизации неустойчивого положения относительного равновесия механической системы с голономными нестационарными связями. Решение задачи предлагается на основе регулятора, зависящего только от координат системы.

В пятом разделе предложено решение задачи о стабилизации программного движения голономной механической системы. Для этого исходная система заменой сводится к новой, так, что изучение поведения решений исходной системы в окрестности заданного программного движения сводится к изучению нулевого положения равновесия нестационарной механической системы.

В шестом разделе рассматривается в линейной постановке задача о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Уравнения линейного приближения можно привести к виду:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = u, \tag{4.6}$$

где $x_1 = \varphi$ – угол отклонения маятника от вертикали, $x_2 = \dot{\varphi}$, $u$ – управляющий момент, приложенный к маятнику.

Допустим, что в системе управления маятником координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ определяются с запаздыванием $\tau = \tau(t)$, $0 \le \tau(t) \le h = const$, $\tau(t)$ есть равномерно непрерывная по $t \in R^+$ функция.

Управляющий момент $u$ определяется посредством равенства:

$$u = -a(x_1((t - \tau(t)) + x_2(t - \tau(t))) - bx_3(t - \tau(t)). \tag{4.7}$$

На основе знакопостоянного функционала со знакопостоянной производной определяются условия на значения $a$, $b$ и $\tau$, при которых управление $u$ будет стабилизирующим.

В седьмом разделе рассматриваются задачи о стабилизации движений твердого тела: о стабилизации вращательного движения твердого тела, о стабилизации одноосной ориентации твердого тела, о стабилизации трехосной ориентации твердого тела в инерциальной системе координат. Решение достигается на основе знакопостоянных и знакоопределенных функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной.

Для тела с неподвижной точкой $O$ моменты инерции относительно главных осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ обозначим через $A, B$ и $C$, а $p, q, r$ – проекции угловой скорости на эти оси. Предположим, что под действием момента

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = M_z(t)$$

тело может совершать нестационарное вращательное движение вида:

$$p = q = 0, \qquad r = r_0(t), |r_0(t)| \leq R_0 = const > 0. \tag{4.8}$$

Показано, что решение задачи о стабилизации движения (4.8) достигается на основе моментов:

$$\begin{aligned} M_1 &= -b_1 x_1(t - \tau_1(t)), \\ M_2 &= -b_1 x_2(t - \tau_2(t)), \\ M_3 &= -b_2 x_3(t - \tau_3(t)), \end{aligned} \tag{4.9}$$

причем вращение (4.8) вокруг наибольшей и наименьшей осей инерции под действием моментов (4.9) с коэффициентами усиления, удовлетворяющих определенным условиям, равномерно асимптотически устойчиво.

Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки допускают стационарное вращательное движение вокруг главной оси (примем ее за ось $Oz$), неустойчивое, если эта ось средняя, $B > C > A$. Рассматривается задача о стабилизации такого движения, а именно, движения вокруг оси $Oz$, $p = q = 0$, $r = r_0 = const > 0$. Уравнения возмущенного движения под действием управляющих воздействий в линейном приближении могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{(B-C)}{A} r_0 x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{(C-A)}{B} r_0 x_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3. \end{cases} \tag{4.10}$$

Задача о стабилизации положения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ этой системы решается управляющими воздействиями

$$u_1 = -k_1 x_1(t-\tau(t)), \quad u_2 = -k_1 x_2(t-\tau(t)), \quad u_3 = -k_2 x_3(t-\tau(t)), \tag{4.11}$$

где $\tau(t)$, $0 \le \tau(t) \le h$, есть запаздывание в системе управления, $k_1$ и $k_2$ – коэффициенты усиления, выбираемые из некоторых условий. Эти условия также определяются на основе знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

В восьмом разделе решается задача о стабилизации управляемой механической системы с голономными стационарными связями по части переменных при допущении неограниченности неконотролируемых координат.

Результаты этой главы развивают некоторые результаты работ Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова [1], И.М. Ананьевского и В.Б. Колмановского [2].

В приложении проводится развитие методов, полученных в первой главе, в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа (НФДУ).

Рассматривается НФДУ следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - G(t, x_t)\right] = F(t, x_t), \tag{П.1}$$

где $F : \Omega \to R^n$, $G : \Omega \to R^n$ – заданные непрерывные функции, $\Omega \subset R^+ \times C_{[-h,0]}$ открыто.

В первом разделе приводятся теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений НФДУ от начальных данных.

