Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.9

Голенищева-Кутузова Татьяна Игоревна

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Ландо Сергей Константинович
доктор физико-математических наук
Немировский Стефан Юрьевич

Ведущая организация: Санкт-Петербургский
Государственный университет.

Защита состоится “ 11 ” апреля 2008 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, РФ, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “ 11 ” марта 2008 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Настоящая диссертация посвящена исследованию предельного поведения динамических систем с вещественным и комплексным временем.

Исследование предельного поведения динамических систем представляет из себя не только сложную и красивую теоретическую, но и важную практическую задачу.

Существенный вклад в развитие данной области внесли такие ведущие отечественные и зарубежные математики, как А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. Н. Колмогоров, Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Д. Биркгофф, А. Я. Хинчин, И. Г. Петровский, Е. М. Ландис, В. И. Арнольд, Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, С. Смейл и многие другие.

Одним из направлений исследований в этой области является изучение временных средних для типичной точки и типичного меры.

Главы 1 и 2 диссертации посвящены изучению предельного поведения динамических систем с вещественным непрерывным временем, а именно, вопросу существования временны́х средних для типичной точки и для типичной меры.

По-видимому, первыми из утверждений, описывающих временные средние индивидуальных точек и мер, следует считать теорему Биркгофа-Хинчина, утверждающую, что предел временных средних для почти любой точки по эргодической инвариантной мере совпадает с этой мерой, и теорему Крылова-Боголюбова, которая гласит, что любая предельная точка временных средних любой меры является инвариантной мерой. В случае наличия абсолютно непрерывной инвариантной меры (скажем, в случае гамильтоновой динамики или для растягивающего отображения) эти же утверждения описывают и пределы временны́х средних типичных в смысле меры Лебега точек и временны́х средних абсолютно непрерывных мер.

Однако, часто динамическая система априори не обладает инвариантной мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Тем не менее, из физических соображений для таких систем естественным является именно постановка вопроса про асимптотическое поведение типичной в смысле меры Лебега точки.

Исследования этого вопроса были начаты Я. Г. Синаем [1], Д. Рюэллем [2] и Р. Боуэном [3], и положили начало понятию SRB-меры. Грубо говоря, SRB-меры — это инвариантные меры, наблюдаемые в продолжающемся долгое время реальном физическом эксперименте.

Существует несколько различных (и не эквивалентных!) определений SRB-меры, из которых мы упомянем два. *Естественной* называется мера, к которой сходятся временные средние любой абсолютно непрерывной (относительно лебеговой) меры. *Наблюдаемой* называется мера, в соответствии с которой распределены траектории почти всех (в смысле меры Лебега) точек. Точные определения могут быть найдены, к примеру, в обзоре М. Бланка и Л. Бунимовича [4] (см. также работы М. Мисуревича [5], Е. Жарвенпаа и Т. Толонен [6], Л.-С. Янга [7]). Там же показано, что наблюдаемая мера одновременно оказывается и естественной, однако обратное, вообще говоря, неверно (см. работы М. Мисуревича и А. Здуник [8], а также работу В. А. Клепцына [9]).

Пример Боуэна был приведен в работе А. Гаундердорфера [10] как первый пример динамической системы, для которой отсутствуют временные средние индивидуальных точек — иными словами, как пример отсутствия наблюдаемой SRB-меры. Однако отсюда, как уже было сказано выше, не следует, что не сходится последовательность временны́х средних меры Лебега, иными словами, что отсутствуют естественные SRB-меры. Глава

[1] Я. Г. Синай. Гиббсовские меры в эргодической теории. *Успехи Мат. Наук*, **27** (1972), вып. 4, с. 21–69.

[2] D. Ruelle. A measure associated with Axiom A attractors. *Amer. J. Math.*, **98** (1976), pp. 619–654.

[3] R. Bowen. Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. *Springer Lecture Notes in Math.* **470** (1975).

[4] M. Blank, L. Bunimovich. Multicomponent dynamical systems: SRB measures and phase transitions. *Nonlinearity*, **16** (2003), pp. 387–401.