В разделе 2 рассмотрена задача о локализации положительного предельного множества автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с конечным запаздыванием на основе функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную [3].

[1] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. – 1963. – № 6. – С. 3–15.

[2] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // АиТ. – 1989. – № 9. С. 34–42.

[3] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

В третьем разделе рассматривается неавтономное НФДУ, проводится построение предельных систем и выводится свойство квазиинвариантности положительного предельного множества решения этого уравнения. В силу того, что в (П.1) содержатся значения производных функционала, построение предельных систем для НФДУ отлично от построения для уравнений запаздывающего типа.

**Определение П.1.** Компактной оболочкой $H^+(F, G)$ функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$, определенных на $R^+ \times C_H$, называется множество совокупностей $(F^*, G^*, \Lambda)$, где $F^*, G^* \in C(\Lambda, R^n), \Lambda = R^+ \times \Lambda_1, \Lambda_1 \subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n \to +\infty, n \to \infty$, для которой $\{F(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t, \varphi)$, а $\{G(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t, \varphi)$ на каждом множестве $[0, n] \times K$, где $n = 1, 2...$, множество $K$ – компакт из $\Lambda_1$. Функции $F^*$ и $G^*$: $R^+ \times \Lambda_1 \to R^n$ называются предельными к функциям $F$ и $G$.

Для каждой $(F^*, G^*, \Lambda) \in H^+(F, G)$ определяется предельное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - G^*(t, x_t)\right] = F^*(t, x_t). \qquad (\text{П}.2)$$

В разделе 4 получена теорема о локализации положительного предельного множества решения (П.1).

Пусть $V(t, \varphi, Z(t, \varphi)) : R^+ \times C_H \to R(Z(t, \varphi) = \varphi(0) - G(t, \varphi)$ – ядро уравнения (П.1)) есть некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов для всех $\varphi \in C_H$ и $t \in R^+$ и такой, что верхняя правосторонняя производная $\dot{V}(t, \varphi)$ вдоль решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ существует.

Допустим, что для производной $\dot{V}(t, \varphi)$ имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, \forall (t, \varphi) \in R^+ \times C_H,$$

где непрерывная функция $W = W(t, \varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, $K$ – компакт из $C_H$.

Вводится определение $H^+(F, G, W, \Lambda)$, аналогичное определению П.1.

В пятом разделе получены теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной, в предположении, что $G(t, 0) \equiv 0$ и $F(t, 0) \equiv 0$.

В разделе 6 исследуется равномерная асимптотическая устойчивость неавтономного уравнения нейтрального типа в предположении свойства равностепенной непрерывности положительного предельного множества и получена следующая теорема.

**Теорема П.1.** Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t, x_t)) : R^+ \times C_H \to R$, производная которого в силу системы (П.1) существует, при этом:

$$\omega_1(|Z(t, x_t)|) \leq V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega_2(\|x_t\|);$$
$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t, \varphi) \leq 0;$$

2) для каждой предельной совокупности $(F^*, G^*, W^*, \Lambda)$ множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержит из всех решений предельного уравнения $\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t, y_t)] = F^*(t, y_t)$ только тривиальное $y = 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (П.1) равномерно асимптотически устойчиво.

В разделе 7 исследуется задача об устойчивости и асимптотической устойчивости НФДУ на основе знакопостоянного по ядру функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

**Теорема П.2.** Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t, x_t))$, такой, что:

$$0 \leq V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega_2(\|x_t\|), V(t, 0, Z(t, 0)) \equiv 0,$$
$$\dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq 0, \forall (t, \varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $V^{-1}(\infty, 0)$ равномерно по $\{\frac{d}{dt}[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$.

Тогда тривиальное решение (П.1) равномерно устойчиво.

В разделе 8 исследуется задача об устойчивости НФДУ по части переменных.

Полученные результаты разделов 3–8 приложения диссертации развивают результаты работ В.Б. Колмановского, В.Р. Носова [1], Дж. Хейла [2], А.С. Андреева [3] по исследованию устойчивости

[1]Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

[2]Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

[3]Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. – Ульяновск: Ульяновский гос. университет, 2005. – 328 с.

функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. Они могут применяться, например, в исследовании задачи об устойчивости неустановившегося движения тела, обтекаемого жидкостью.

Таким образом, в диссертации представлены новые методы исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений в приложении к исследованию задач об устойчивости и стабилизации движений неавтономных механических систем.