[5] M. Misiurewicz. Ergodic natural measures, preprint (2004).

[6] E. Järvenpää, T. Tolonen. Relations between natural and observable measures. *Nonlinearity*, **18** (2005), pp. 897–912.

[7] L.-S. Young. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? *J. Stat. Phys.* **108** (2002), pp. 733–754.

[8] M. Misiurewicz, A. Zdunik. Convergence of images of certain measures. *Statistical physics and dynamical systems (Köszeg, 1984)*, pp. 203–219, *Progr. Phys.* **10**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985.

[9] V. Kleptsyn. An example of non-coincidence of minimal and statistical attractors, *Ergodic Theory Dynam. Systems*,**26** (2006), pp. 759-768.

[10] A. Gaunderdorfer, Time averages for heteroclinic attractors, *SIAM J. Math. Anal.* **52** (1992), 1476–1489.

1 настоящей работы как раз и доказывает это последнее утверждение: в примере Боуэна естественной меры также нет.

Этот результат, как и результат главы 2, является продвижением в направлении обозначенном противоположными по духу гипотезами Д. Рюэлля и Ж. Палиса.

Гипотеза Д. Рюэлля говорит, что существует открытая область в пространстве гладких динамических систем, для типичной системы из которой для почти всех точек не существует временных средних.

Гипотеза Ж. Палиса утверждает, что для типичной гладкой системы существуют временные средние почти всех (в смысле меры Лебега) начальных точек.

(Впрочем, следует отметить, что эти две гипотезы не являются формально противоречащими друг другу из-за различных использованных определений типичности: Д. Рюэлль опирается на *топологическую* — принадлежность остаточному множеству,— а Ж. Палис на *метрическую* — множество параметров полной меры.)

Пример Боуэна имеет коразмерность 2 в пространстве векторных полей: для него требуется наличие двух сепаратрисных связок, поэтому в типичном двупараметрическом семействе ему соответствуют изолированные значения параметров.

Исследуя векторные поля на торе, оказывается, можно слегка уменьшить коразмерность такого примера.

Для этого мы переходим к рассмотрению потоков Черри. Поток Черри был введён в работах Т. Черри [11] [12] как пример потока на двумерной поверхности с квазиминимальным множеством канторового типа. А. Пуанкаре [13] поставил вопрос о том, может ли гладкое векторное поле на двумерной поверхности иметь минимальное множество канторового типа, и отрицательный ответ на этот вопрос был получен А. Данжуа [14]. Соответственно, потоки Черри остаются наилучшим приближением к тому, что инте-

[11] T. Cherry. Analytic quasi-periodic discontinuous type on a torus, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **44** (1938), no. 2, pp. 175–215.

[12] T. Cherry. Topological properties of solutions of ordinary differential equations, *Amer. J. Math*, **59** (1937), pp. 957–982.

[13] H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles, I, II, III, IV. *J. Math. Pure et Appl.*, **2** (1881, 82, 85, 86), pp. 151–217.

[14] A. Denjoy. Sur les courbes définies par des équation différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pure et Appl.*, **11** (1932), pp. 333–375.

ресовало Пуанкаре.

Исследование потоков на двумерных поверхностях затем было продолжено многими авторами, и к настоящему моменту эта область хорошо исследована. Обзор известных результатов о классификации таких потоков приведен в обзоре С. Х. Арансона и В. З. Гринеса [15].

В главе 2, рассматривая потоки Черри с двумя ячейками, мы строим пример коразмерности $2-0$ систем с отсутствием временных средних типичных точек и мер. Смысл термина "коразмерность $2-0$" объясняется ниже.

Глава 3 посвящена изучению динамических систем с комплексным временем на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. В этой главе мы рассматриваем векторные поля:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases} \tag{0.1}$$

где $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, и функции f и g не имеют общей гиперповерхности нулей. Они задают слоение с особенностями комплексной плоскости на аналитические кривые.

Исследование полиномиальных векторных полей с комплексным временем фиксированной степени восходит к 16-ой проблеме Гильберта и было начато в 1950-70-ых годах в работах, И. Г. Петровского–Е. М. Ландиса, М. Г. Худай-Веренова [16], Ю. С. Ильяшенко [17]. Одна из основных теорем, показывающих, что поведение таких систем в комплексной области нетривиально и противоречит вещественной интуиции, утверждает, что типичное полиномиальное слоение степени $n > 2$ плоскости $\mathbb{C}^2$ минимально (т.е. все неособые слои плотны на всей плоскости) и эргодично (т.е. любое инвариантное измеримое множество будет либо полной, либо нулевой меры Лебега).

Эта теорема доказывается в упомянутых выше работах М. Г. Худай-Веренова и

[15] С. Х. Арансон, В. З. Гринес. Топологическая классификация потоков на замкнутых многообразиях, *Успехи Мат. Наук*, **41** (1986), no. 1 (247), с. 149–169.

[16] M.G. Khudai-Verenov, A property of the solutions of a differential equation (Russian), *Mat. Sb.* **56** (1962), pp. 301-308.

[17] Ильяшенко Ю.С. Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной плоскости. Труды сем. им. И.Г. Петровского, Вып. 4, 1978, стр. 83-136.

Ю. С. Ильяшенко, а также в работах А. А. Щербакова [18] и И. Накаи [19], в которых шаг за шагом ослабляются требования типичности. В главе 3 доказывается аналог этой теоремы для случая аналитических слоений, при этом типичность понимается в топологическом смысле, а именно, свойство называется типичным, если оно выполнено для остаточного множества в пространстве векторных полей (снабженных топологией равномерной сходимости на компактах).

В упомянутых выше работах Худай-Веренова, Ильяшенко и Накаи доказывается также свойство абсолютной негрубости типичного полиномиального слоения. Вопрос о том, имеет ли место аналогичное свойство для аналитических слоений (и если да, то в какой формулировке), остается открытым.

Отдельный лист полиномиального слоения представляет собой риманову поверхность. Как ни странно, о ее топологии известно довольно немного. В частности, остается открытой гипотеза, сформулированная Д. В. Аносовым в 1963 г. на семинаре В. И. Арнольда: в классе полиномиальных слоений фиксированной степени плоскости $\mathbb{C}^2$ тождественный цикл может быть разрушен малым возмущением.

И тем более остается открытой гипотеза о том, что для типичного полиномиального слоения фиксированной все слои, кроме счетного числа, односвязны.

С другой стороны, имеется результат Э. Жиса о топологии слоев, типичных в смысле *гармонической* меры. Оказывается, что типичный в этом смысле слой может быть лишь одного из семи топологических типов. Но подобный вопрос для типичного в смысле меры Лебега слоя остается открытым.

В отличие от полиномиального случая, Т. С. Фирсовой [20] удалось описать топологию слоев для аналитических слоений: у типичного аналитического слоения комплексной плоскости все слои кроме не более, чем счетного числа — диски, а остальные слои — цилиндры.

[18] A.A. Shcherbakov. Dynamics of local grous of conformal mappings and geneic properties of differential equations on $\mathbb{C}^2$, *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Ross. Akad. Nauk* **254**, (2006) [*Proc. Steklov Inst. Math.* **254**,(2006), pp. 103-120].

[19] I. Nakai. Separatrices for nonsolvable dynamics on $\mathbb{C}, 0$, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*,**44** (1994), no. 2, pp. 569-599.

[20] Фирсова Т.С. Топология аналитических слоений в $\mathbb{C}^2$. Свойство Купки-Смейла, *Труды МИАН*, 2006, **254**, 162–180.

В главе 3 мы показываем, что у типичного аналитического слоения ровно счетное число топологических цилиндров. В частности, из этого следует, что у типичного аналитического слоения комплексной плоскости есть счетное число гомологически независимых предельных циклов.