**Заключение**

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Выводятся новые методы исследования устойчивости, асимптотической устойчивости по всем и части переменных для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с конечным и бесконечным запаздываниями, обосновывающие широкое применение знакопостоянных функционалов Ляпунова [1–11, 13–16, 18, 19, 23].

2. Выводятся новые методы решения задач о стабилизации, в том числе, оптимальной и с гарантированной оценкой качества, регулируемых систем, управляемых регуляторами с переменным и бесконечным запаздыванием. В основе этих методов лежит применение функционалов Ляпунова, имеющих знакопостоянную производную [ 4–12, 17, 19–22].

3. Решаются задачи об устойчивости положения равновесия и стационарного движения эредитарной механической системы; задачи о стабилизации по всем и части переменных управляемой голономной механической системы с учетом запаздывания в структуре управления, в том числе, задачи о стабилизации вращательного движения твердого тела [1, 3, 4, 5–7, 9, 24–26].

**По теме диссертации опубликованы следующие работы:**

1. Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения // ПММ. – 1999. – Т. 63. – Вып. 1. – С. 3–12.

2. Андреев А.С., Павликов С.В. К методу функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки. – 2000. – Т. 68. – Вып. 3. – С. 323–331.

3. Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы

Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // МТТ. – 2004. – Вып. 34. – С. 112–118.

4. Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием // МТТ. – 2005. – Вып. 35. – С. 212–216.

5. Павликов С.В. О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 412. – № 2. – С. 1–3.

6. Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // ПММ. – 2007. – Т. 71.– Вып. 3. – С. 377–388.

7. Павликов С.В. О стабилизации по части переменных управляемой механической системы с запаздывающей обратной связью // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 2(52). – С. 115–123.

8. Павликов С.В. К задаче о стабилизации управляемых механических систем // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 9. – С.16–27.

9. Павликов С.В. Об устойчивости движений эредитарных систем с бесконечным запаздыванием // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 416. – № 2. – С. 1-3.

10. Павликов С.В. Метод знакопостоянных функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Вестник ОГУ. – 2007. – № 3. – С. 158-162.

11. Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости. – Набережные Челны: Изд-во Института управления, 2006. – 264 с.

12. Павликов С.В. Об управляемости и стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 10. – № 1. – С. 201.

13. Андреев А.С., Павликов С.В. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова // Труды Средневолжского математического общества. – 1999. – Т. 2(1). – С. 74–75.

14. Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета

"Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. – Вып. 1. – С. 46–56.

15. Павликов С.В. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Ученые записки УлГУ "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. – Вып. 2. – С. 32–33.

16. Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Ученые записки УлГУ "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2002. – Вып. 2 (12). – С. 30–39.

17. Павликов С.В. О стабилизации управляемых механических систем с обратной связью с запаздыванием // Ученые записки УлГУ "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2002. – Вып. 2 (12). – С. 40–48.

18. Павликов С.В. Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных // Ученые записки УлГУ "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2003. – Вып. 1 (13). – С. 63–74.

19. Павликов С.В. О стабилизации систем, моделируемых функционально-дифференциальными уравнениями второго порядка // Социально-экономические и технические системы. – 2006. – 1(17). – Режим доступа: http://kampi.ru/sets/.

20. Павликов С.В. О стабилизации положения равновесия управляемых механических систем // Социально-экономические и технические системы. – 2006. – 1(17). – Режим доступа: http://kampi.ru/sets/.

21. Павликов С.В. К задаче об оптимальной стабилизации // Социально-экономические и технические системы. – 2006. – 2(18). – Режим доступа: http://kampi.ru/sets/.

22. Павликов С.В. К задаче о стабилизации с гарантированной оценкой качества // Социально-экономические и технические системы. – 2006. – 2(18). – Режим доступа: http://kampi.ru/sets/.

23. Павликов С.В. К задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием // Ученые

записки УлГУ "Фундаментальные проблемы математики и механики". – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2006. – Вып. 1 (13). – С. 28–42.

24. Павликов С.В. О стабилизации движений механических систем с запаздывающим управлением // Девятый Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. – 2006. – С. 93.

25. Павликов С.В. О стабилизации движений механических систем управлением с запаздыванием // Девятый Международный семинар им. Е. С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления": Тезисы докладов. – М., – 2006. – С. 198.

26. Павликов С.В. О моделировании устойчивости механических систем с запаздывающим управлением // International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigat: Thesis of conference reports. – Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 2007. – С. 225.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты № 96-01-01067, 02-01-06162, 02-01-00877, 05-01-00765) и НШ—6667.2006.1.