Заметим также, что уже для слоений $\mathbb{C}P^2$ (как и в $\mathbb{C}P^n$) фиксированной (геометрической) степени многие естественные вопросы остаются открытыми. Так, в работе Ф. Лоре и Дж. Ребело [21] было доказано существование открытой области, в которой типичное слоение минимально и эргодично. Однако неизвестно, являются ли минимальность и эргодичность глобально типичными.

Цель работы.

Целью настоящей работы является исследование предельного поведения динамических систем с вещественным и комплексным временем: исследование существования временных средних для типичной точки и типичной меры в динамических системах с вещественным непрерывным временем, изучение предельного поведения динамических систем с комплексным временем, а именно,исследование типичных свойств аналитических векторных полей с комплексным временем и заданных ими слоений.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Исследованы вопросы существования временных средних типичной меры в примере Боуэна. Доказано, что для типичной меры ее временные средние не имеют предела.
- Построен пример динамической системы на торе коразмерности $2-0$ (т.е. такие динамические системы встречаются в типичном двупараметрическом семействе “канторовым образом”), для которой нет пределов временных средних, как для типичной точки, так и для типичной меры. В основе данного примера лежит ячейка Черри.

[21] F. Loray, J. Rebelo Minimal, rigid foliations by curves on $\mathbb{C}P^n$, *J. Eur. Math. Soc.* **5** (2003), no. 2, pp. 147–201.

- Исследованы аналитические слоения комплексной плоскости. Доказано, что типичное (в топологическом смысле) аналитическое слоение минимально и эргодично. Также доказано, что у типичного аналитического слоения есть счетное число гомологически независимых предельных циклов.

Методы исследования.

В работе используются методы теории динамических систем, эргодической теории, теории дифференциальных уравнений с комплексным временем, теории аналитических и полиномиальных слоений комплексной плоскости.

Для исследования сходимости временных средних мер применяются методы теории меры и функционального анализа. В главе 3, при исследовании комплексных слоений, применяются методы комплексного анализа и алгебраической геометрии.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны в теории динамических систем с вещественным и комплексным временем, а также в теории комплексных аналитических слоений.

Апробация работы.

Основные результаты настоящей диссертации докладывались:

- на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 2002–2007 гг.),
- на семинаре отдела дифференциальных уравнений Математического института РАН под руководством академика Д.В.Аносова и Ю.С.Ильяшенко (2005 г.)
- на семинаре Корнельского университета (США) под руководством проф. Дж.Гугенхеймера (John Guckenheimer) (ноябрь 2004 г.),
- на семинаре по алгебре и геометрии Женевского университета (руководители — проф. Г. Аржанцева, проф. P. De la Harpe)(Женева, Швейцария, ноябрь 2006 г.),
- на семинаре по аналитической геометрии Реннского Университета (руководитель — проф. L.Pirio)(Ренн, Франция, ноябрь 2004 г.),

- на семинаре Universida Autonomia Metropolitana (руководители проф. L. Ortiz-Bombadila, проф. E.Rosalez-Gonzales)(Mexico, Мексика, ноябрь 2007 г.),
- на международной конференции “Геометрия природ” (Казань, август 2004 г.),
- на международной конференции Петровского (21-я сессия) (Москва, май 2004 г.)
- на международной конференции “Lyapunov exponents and related topics in dynamics and geometry” (Москва, январь 2005 г.),
- на 10-м международном топологическом конгрессе (Прага, 2006 г.)

Публикации.

Основное содержание работы опубликовано; список из двух работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, в совокупности включающих в себя 16 параграфов, и списка литературы, включающего 52 наименования. Полный объём диссертации 73 страницы.

Основное содержание диссертации

Настоящая диссертация посвящена исследованию предельного поведения динамических систем с вещественным и комплексным временем.

Главы 1 и 2 посвящены изучению предельного поведения динамических систем с вещественным непрерывным временем, а именно, вопросу существования временны́х средних для типичной точки и для типичной меры.

В первой главе исследуется поведение временных средних меры в примере Боуэна: векторном поле на плоскости с двумя седлами, связанными двумя сепаратрисными связками. В работе приведен явный критерий сходимости усредненных мер и описано множество их частичных пределов. Как следствие, для типичной начальной меры её временные средние не сходятся.

Напомним описание примера Боуэна.

Рассмотрим на плоскости векторное поле с двумя седлами O_1 и O_2, такими, что одна исходящая сепаратриса каждого из них совпадает с входящей сепаратрисой другого. Обозначим собственные значения сёдел через $-\mu_1 < 0$ и $\lambda_1 > 0$ для первого седла и $-\mu_2 < 0$ и $\lambda_2 > 0$ для второго. Предположим, что $\Lambda = \dfrac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2} > 1$. Это условие означает, что все траектории, достаточно близкие к "сепаратрисному двуугольнику" (объединению сепаратрис и сёдел), будут к нему приближаться. Такая динамическая система называется *примером Боуэна* или *гетероклиническим аттрактором.*

Напомним, как устроена процедура Крылова–Боголюбова — процедура нахождения инвариантной меры у динамической системы на компактном множестве. Пусть g^t — фазовый (полу)поток, а m — мера. Пусть g^t_*m — сдвиг меры m под действием фазового потока g^t за время t, то есть $g^t_*m(U) = m(\{x \mid g_t(x) \in U\})$. Рассмотрим временны́е средние m_t меры m:

$$m_t = \frac{1}{t}\int_0^t g^\tau_* m \, d\tau$$

Известно, что если при $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} m_{t_n}$, то полученная предельная мера будет инвариантна. Процедура Крылова-Боголюбова и состоит во взятии любого частичного предела мер m_t при $t \to \infty$.

Рассмотрим меры, абсолютно непрерывные относительно лебеговой, с носителем внутри "сепаратрисного двуугольника". Будем выбирать начальную меру m из этого класса. Мы рассматриваем следующую задачу: *выяснить, как устроено множество частичных пределов мер m_t при $t \to \infty$.* В частности, выяснить, существует ли предел m_t при $t \to \infty$.

В первой главе получено необходимое и достаточное условие на меру, для которой в процедуре Крылова-Боголюбова имеет место предел, а в случае, когда предела нет, описано множество частичных пределов.

Отметим, что носитель любой инвариантной меры в примере Боуэна может состоять только из двух точек — седел O_1 и O_2. Поэтому единственное, от чего зависит существование предела, это стабилизируется ли доля меры, сосредоточенная около первого (и, соответственно, около второго) седла.

Назовём меру m в примере Боуэна *допустимой*, если мера m абсолютно непрерывна относительно лебеговой и её носитель лежит внутри Ω. Основным результатом главы 1 является следующая теорема:

Теорема 1.2.1. *В C^3-гладком примере Боуэна для типичной допустимой меры m усреднённые меры m_t не будут иметь предела при $t \to \infty$, а множеством частичных пределов будет отрезок в пространстве мер.*

Типичность в данном случае означает, что условие выполнено вне подпространства бесконечной коразмерности в пространстве мер.

Эта теорема вытекает из явного описания предельных точек семейства m_t при $t \to \infty$, полученного в главе 1.

Пример Боуэна имеет коразмерность 2 в пространстве векторных полей: для него требуется наличие двух сепаратрисных связок, поэтому в типичном двупараметрическом семействе ему соответствуют изолированные значения параметров.

Исследуя векторные поля на торе, оказывается, можно слегка уменьшить коразмерность такого примера. Для этого, в главе 2, мы переходим к рассмотрению потоков Черри на двумерном торе.

Основным результатом главы 2 является построение, с использованием потоков Черри с двумя ячейками, примера коразмерности $2-0$ систем с отсутствием временных средних типичных точек и мер. "Коразмерность $2-0$" здесь означает, что в типичном двупараметрическом семействе этому примеру соответствует Канторово множество параметров. Из явного описания множества параметров, для которых нет предела временных средних типичной точки и типичной меры, следуют основные результаты главы 2:

Следствие 2.3.3. *Существует пример динамической системы коразмерности $2-0$, для которых нет сходимости временных средних типичной точки.*

Следствие 2.3.5. *Существует пример динамических систем с отсутствием временных средних у типичной меры, абсолютно непрерывной относительно Лебеговой, коразмерности $2-0$.*

Глава 3 посвящена изучению динамических систем с комплексным временем на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. В этой главе мы рассматриваем векторные поля:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \tag{0.2}$$

где $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, и функции f и g не имеют общей гиперповерхности нулей. Они задают слоение с особенностями комплексной плоскости на аналитические кривые.

В главе 3 доказывается аналитический аналог известной теоремы Худай-Веренов, Ильяшенко, Щербаков, Накаи, а именно, доказывается следующая теорема:

Теорема 3.2.2. *Типичное аналитическое слоение комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ минимально и эргодично (т.е. любое инвариантное измеримое множество имеет либо полную, либо нулевую меру Лебега).*

Типичность здесь понимается в топологическом смысле, а именно, свойство называется типичным, если оно выполнено для остаточного множества в пространстве векторных полей (снабженных топологией равномерной сходимости на компактах).

Стоит отметить, что исследование полиномиальных слоений основывается на рассмотрении бесконечно удаленной прямой, которая оказывается слоем с несколькими особыми точками (и, соответственно, с богатой группой монодромии).

Для аналитических слоений прямое применение такого метода невозможно: типичное аналитическое слоение имеет существенные особенности на всей бесконечно удаленной прямой.

Отдельный лист полиномиального слоения представляет собой риманову поверхность. Как ни странно, о ее топологии известно довольно немного. В частности, остается открытой следующая гипотеза, сформулированная Д. В. Аносовым в 1963 г. на семинаре В. И. Арнольда:

Гипотеза Аносова. *В классе полиномиальных слоений фиксированной степени плоскости $\mathbb{C}^2$ тождественный цикл может быть разрушен малым возмущением.*

И тем более остается открытой гипотеза о том, что все слои полиномиального слоения, кроме счетного числа, односвязны.

В главе 3 также исследуется топология слоев типичного аналитического слоения комплексной плоскости.

Нам удается доказать следующую теорему:

Теорема 3.2.1. *У типичного аналитического слоения комплексной плоскости есть счетное число гомологически независимых предельных циклов.*

Как следствие этой теоремы, получается усиление результата Т. С. Фирсовой [22], а именно:

Следствие 3.3.2. *У типичного аналитического слоения комплексной плоскости все слои кроме в точности* ***счетного числа*** *— диски, а остальные слои — цилиндры*

Автор выражает свою огромную благодарность своему научному руководителю, д.ф-м.н., профессору Ю. С. Ильяшенко за постановку задач и постоянное внимание к работе, к.ф-м.н. А. С. Городецкому за ценные обсуждения, к.ф-м.н. В. А. Клепцыну за плодотворные дискуссии.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Т. И. Голенищева-Кутузова, Бесконечность числа цилиндрических слоев для типичного аналитического слоения в $\mathbb{C}^2$, *Труды математического института им. В.А.Стеклова*, **254** (2006), с. 192–195.

[2] Т. И. Голенищева-Кутузова, В. А. Клепцын, Исследование сходимости процедуры Крылова-Боголюбова в примере Боуэна, *Математические заметки*, **38** (2007), no. 5, с. 678–689.

В работе [2] В. А. Клепцыну принадлежат формулировки и доказательства технических лемм 1 и 2, а также формулировки теорем 3 и 4, а Т. И. Голенищевой-Кутузовой принадлежат формулировки и доказательства основных теорем 1 и 2, а также доказательства теорем 3 и 4.

[22] Фирсова Т.С. Топология аналитических слоений в $\mathbb{C}^2$. Свойство Купки-Смейла, *Труды МИАН*, 2006, **254**, 162–180.